INTERNATIONAL
MATHEMATICAL
OLYMPIADS

IMO 50年

1969～1973

第3卷

● 主　编　佩　捷
● 副主编　冯贝叶

多解　推广　加强

$\sum_{1}^{n} k^5 x_k = a^3$

$\sum_{1}^{n} k^3 x_k = a^2$

$\sum_{1}^{n} k x_k = a$

哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

INTERNATIONAL MATHEMATICAL OLYMPIADS

IMO 50年

1969～1973

第3卷

● 主　编　佩　捷

● 副主编　冯贝叶

多解 推广 加强

哈爾濱工業大學出版社

HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内容简介

本书汇集了第11届至第15届国际数学奥林匹克竞赛试题及解答。本书广泛搜集了每道试题的多种解法，且注重了初等数学与高等数学的联系，更有出自数学名家之手的推广与加强。本书可归结出以下四个特点，即收集全、解法多、观点高、结论强。

本书适合于数学奥林匹克竞赛选手和教练员、高等院校相关专业研究人员及数学爱好者使用。

图书在版编目(CIP)数据

IMO 50年.第3卷，1969～1973/佩捷主编.—哈尔滨：哈尔滨工业大学出版社，2014.9

ISBN 978－7－5603－4886－5

Ⅰ.①I… Ⅱ.①刘… Ⅲ.①中学数学课－竞赛题－题解 Ⅳ.①G634.605

中国版本图书馆CIP数据核字(2014)第196783号

策划编辑　刘培杰　张永芹
责任编辑　张永芹　聂兆慈
封面设计　孙茵艾
出版发行　哈尔滨工业大学出版社
社　　址　哈尔滨市南岗区复华四道街10号　邮编150006
传　　真　0451－86414749
网　　址　http://hitpress.hit.edu.cn
印　　刷　哈尔滨市石桥印务有限公司
开　　本　787mm×1092mm　1/16　印张12.75　字数237千字
版　　次　2014年9月第1版　2014年9月第1次印刷
书　　号　ISBN 978－7－5603－4886－5
定　　价　28.00元

前言 | Foreword

法国教师于盖特·昂雅勒朗·普拉内斯在与法国科学家、教育家阿尔贝·雅卡尔的交谈中表明了这样一种观点:“若一个人不‘精通数学’,他就比别人笨吗”?

“数学是最容易理解的.除非有严重的精神疾病,不然的话,大家都应该是‘精通数学’的.可是,由于大概只有心理学家才可能解释清楚的原因,某些年轻人认定自己数学不行.我认为其中主要的责任在于教授数学的方式”.

“我们自然不可能对任何东西都感兴趣,但数学更是一种思维的锻炼,不进行这项锻炼是很可惜的.不过,对诗歌或哲学,我们似乎也可以说同样的话”.

“不管怎样,根据学生数学上的能力来选拔‘优等生’的不当做法对数学这门学科的教授是非常有害的.”(阿尔贝·雅卡尔,于盖特·昂雅勒朗·普拉内斯.《献给非哲学家的小哲学》.周冉,译.广西师范大学出版社,2001,96)

这本题集不是为老师选拔“优等生”而准备的,而是为那些对 IMO 感兴趣,对近年来中国数学工作者在 IMO 研究中所取得的成果感兴趣的读者准备的资料库.展示原味真题,提供海量解法(最多一题提供 20 余种不同解法,如第 3 届 IMO 第 2 题),给出加强形式,尽显推广空间.是我国建国以来有关 IMO 试题方面规模最大、收集最全的一本题集,从现在看以“观止”称之并不为过.

前中国国家射击队的总教练张恒是用“系统论”研究射击训练的专家，他曾说：“世界上的很多新东西，其实不是‘全新’的，就像美国的航天飞机，总共用了 2 万个已有的专利技术，真正的创造是它在总体设计上的新意.”（胡廷楣.《境界——关于围棋文化的思考》.上海人民出版社，1999，463）本书的编写又何尝不是如此呢，将近 100 位专家学者给出的多种不同解答放到一起也是一种创造.

如果说这部题集可比作一条美丽的珍珠项链的话，那么编者所做的不过是将那些藏于深海的珍珠打捞起来并穿附在一条红线之上，形式归于红线，价值归于珍珠.

首先要感谢江仁俊先生，他可能是国内最早编写国际数学奥林匹克题解的先行者（1979 年笔者初中毕业，同学姜三勇（现为哈工大教授）作为临别纪念送给笔者的一本书就是江仁俊先生编的《国际中学生数学竞赛题解》（定价仅 0.29 元），并用当时叶剑英元帅的诗词做赠言：“科学有险阻，苦战能过关.”27 年过去仍记忆犹新）. 所以特引用了江先生的一些解法. 江苏师范学院（华东师范大学的肖刚教授曾在该校外语专业读过）是我国最早介入 IMO 的高校之一，毛振璇、唐起汉、唐复苏三位老先生亲自主持从德文及俄文翻译 1～20 届题解. 令人惊奇的是，我们发现当时的插图绘制居然是我国的微分动力学专家“文化大革命”后北大的第一位博士张筑生教授，可惜天妒英才，张筑生教授英年早逝，令人扼腕（山东大学的杜锡录教授同样令人惋惜，他也是当年数学奥林匹克研究的主力之一）. 本书的插图中有几幅就是出自张筑生教授之手[22]. 另外中国科技大学是那时数学奥林匹克研究的重镇，可以说上世纪 80 年代初中国科技大学之于现代数学竞赛的研究就像哥廷根 20 世纪初之于现代数学的研究. 常庚哲教授、单墫教授、苏淳教授、李尚志教授、余红兵教授、严镇军教授当年都是数学奥林匹克研究领域的旗帜性人物. 本书中许多好的解法均出自他们[4],[13],[19],[20],[50]. 目前许多题解中给出的解法中规中矩，语言四平八稳，大有八股遗风，仿佛出自机器一般，而这几位专家的解答各有特色，颇具个性. 记得早些年笔者看过一篇报道说常庚哲先生当年去南京特招单墫与李克正去中国科技大学读研究生，考试时由于单墫基础扎实，毕业后一直在南京女子中学任教，所以按部就班，从前往后答，而李克正当时是南京市的一名工人，自学成才，答题是从后往前答，先答最难的一题，风格迥然不同，所给出的奥数题解也是个性化十足. 另外，现在流行的 IMO 题解，历经多人

之手已变成了雕刻后的最佳形式,用于展示很好,但用于教学或自学却不适合,有许多学生问这么巧妙的技巧是怎么想到的,我怎么想不到,容易产生挫败感,就像数学史家评价高斯一样,说他每次都是将脚手架拆去之后再将他建筑的宏伟大厦展示给其他人.使人觉得突兀,景仰之后,倍受挫折.高斯这种追求完美的做法大大延误了数学的发展,使人们很难跟上他的脚步这一点从潘承彪教授,沈永欢教授合译的《算术探讨》中可见一斑.所以我们提倡,讲思路,讲想法,表现思考过程,甚至绕点弯子,都是好的,因为它自然,贴近读者.

中国数学竞赛活动的开展与普及与中国革命的农村包围城市,星星之火可以燎原的方式迥然不同,是先在中心城市取得成功后再向全国蔓延,而这种方式全赖强势人物推进,从华罗庚先生到王寿仁先生再到裘宗沪先生,以他们的威望与影响振臂一呼,应者云集,数学奥林匹克在中国终成燎原之势,他们主持编写的参考书在业内被奉为圭臬,我们必须以此为标准,所以引用会时有发生,在此表示感谢.

中国数学奥林匹克能在世界上有今天的地位,各大学的名家们起了重要的理论支持作用.北京大学王杰教授、复旦大学舒五昌教授、首都师范大学梅向明教授、华东师范大学熊斌教授、中国科学院许以超研究员、合肥工业大学的苏化明教授、杭州师范学院的赵小云教授、陕西师范大学的罗增儒教授等,他们的文章所表现的高瞻周览、探赜索隐的识力,已达到炉火纯青的地步,堪称为中国 IMO 研究的标志.如果说多样性是生物赖以生存的法则,那么百花齐放,则是数学竞赛赖以发展的基础.我们既希望看到像格罗登迪克那样为解决一批具体问题而建造大型联合机械式的宏大构思型解法,也盼望有像爱尔特希那样运用最少的工具以娴熟的技能做庖丁解牛式剖析型解法出现.为此本书广为引证,也向各位提供原创解法的专家学者致以谢意.

编者为图“文无遗珠”的效果,大量参考了多家书刊杂志中发表的解法,也向他们表示谢意.

特别要感谢湖南理工大学的周持中教授、长沙铁道学院的肖果能教授、广州大学的吴伟朝先生以及顾可敬先生.他们四位的长篇推广文章读之,使我不能不三叹而三致意,收入本书使之增色不少.

最后要说的是由于编者先天不备,后天不足,斗胆尝试,徒见笑于方家.

哲学家休谟在写自传的时候,曾有一句话讲得颇好:“一

个人写自己的生平时,如果说得太多,总是免不了虚荣的."这句话同样也适合于一本书的前言,写多了难免自夸,就此打住是明智之举.

刘培杰
2014 年 9 月

目录 Contest

第一编
第 11 届国际数学奥林匹克

第一章

[illegible]

第 11 届国际数学奥林匹克题解

罗马尼亚，1969

1 证明：具有如下性质的自然数 a 有无穷多个，即对于任意的自然数 n，$z=n^4+a$ 都不是素数.

民主德国命题

证明 设 $a=4k^4$，其中 k 是大于 1 的自然数，则有

$$
\begin{aligned}
z=n^4+a=n^4+4k^4&=(n^2+2k^2)^2-4n^2k^2=\\
&(n^2+2k^2+2nk)(n^2+2k^2-2nk)=\\
&((n+k)^2+k^2)((n-k)^2+k^2) \qquad ①
\end{aligned}
$$

今由 $k>1$，对所有自然数 n，有

$$(n+k)^2+k^2>1,(n-k)^2+k^2>1$$

这样，① 右边的两个因子都大于 1，故当 $k>1$ 时，z 是合数. 今有无穷多个大于 1 的自然数 k，故有无穷多个自然数 $a=4k^4$ 使得对于所有的自然数 n，$z=n^4+a$ 都不是素数.

2 设 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 是实常数，x 是实变数而且

$$f(x)=\cos(a_1+x)+\frac{1}{2}\cos(a_2+x)+\frac{1}{4}\cos(a_3+x)+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}\cos(a_n+x)$$

已知 $f(x_1)=f(x_2)=0$，求证：$x_2-x_1=m\pi$，其中 m 是整数.

匈牙利命题

证明 首先我们证明 $f(x)$ 不恒等于零.

由于对所有实数 x，$\cos(a_i+x)\geqslant -1$，故有

$$
\begin{aligned}
f(-a_1)=1+\frac{1}{2}\cos(a_2-a_1)+\frac{1}{4}\cos(a_3-a_1)+\cdots+\\
\frac{1}{2^{n-1}}\cos(a_n-a_1)\geqslant 1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-\cdots-\frac{1}{2^{n-1}}=\\
\frac{1}{2^{n-1}}>0
\end{aligned}
$$

这样就证明了至少存在一个实数 $x=-a_1$ 使 $f(x)\neq 0$.

其次，我们利用加法定理得到

$$f(x)=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^{k-1}}(\cos a_k\cdot\cos x-\sin a_k\cdot\sin x)=$$
$$\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^{k-1}}\cos a_k\right)\cos x-\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^{k-1}}\sin a_k\right)\sin x=$$
$$A\cdot\cos x-B\cdot\sin x$$

其中 $$A=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^{k-1}}\cos a_k,B=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^{k-1}}\sin a_k$$

它们不可能同时为零. 否则 $f(x)$ 将会恒等于零,这和上面所证的结论矛盾.

若 $A\neq 0$,则从

$$f(x_1)=A\cdot\cos x_1-B\cdot\sin x_1=0$$
$$f(x_2)=A\cdot\cos x_2-B\cdot\sin x_2=0$$

得 $$\cot x_1=\cot x_2=\frac{B}{A}$$

若 $A=0$,则 $B\neq 0$,仍从 $f(x_1)=f(x_2)=0$ 得

$$\sin x_1=\sin x_2=0$$

上面任一种情形,都有 $x_2-x_1=m\pi$,m 是整数. 证毕.

3 求证:存在具有如下性质的四面体的充要条件,即对于每一个 k 值,$k=1,2,3,4,5$,四面体中有 k 条棱其长度为 $a(a>0)$,其余 $6-k$ 条棱其长度为 1.

波兰命题

证明 我们依照 $k=1,k=5,k=2,k=4$ 和 $k=3$ 的次序来处理.

(1)$k=1$.

设 $ABCD$ 是具有题述性质的四面体. 不失一般性,我们可以假定 $AB=a,AC=BC=AD=BD=CD=1$. 若 M 是棱 AB 的中点,则有

$$CM=DM=\sqrt{1-\frac{a^2}{4}}$$

另外,在 $\triangle CMD$ 中,有不等式

$$CM+DM>CD$$

这样,就有

$$2\sqrt{1-\frac{a^2}{4}}>1,a^2<3$$

故得必要条件

$$a<\sqrt{3}$$

今设这一条件满足,则还有

$$CM+CD>DM,DM+CD>CM$$

即存在一个 $\triangle CMD$ 具有上面给出的边长. 由此推出在由 A,B,C 确定的平面之外有一点 D,使得

$$AD = BD = CD = 1$$

所以,$a < \sqrt{3}$ 也是存在四面体 $ABCD$ 的充分条件.

(2)$k = 5$.

这一情形可以由 $k=1$ 推出,只要把棱长 a 和棱长 1 交换一下就行,我们得到的充要条件是 $a > \frac{1}{3}\sqrt{3}$.

(3)$k = 2$.

ⅰ 设 $AC = BC = a$,C 是这两棱的公共顶点,则因 $AB = 1$,由三角形不等关系得到必要条件 $2a > 1$,即 $a > \frac{1}{2}$. 今仍设 M 是 AB 的中点,则有

$$CD + DM > CM$$

故
$$1 + \frac{1}{2}\sqrt{3} > \sqrt{a^2 - \frac{1}{4}},a^2 < 2 + \sqrt{3}$$

所以
$$a < \sqrt{2 + \sqrt{3}}$$

另一方面还有 $DM + CM > CD$. 这样

$$\frac{1}{2}\sqrt{3} + \sqrt{a^2 - \frac{1}{4}} > 1,a^2 > 2 - \sqrt{3}$$

所以
$$a > \sqrt{2 - \sqrt{3}}$$

由此,我们得到必要条件

$$\sqrt{2 - \sqrt{3}} < a < \sqrt{2 + \sqrt{3}}$$

再则,若这一条件满足,则 $\triangle DMC$ 存在,于是四面体 $ABCD$ 也存在. 因此,这一条件也是充分的.

ⅱ 设 $AB = CD = a$,这两棱没有公共顶点. 由 $CM = DM = \sqrt{1 - \frac{a^2}{4}}$ 及 $\triangle DMC$ 中的不等关系,得

$$2\sqrt{1 - \frac{a^2}{4}} > a,2a^2 < 4$$

所以
$$a < \sqrt{2}$$

因为具有所述性质的四面体总能够作出,所以这一条件也是充分的.

由 ⅰ 和 ⅱ 可知,在 $k=2$ 时,存在具有题述性质的四面体的充要条件是 $a < \sqrt{2 + \sqrt{3}}$.

(4)$k = 4$.

这一情形也可归结为 $k=2$ 的情形,只要把棱长 a 和棱长 1 交换一下即可,我们得到充要条件

$$\frac{1}{a}<\sqrt{2+\sqrt{3}}$$

即
$$a>\sqrt{2-\sqrt{3}}$$

(5) $k=3$.

ⅰ 设 $a>\frac{1}{3}\sqrt{3}$，则存在一个四面体 $ABCD$，使 $AB=BC=CA=1$ 和 $DA=DB=DC=a$；若 S 是等边 $\triangle ABC$ 的重心，则由 $a>\frac{1}{3}\sqrt{3}$ 可知，我们总可以作出这个三角形所在平面的垂线 SD，且

$$SD=\sqrt{a^2-\left(\frac{1}{3}\sqrt{3}\right)^2}$$

ⅱ 设 $a<\sqrt{3}$，则存在一个四面体，有 $AB=BC=CA=a$，$DA=DB=DC=1$；类似于上面 ⅰ 的情形，由 $a<\sqrt{3}$，我们总可以选择一点 D，使

$$SD=\sqrt{1-(\frac{a}{3}\sqrt{3})^2}$$

因为由 ⅰ 与 ⅱ 所确定的两个区间是互相交错的，故证明了当 $k=3$ 时，对于所有正实数 a，都存在具有题述性质的四面体.

综上得到，存在具有题述性质的四面体的充要条件如下：

k	1	2	3	4	5
a	$0<a<\sqrt{3}$	$0<a<\sqrt{2+\sqrt{3}}$	$a>0$	$a>\sqrt{2-\sqrt{3}}$	$a>\frac{1}{3}\sqrt{3}$

4 在以 AB 为直径的半圆周 Γ 上，C 是异于 A，B 的任一点，D 是自 C 至 AB 的垂线足，今有三圆各和 AB 相切. Γ_1 是 $\triangle ABC$ 的内切圆，Γ_2 和 Γ_3 切 CD 于两侧并与 Γ 相切. 求证：Γ_1，Γ_2，Γ_3 另有一条公切线.

荷兰命题

证法 1 设 O_i 和 r_i 是圆 $\Gamma_i(i=1,2,3)$ 的圆心和半径. 我们只要证明 O_1，O_2，O_3 三点共线即可，因为若这三点在同一直线上，则 AB 关于这直线的对称线显然是三圆的另一条公切线.

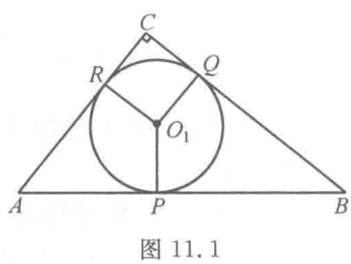

图 11.1

如图 11.1 所示，设 $\triangle ABC$ 的内切圆 Γ_1 和三边 AB，BC，CA 的切点分别为 P，Q，R，则

$$AR=AP,BQ=BP,CR=CQ$$

以 a，b，c 及 s 分别表示 $\triangle ABC$ 三边 BC，CA，AB 的长度及其半周长，则

$$s-a=AP+BQ+CQ-(BQ+CQ)=AP$$

同理 $s-b=BP,s-c=CQ=CR$

由于 $\angle ACB=90^\circ$，CQO_1R 是一个边长为 $s-c$ 的正方形，故

$$r_1=s-c \tag{①}$$

设 O 是半圆 Γ 的圆心，H_2，H_3 是自 O_2，O_3 至 AB 的垂线足，如图 11.2 所示.

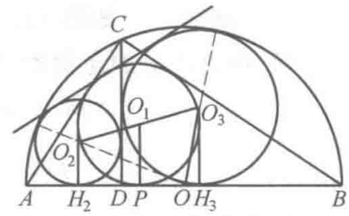

图 11.2

由于 $\triangle ABC \backsim \triangle CBD \backsim \triangle ACD$，故有

$$AC^2=AB\cdot AD,BC^2=AB\cdot BD$$

所以

$$AD=\frac{b^2}{c},BD=\frac{a^2}{c} \tag{②}$$

在 $\mathrm{Rt}\triangle O_2H_2O$ 中，有

$$H_2O=r_2+DO,O_2O=r-r_2$$

于是由勾股定理得

$$r_2^2+(r_2+DO)^2=(r-r_2)^2$$

即 $$r_2^2+2r_2(r+DO)=r^2-DO^2=(r+DO)(r-DO)$$

或 $$r_2^2+2r_2\cdot BD=BD\cdot AD$$

将 ② 代入得

$$r_2^2+2r_2\cdot\frac{a^2}{c}=\frac{a^2}{c}\cdot\frac{b^2}{c}\Rightarrow\left(r_2+\frac{a^2}{c}\right)^2=\frac{a^4}{c^2}+\frac{a^2b^2}{c^2}=a^2\Rightarrow$$

$$r_2+\frac{a^2}{c}=H_2B=a \tag{③}$$

同样可得

$$r_3+\frac{b^2}{c}=AH_3=b \tag{④}$$

③ + ④ 得

$$r_2+r_3+\frac{a^2+b^2}{c}=a+b$$

即

$$r_2+r_3=a+b-c=2(s-c) \tag{⑤}$$

设 P 是自 O_1 至 AB 的垂线足，则

$$H_2P=H_2B-PB=a-(s-b)=a+b-s=s-c$$
$$H_3P=H_3A-AP=b-(s-a)=a+b-s=s-c$$

所以

$$H_2P=H_3P=s-c=r_1=\frac{1}{2}(r_2+r_3) \tag{⑥}$$

由此可知，O_1P 是梯形 $H_2H_3O_3O_2$ 的中位线，从而可知 O_1 是 O_2O_3 的中点. 这就证明了 O_1，O_2，O_3 三点共线. 由此可得公切线 H_2H_3 关于连心线 O_2O_3 的对称线也为三圆的公切线. 因此本题得证.

证法 2 如图 11.3 所示，设圆 y_i 的圆心为 M_i，半径为 r_i，点 M_i 在 AB 上的正射影为 N_i，$i=1,2,3$，圆 y 的圆心为 O，并记

$$BC=a, CA=b, AB=c, AD=p$$

$$DB=q=c-p, \frac{a+b+c}{2}=s$$

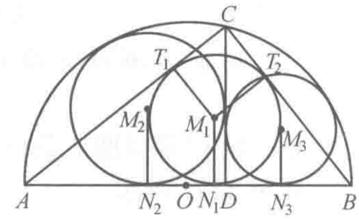

图 11.3

又设点 N_2 在线段 AD 内，点 N_3 在线段 BD 内.

首先计算半径 r_2，r_3 和 r_1.

因为 N_2 是圆 y_2 在 AB 上的切点，所以在 $\mathrm{Rt}\triangle OM_2N_2$ 中

$$N_2O=N_2D+DB-OB=r_2+q-\frac{c}{2}, M_2N_2=r_2$$

同样，因为圆 y_2 和半径为 $\frac{c}{2}$ 的圆 y 内切，所以

$$OM_2=\frac{c}{2}-r_2$$

从而由勾股定理可得

$$\left(r^2+q-\frac{c}{2}\right)^2+r_2^2=\left(\frac{c}{2}-r_2\right)^2$$

即
$$(r_2+q)^2-cq-cr_2+\frac{c^2}{4}+r_2^2=\frac{c^2}{4}-cr_2+r_2^3$$

由此可知

$$(r_2+q)^2=cq$$

又因为 $AB\cdot DB=CB^2$，即 $cq=a^2$，所以

$$(r_2+q)^2=a^2$$

由于 $r_2+q>0$，$a>0$，故有

$$r_2+q=a$$

即

$$r_2=a-q \quad ⑦$$

类似地，由 $\mathrm{Rt}\triangle ON_3M_3$ 可得

$$r_3=b-p \quad ⑧$$

因为圆 y_1 与 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 的直角边 AC，BC 分别切于点 T_1 和 T_2，所以四边形 $CT_1M_1T_2$ 是正方形，从而 $M_1T_1=CT_1$；又因为 $CT_1+AN_1+BT_2=s$，$AN_1+BT_2=c$，所以，$CT_1=s-c$，即

$$r_1=s-c \quad ⑨$$

其次，由 ⑦，⑧ 和 ⑨ 可得

$$\frac{1}{2}(M_2N_2+M_3N_3)=\frac{1}{2}(r_2+r_3)=\frac{1}{2}(a-q+b-p)=$$
$$\frac{1}{2}(a+b-c)=s-c=M_1N_1 \quad ⑩$$

$$\frac{1}{2}(BN_2+BN_3)=\frac{1}{2}(q+r_2+q-r_3)=$$