

箱梁理论

〔捷〕 V. 克里斯特克 著

何福照 吴德心 译

XIANG LIANG
LILUN

人民交通出版

Xiangliang Lilun

箱 梁 理 论

〔捷〕 V. 克里斯特克 著
何福照 吴德心 译

人 民 交 通 出 版 社

内 容 提 要

箱梁理论,系捷克斯洛伐克技术大学土木工程系副教授,高级研究员 V.克里斯特克所著。本书详细论述箱梁分析中的基本方法,包括:薄壁梁法、折板法、有限条法、有限元法等。同时对曲线形箱梁、多箱结构、箱梁的振动与稳定等进行了探讨和分析。

本书可供从事土木工程科研、教学、设计人员参考。也可供有关专业高年级学生学习之用。

本书译自英文版。

Theory of Box Girders

VLADIMÍR KŘÍSTEK

John Wiley & Sons, Ltd (English edition) Vladimír Křstek

箱 梁 理 论

V.克里斯特克 著

何福照 吴德心译

责任编辑:谢仁物

封面设计:彭小秋

技术设计:周 圆

插图设计:裘 琳

人民交通出版社出版发行

(北京和平里东街10号)

各地新华书店经销

人民交通出版社印刷厂印刷

开本: 850×1168_{毫米} 印张: 10.875 字数: 263 千

1988年9月 第1版

1988年9月 第1版 第1次印刷

印数: 0001—4,300册 定价: 5.90元

绪 论

箱梁由于其尺寸可以作为薄壁结构来考虑，在建筑物中正日益广泛地得到应用。在包括现代钢桥和预应力混凝土桥梁在内的这些结构中，薄壁闭口截面梁，即箱梁，往往是用作基本构件的。抗扭刚度大，弯曲应力图形合理，剪应力小，是箱梁的最大优点。这就是为什么箱梁特别适用于大跨径桥梁、平面弯桥和交通拥挤地区的窄墩柱桥的理由。

箱梁桥独具的特点是，主梁由箱形截面构成，箱梁主要提供抗弯、抗剪和抗扭强度。横截面可以是单箱的或多箱的，尤其在短跨径宽桥中还出现了空心板；由空心板到实际的箱形截面之间的过渡是相当任意的。

在结构设计中，结构布局通常是最重要的。理论分析不可能补偿由于错误选择结构体系带来的损失。

透彻地理解已知结构对于给定的作用力的反应，是结构设计在较宽广范围内进行分析的目的。只要这种资料对设计者是有用的，那末设计者一定能够验算结构是否满足设计规范的有关强度、稳定性和经济的要求。

本书的宗旨是讨论箱梁分析中出现的基本问题。然而，概述所有的理论不是著者的目的，而是介绍一些最适用的先进方法，并提出向现行概念挑战、促进其发展的观点。

因为本书企图给设计混凝土箱梁桥和钢箱梁桥提供一种合适的依据，还必须论及由薄板组成的钢桥所出现的一些特殊问题。因此，对于稳定性问题（第6章），对于剪力滞后现象和对于承受集中荷载的钢梁腹板内所出现的应力状态问题（第2.5节 b, c）予以特别注意。这些章节是作者与副教授 M. Škaloud 理学博士（DSc.）合作写成的，作者对他表示由衷的感谢。

目 录

绪 论

第 1 章	按薄壁梁分析箱梁	1
1.1	刚性截面箱梁的扭转	4
1.2	变形截面箱梁的扭转	15
1.3	分析变形截面箱梁的两个步骤	38
1.4	分析实例	45
1.5	双 T 梁受扭	48
1.6	结论	67
第 2 章	按折板结构分析箱梁	68
2.1	具有支座横隔板的简支折板结构	69
2.2	超静定折板结构	93
2.3	所讨论的方法的收敛性和数值计算	102
2.4	分析实例	104
2.5	折板理论的应用	106
第 3 章	曲线形箱梁	118
3.1	按薄壁梁分析曲线形箱梁	118
3.2	按折板结构分析曲线形箱梁	136
3.3	有限条法分析曲线形箱梁	146
第 4 章	多箱结构的荷载分布	161
4.1	铰结多箱结构	161
4.2	多箱室装配式结构	173
4.3	平板连接的箱梁	179
4.4	平板连接的箱梁的效能	181
第 5 章	箱梁的振动与稳定	194
5.1	按薄壁杆件分析箱梁的振动与稳定	194

5.2	按折板结构分析箱梁的振动与稳定	205
第 6 章	钢箱梁桥受压翼板的稳定性问题	213
6.1	加劲肋的最佳刚度的定义	213
6.2	按折板理论确定加劲肋的最佳刚度	216
6.3	纵向加劲肋对钢箱梁桥受压翼板稳定的影响	220
6.4	横向加劲肋对受压翼板的影响	240
第 7 章	箱梁横隔板	247
第 8 章	材料的物理性质对箱梁性能的影响	266
8.1	基本物理关系	266
8.2	物理性质为非线性的箱梁分析	274
8.3	箱梁承受荷载能力的估计	281
8.4	箱梁试验的结论	297
8.5	混凝土箱梁的时间因素	306
第 9 章	箱梁分析的其他方法	316
9.1	有限元法	316
9.2	空间框架结构法	320
9.3	平板法	321
9.4	格栅法	327
9.5	变截面结构的应力分量分离法	328
9.6	确定荷载最有效位置的准则	334
	参考文献	338

第1章 按薄壁梁分析箱梁

这种方法是将实际的薄壁空间结构视为一根梁。如果箱梁的横截面不太复杂（单箱或双箱），横截面尺寸同跨径相比很小，应用这种方法是有利的。这种梁可以是变截面的（如腹板为变厚度或者为变高度的），结构的各个部分可由不同特性的材料制成，静力体系可以是相当复杂的（连续梁、框架）。解法是以许多简化假定为基础，因此属于以普通弹性理论为基础的一类方法。计算可以不用计算机，或只用解部分常规问题（公式的估算，解方程组）的计算机配合计算。无需为整个问题的复杂解，编制新的极为复杂的程序，因此对于解简单结构，这种方法尤为适用。

通过进一步引进一些补充假定，并假设较简单的结构形状或结构特性（常截面，双对称等），可以大大地简化这组理论；利用类似于受弯梁（如弹性地基上的梁，连续梁）的各阶段的公式和计算，可以实现这种简化。对于初步和近似计算，或对于分析不很薄的薄壁结构，这种比拟法是完全能满足的。

箱梁的荷载，如用于桥梁上的箱梁荷载，可以是面荷载（垂直作用于横截面上翼板（flange）的荷载，水平风荷载，等等），线荷载，或位于腹板（web）同翼板的节点处，以及这些节点间的箱梁面上作用的集中力和集中弯矩（图1.1a, b）引起的荷载。求解作用于节点间的荷载效应，第一步可以假定在节点处（图1.1b）该结构完全固定，并且可按固支板来分析节点间的荷载效应。这样可求得约束反力，然后以这些反力作用于该梁求其正常解（第二步）（图1.1c）。最终的应力状态为上述两者之和。

由于箱梁的分析按一般的弹性理论方法进行，除前述近似法外，为了确定节点荷载，还可以采用以下的近似方法。

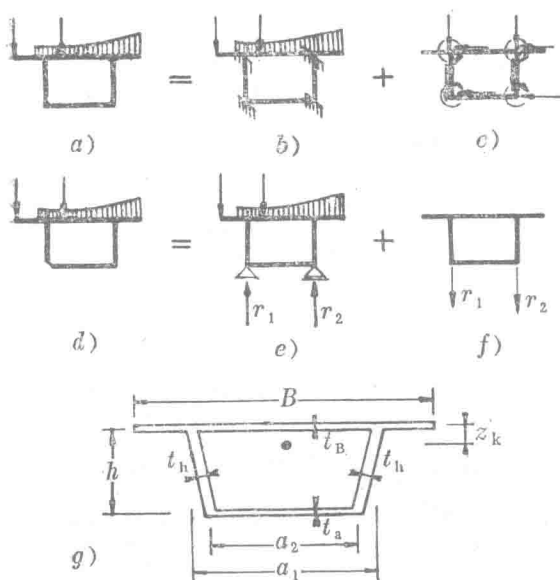


图 1.1
a~f) 箱梁的荷载; g) 横截面剪切中心

按照采用的假定，梁的横截面尺寸与跨长相比很小，因此结构各室壁的纵向抗弯和抗扭作用可略去不计（单向板效应），同时可以假定横截面的纯横向作用。对竖向荷载来说，横截面可以近似地视为由梁的腹板传递的剪力作用于剩余的结构上。按一般的弹性理论叠加原理，箱梁的外荷载的作用(图1.1d)，可以分解为：横截面（考虑各自的有效宽度）在腹板下设有支承的独立的刚架的解，和整个结构承受由求解该截面所得的反力反向作用于整个结构梁腹板的解（图1.1f）。其次，由于把横截面视为刚架（图1.1e），可通过常用的刚架静力学方法求解，因此可以只研究第二加载阶段的作用。同时，在荷载作用下箱梁腹板的竖向变形略去不计，因此，不论荷载是作用在梁的腹板下端（1.1f）还是上端，均无关系。

按照上述的一般理论，梁的应力是剪切作用或扭转特性所引

起的轴向（拉伸或压缩）应力和弯曲应力。产生哪一种类型的应力，取决于与梁的横截面剪切中心轴有关的梁的外荷载合力的位置，同时也取决于支承情况。

剪切中心是横截面平面上的一个点，当梁在任意方向内弯曲时，剪力流的合力通过该点。根据这一定义可见：如果外荷载的合力通过剪切中心，那末梁仅产生弯曲而无扭转。另一方面，在扭转时剪切中心是该横截面平面唯一不改变位置的点，换句话说，扭转时横截面绕剪切中心旋转。

根据上述的定义可以求剪切中心的位置。梁在两个方向（通常彼此垂直）受弯，可求出随之而产生的剪力流的合力位置，而剪切中心与这些合力的交点相重合。显然，如果横截面有两条对称轴，剪切中心与这两轴交点的重心一致。如果横截面只有一条对称轴，剪切中心位于该轴上，其位置由垂直于该轴弯曲时的剪力流的合力的位置而确定。例如，图1.1g所示的箱梁横截面剪切中心的位置，由离上翼板中线的距离 Z_k 所确定，即

$$Z_k = \frac{1}{t_a a_2^3 + t_B B^3 + 2t_h(a_1^2 + a_1 a_2 + a_2^2)h_1} \times \left[\frac{k}{\frac{a_2}{t_B} + \frac{a_2}{t_a} + 2\frac{h_1}{t_h}} \times 6h(a_1 + a_2) - \frac{t_a h a_2^2}{2}(3a_1 + a_2) - t_h h h_1 a_1(a_1 + 2a_2) \right]$$

式中： $h_1 = h \left[1 + \left(\frac{a_1 - a_2}{2h} \right)^2 \right]$

$$k = \frac{a_2^3 - a_1^3}{12} + \frac{h_1}{2} \left[\frac{t_a a_2^2}{t_h} + \frac{t_h a_1}{t_B}(a_1 + a_2) \right] + \frac{h_1^3}{3}(a_1 + 2a_2) + \frac{a_1}{4} \left(\frac{t_a a_2^3}{t_B} + B^2 \right)$$

薄壁梁的轴定义为横截面剪切中心的轨迹，与该轴相关的结构外荷载，可分解为产生上述基本应力型式的各种分量。运用普

通弹性理论，可解决拉伸、压缩和弯曲等问题。当计算受弯的剪应力时，考虑到梁的薄壁特性，可以假定这些应力沿腹板厚度为均匀分布。剪应力矢量平行于梁中面的切面（例如，这说明当箱梁竖向弯曲时，翼板内也产生剪应力）；梁的腹板内的应力的分布比实心截面均匀得多。

按照薄壁箱梁扭转特性，箱梁可分为两类。第一类是在横截面固有平面（own plane）内呈绝对刚性的梁。扭转时这种梁的横截面不再保持平面，即出现扭曲（warp）；横截面作为一个整体可以在其固有平面内旋转，但是该截面在固有平面内的投影并不改变其原来的形状。第二类则包括那些不满足这种条件的梁。对于包括在第一类中的箱梁，其横截面的刚度，必须由足够数目的刚性横隔板予以保证。在特殊情况下，以内部静定的平面桁架构成的横截面（例如由三角形组成的），也可以使截面形状不变形。然而，在许多情况下，这些措施使施工过程复杂化，同时使静力状态不利；此外，在箱室内往往必须留有自由空间（例如，对于各层均承担运输量的双层桥）。由于箱梁必须通过其横向弯曲刚度传递力，在第一类箱梁中该力可由横隔板承受，因此第二类箱梁的横截面出现变形。两类箱梁的性能是完全不同的。

现在论述在扭转作用下，对上述两类箱梁的分析。但只介绍变截面箱梁的一般解答；常截面箱梁的分析，则为一般解答的特例。

1.1 刚性截面箱梁的扭转

现在研究壁厚为 t 的任意形状的闭合截面的直箱梁，截面尺寸沿梁长度方向是变化的。箱梁的 x 轴通过截面剪切中心，与 y 和 z 轴构成右手坐标系（图1.2a），并且在解答中采用沿截面中线度量的坐标 s 。梁截面受载为变扭矩 $M_k(x)$ 。当梁扭转时，原来平面截面转动一角度 $\phi(x)$ ，同时产生扭曲 $u(s, x)$ 。由于自由扭曲受阻，梁截面内出现主应力 $\sigma(x, s)$ ，该应力表示这种

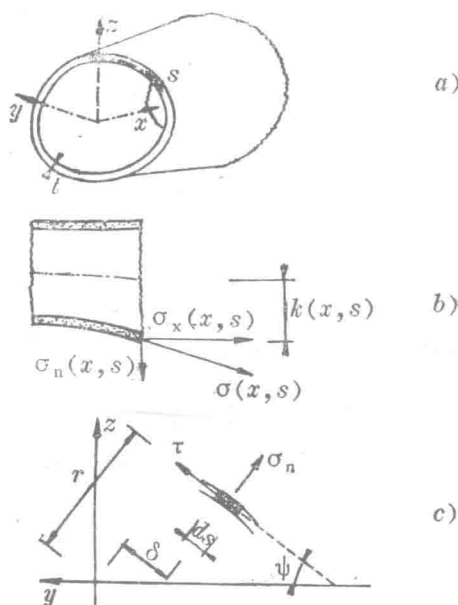


图 1.2

- a) 闭合截面薄壁梁的坐标系；b) 在变截面梁的曲壁中的扭曲应力分量；
c) 变截面梁内由应力产生的扭矩

非均匀扭转的特性；剪应力 $\tau(x, s)$ 的分布也与纯扭转产生的剪应力的分布不同。

除了上述刚性截面的必要条件外，在分析中应考虑下列假定：

a. 梁壁非常薄，以致于不可能传递垂直作用于壁上的任何力。出现在梁壁内的应力，是与梁壁中面的切平面平行，均匀分布于梁壁的厚度上的。因此，应力状态可以用两个应力分量来描述：正应力 $\sigma(x, s)$ (图1.2b) 和剪应力 $\tau(x, s)$ 。梁的截面为包含梁壁法线的曲面。

b. 考虑到变截面梁的横截面的扭曲，与纯扭矩作用于某一常截面（同一尺寸）梁的扭曲成正比，因此，事先确定某一指定截

面 x 的扭曲特性；按照这一假定，这种扭曲的数值，即为单位扭曲值 $u_1(x, s)$ （即纯扭转情况下的常截面梁的扭曲，且单位长度扭角为 $\Theta = d\Phi/dx = 1$ ）与仅取决于纵坐标 x 的函数 $f(x)$ 的乘积。所以，分析梁的截面扭曲时，可用下式表示：

$$u(x, s) = f(x)u_1(x, s) \quad (1.1)$$

式中： $u_1(x, s)$ ——上述的单位扭曲。

c. 沿纵向上的横截面尺寸变化很小，因此平行于 x 轴的正应力分量可以表示为

$$\sigma_x(x, s) = \sigma(x, s) \quad (1.2)$$

垂直于 x 轴平面内（如图1.2b, c）的正应力分量则为

$$\sigma_n(x, s) = \sigma(x, s) \frac{\partial k(x, s)}{\partial x} \quad (1.3)$$

式中： $k(x, s)$ ——表示改变横截面轮廓的函数（图1.2b）。

推导单位扭曲（unit warping）的关系式，应从适用于纯扭转的一些基本关系式入手。所谓纯扭转，系指常截面梁在其端截面上只作用有扭矩 M_k ，且截面的扭曲沿全梁长度方向不受任何影响。此时其剪应力为

$$\tau(s) = \frac{M_k}{2At(s)} \quad (1.4)$$

式中： A ——由横截面中线包围的面积。

纯扭转时，每单位长度的扭转角为

$$\Theta = \frac{d\Phi}{dx} = \frac{M_k}{G\mathcal{J}_k} = \frac{M_k}{4A^2G} \oint \frac{ds}{t(s)} \quad (1.5)$$

式中： $\mathcal{J}_k$ ——横截面纯扭转的刚性矩（moment of stiffness），可以由下面熟知的公式确定。

$$\mathcal{J}_k = \frac{4A^2}{\oint \frac{ds}{t(s)}} \quad (1.6)$$

其中： G ——剪切弹性模量。

中面剪应变由下式求得：

$$\gamma_{xs} = \frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad (1.7)$$

式中: v ——横截面的点在该截面中线切线方向(即图1.2a坐标 s 方向)的位移。

剪应变也可表示为

$$\gamma_{xs} = \frac{\tau}{G} \quad (1.8)$$

同时, 由于纯扭转下横截面是绕梁轴作整体转动, 因此可写为

$$v(s) = \phi r(s) \quad (1.9)$$

式中: r ——从剪切中心到横截面上任意点的垂直距离(图1.2c)。

将式(1.4)~式(1.9)合并, 可得下式:

$$\begin{aligned} \frac{du}{ds} &= \frac{\tau}{G} - \frac{d\phi}{dx} r = \frac{M_k}{2AGl} - \theta r \\ &= \theta \left(-\frac{2A}{I} \oint \frac{ds}{t} - r \right) = \theta \left(\frac{\kappa}{t} - r \right) \quad (1.10) \end{aligned}$$

积分上式, 并把扭曲为零(即该点在横截面的对称轴上)的坐标 s 的原点代入, 得到纯扭转下横截面扭曲的关系式为

$$\begin{aligned} u(s) &= \theta \int_0^s \left[\frac{\kappa}{t(s)} - r(s) \right] ds = \theta \left[\kappa \int_0^s \frac{ds}{t(s)} - \int_0^s r(s) ds \right] \\ &= \theta [\kappa \chi(s) - \omega(s)] = \theta u_1(s) \quad (1.11) \end{aligned}$$

式中: ω ——扇形面积, 其极点为横截面剪切中心。

那末单位扭曲(按照前面所定义的单位长度扭转角的扭曲)为

$$u_1(x, s) = \kappa(x) \chi(x, s) - \omega(x, s) \quad (1.12)$$

而且可以应用于式(1.1)。

根据虎克定律以及式(1.1)和式(1.2), 变截面梁在非均匀扭转下所出现的正应力, 可表示为

$$\sigma(x, s) = \sigma_x(x, s) = E \frac{\partial u(x, s)}{\partial x}$$

$$= E \left[\frac{df(x)}{dx} u_1(x, s) + f(x) \frac{\partial u_1(x, s)}{\partial x} \right] \quad (1.13)$$

式中：\$E\$——拉伸（压缩）时的弹性模量。

沿横截面中线剪应力的分布，由剪应力所引起的变形情况确定，而剪应力与横截面单位扭曲成正比。从假定 \$b(p.5)\$ 所引出的式(1.1)，实际上是另一分析前提，因为剪应力的分布已预先确定了。从而，由正应力及剪应力所引起的变形是与单位扭曲成正比的。

将关系式(1.12)代入式(1.1)中，对 \$s\$ 求导，同时依次考虑式(1.7)、(1.8)和式(1.9)，经整理后可得到下列表达式：

$$\tau(x, s) = G \left\{ f(x) \left[\frac{\kappa(x)}{t(x, s)} - r(x, s) \right] + \theta(x) r(x, s) \right\} \quad (1.14)$$

因此剪应力值取决于两个未知因素，即扭曲函数 \$f(x)\$ 和单位长度的扭转角 \$\theta(x)\$（单位扭转）。应该注意，如果某一特例 \$f = \theta\$ 成立时，那末，从式(1.14)，并根据式(1.10)和式(1.5)可得：

$$\tau = G\theta \frac{\kappa}{t} = G\theta \frac{2A}{t \oint \frac{ds}{t}} = \frac{M_k}{2At}$$

这种情况就是纯扭转的情况〔见式(1.4)〕。

如该梁只承受扭转，则横截面的六个平衡条件由下列各式给定：

$$\oint \sigma_x(x, s) dF = 0 \quad (1.15)$$

$$\oint \sigma_y(x, s) dF + \oint \tau_y(x, s) dF = 0$$

$$\oint \sigma_z(x, s) dF + \oint \tau_z(x, s) dF = 0 \quad (1.16)$$

$$\oint \sigma_x(x, s) z dF = 0, \quad \oint \sigma_x(x, s) y dF = 0 \quad (1.17)$$

$$\oint \tau(x, s) r(x, s) dF + \oint \sigma_n(x, s) \delta(x, s) dF = M_k(x) \quad (1.18)$$

式中: $\sigma_y(x, s)$ 和 $\sigma_z(x, s)$ ——表示 y 轴和 z 轴方向正应力的分量;

$\tau_y(x, s)$ 和 $\tau_z(x, s)$ ——分别为 y 轴和 z 轴方向剪应力的分量;

$\delta(x, s)$ ——从剪切中心至横截面中心线研究对象点处的法线的垂直距离 (图1.2c); 当拉应力 $\sigma(x, s)$ 产生正扭矩, 而周线函数 (contour function) 在增加 (即 $\partial k / \partial x > 0$) 时, 距离 δ 为正。

dF ——微元横截面面积 ($dF = t(x, s) ds$)。

由式(1.18)可见, 在变截面梁中, 不但剪应力抵抗扭矩, 而且位于横截面平面内的、其作用方向一般不与梁的纵轴相交的正应力分量, 也抵抗扭矩。

应用式(1.13), 满足式(1.15)和式(1.17)时, 则下列关系式必然消失:

$$\oint u_1(x, s) dF, \quad \oint \frac{\partial u_1(x, s)}{\partial x} dF$$

$$\oint u_1(x, s) y dF, \quad \oint \frac{\partial u_1(x, s)}{\partial x} y dF$$

$$\oint u_1(x, s) z dF, \quad \oint \frac{\partial u_1(x, s)}{\partial x} z dF$$

只有当单位扭曲面积图 (unit-warping-area-diagram) 为主值, 扇形面积的极点与剪切中心一致, 以及 $\partial u_1(x, s) / \partial x$ 的变化与 $u_1(x, s)$ 成正比时, 上述情况才能存在。

同样, 为满足式(1.16), 以下积分也必然消失:

$$\oint \cos \psi(x, s) ds$$

$$\oint r(x, s) \cos \psi(x, s) dF$$

$$\oint u_1(x, s) \frac{\partial k(x, s)}{\partial x} \cos \psi(x, s) dF$$

$$\oint \frac{\partial u_1(x, s)}{\partial x} \frac{\partial k(x, s)}{\partial x} \cos \psi(x, s) dF$$

在上述各 $\cos \psi$ 积分中, $\cos \psi$ 由 $\sin \psi$ 所代替亦然。式中的 ψ 表示中心线的切线与 y 轴的正方向之间的夹角 (图1.2c)。例如, 具有两个对称轴的横截面, 而不是一般的横截面, 可满足这些条件。

横截面的平衡状态不能满足, 那就意味着一般的变截面梁在非均匀扭转时, 会产生弯曲甚至拉伸或压缩应力。使梁承受反向弯矩 $\Delta M_y(x)$ 和 $\Delta M_z(x)$, 以及剪力 $\Delta T_y(x)$ 和 $\Delta T_z(x)$, 或者正向力 $\Delta N(x)$ (求解非均匀扭转), 通常可确定解决这种附加的应力状态 (实际所占分量很小); 将式(1.16)、(1.17)和式(1.15)以计算应力代入并替换右边的零, 便可求得上述各量。

非均匀扭转使梁的横截面扭曲受到约束, 保证了梁的相容性。总的扭矩 $M_k(x)$ 一部分按纯扭转的方式传递 [$M_{kp}(x)$ 部分], 一部由正应力 (扭曲应力) $\sigma(x, s)$ 的纵向变化产生的剪应力传递 [$M_{kd}(x)$ 部分], 一部分通过这些应力偏离梁轴而传递 [$M_{kn}(x)$ 部分]。这可用下式表达, 即

$$M_k(x) = M_{kp}(x) + M_{kd}(x) + M_{kn}(x) \quad (1.19)$$

纯扭转的情况可写为

$$M_{kp}(x) = G \mathcal{J}_k(x) \Theta(x) \quad (1.20)$$

扭矩 $M_{kd}(x)$ 是由次剪应力 (secondary shear stresses) 产生的; 考虑横截面的连续性及式(1.13), 可得下式:

$$M_{kd}(x) = -E [f''(x) \mathcal{J}_d(x) + 2f'(x) \mathcal{J}_{d1}(x) + f(x) \mathcal{J}_{d2}(x)] \quad (1.21)$$

式中扭曲常数可写为

$$\oint u_1^2(x, s) dF = \mathcal{J}_d(x)$$

$$\oint u_1(x, s) \left[\frac{\partial u_1(x, s)}{\partial x} t(x, s) + \frac{1}{2} u_1(x, s) \frac{\partial t(x, s)}{\partial x} \right] ds = \mathcal{J}_{d1}(x) \quad (1.22)$$

$$\oint u_1(x, s) \left[\frac{\partial^2 u_1(x, s)}{\partial x^2} t(x, s) + \frac{\partial u_1(x, s)}{\partial x} \frac{\partial t(x, s)}{\partial x} \right] ds = \mathcal{J}_{d2}(x)$$

扭转弯矩的最后部分 $M_{kn}(x)$ 是由于纵向扭曲应力偏离梁轴 x 产生的。这一力矩已经包括在平衡方程(1.18)之中，它是该式的第二分量。可写为

$$M_{kn}(x) = \oint \sigma_n(x, s) \delta(x, s) dF \quad (1.23)$$

因而，扭转力矩可用两种方式表达：即用式(1.18)和式(1.19)两式表达。利用式(1.3)、(1.13)和式(1.14)，可从式(1.18)导出单位长度的扭转角（单位扭转）为

$$\Theta(x) = \frac{1}{G \mathcal{J}_c(x)} \left[M_k(x) - f(x) \{ G [\mathcal{J}_k(x) - \mathcal{J}_c(x)] - E D_2(x) \} + E f'(x) D_1(x) \right] \quad (1.24)$$

式中：

$$\begin{aligned} \oint u_1(x, s) \frac{\partial k(x, s)}{\partial x} \delta(x, s) dF &= D_1(x) \\ \oint \frac{\partial u_1(x, s)}{\partial x} \frac{\partial k(x, s)}{\partial x} \delta(x, s) dF &= D_2(x) \\ \oint r^2(x, s) dF &= \mathcal{J}_c(x) \end{aligned} \quad (1.25)$$

把式(1.24)代入式(1.20)中，并调整式(1.19)，可以得到闭合刚性截面变截面梁的非均匀扭转的基本方程：

$$\begin{aligned} f''(x) + f'(x) \frac{D_1(x) H(x) + 2 \mathcal{J}_{d1}(x)}{\mathcal{J}_d(x)} \\ - f(x) \frac{\left[\frac{G}{E} \mathcal{J}_k(x) - D_2(x) \right] H(x) - \mathcal{J}_{d2}(x)}{\mathcal{J}_d(x)} \end{aligned}$$