



普通高等教育“十三五”规划教材

PUTONG GAODENG JIAOYU “13·5” GUIHUA JIAOCAI

转子动力学分析方法

袁惠群 编著

 冶金工业出版社
www.cnmp.com.cn



普通高等教育“十三五”规划教材

转子动力学分析方法

袁惠群 编著

北 京

冶金工业出版社

2017

内 容 提 要

本书系统地阐述了转子动力学的各种基本分析方法,包括分析盘轴结构涡动的直接法、整体传递矩阵法、动力优化设计方法、转子动力稳定性分析方法、充液转子涡动的流固耦合分析方法、分析质量连续分布转子涡动的解析法,以及分析复杂转子系统的有限元法等。

本书可以作为高等学校学习机械、动力、化工、力学、电力、交通、航空、能源、矿业等专业的研究生和高年级本科生的参考书,也可以作为从事旋转机械转子动力学设计与研究的工程技术人员的参考书。

图书在版编目(CIP)数据

转子动力学分析方法/袁惠群编著. —北京:冶金工业出版社, 2017. 1

普通高等教育“十三五”规划教材

ISBN 978-7-5024-7366-2

I. ①转… II. ①袁… III. ①转子动力学—动力学分析—分析方法—高等学校—教材 IV. ①O347.6

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2016) 第 274060 号

出 版 人 谭学余

地 址 北京市东城区嵩祝院北巷 39 号 邮编 100009 电话 (010)64027926

网 址 www.cnmp.com.cn 电子信箱 yjchs@cnmp.com.cn

责任编辑 卢 敏 美术编辑 吕欣童 版式设计 彭子赫

责任校对 石 静 责任印制 李玉山

ISBN 978-7-5024-7366-2

冶金工业出版社出版发行;各地新华书店经销;固安华明印业有限公司印刷

2017 年 1 月第 1 版, 2017 年 1 月第 1 次印刷

787mm×1092mm 1/16; 16.5 印张; 400 千字; 255 页

42.00 元

冶金工业出版社 投稿电话 (010)64027932 投稿信箱 tougao@cnmp.com.cn

冶金工业出版社营销中心 电话 (010)64044283 传真 (010)64027893

冶金书店 地址 北京市东四西大街 46 号(100010) 电话 (010)65289081(兼传真)

冶金工业出版社天猫旗舰店 yjgycbs.tmall.com

(本书如有印装质量问题,本社营销中心负责退换)

前 言

转子动力学的分析方法是解决工程中各类旋转机械动力学问题的实用有效工具。旋转机械的动力学模型可分为离散质量模型和连续质量模型。对于离散质量模型的各种基本动力分析方法,本书主要介绍了基于欧拉动力学方程和拉格朗日方程的盘轴结构动力学分析的直接法、基于 Riccati 变换的整体传递矩阵法、转子系统的动力优化设计方法和稳定性分析方法。轴承与旋转机械本体共同构成了转子支承系统。本书对现代工业中新兴的磁悬浮轴承转子系统的涡动作了详细分析。针对旋转机械的流固耦合问题,介绍了充液转子的涡动分析方法,对于连续质量分布系统模型,本书介绍了分析弹性盘轴转子涡动特性的解析法。最后介绍了大型旋转机械动力计算的有限元法。

全书共 8 章。第 1 章转子系统涡动分析的直接法,第 2 章磁悬浮轴承转子系统的涡动特性,第 3 章多轴转子系统动力分析的整体传递矩阵法,第 4 章转子系统动力优化设计方法,第 5 章转子系统动力稳定性分析方法,第 6 章充液转子的涡动及稳定性分析方法,第 7 章连续质量转子系统的涡动分析方法,第 8 章转子系统动力分析的有限元法。

作者为力学专业本科生和研究生开设了转子动力学课程并编写了转子动力学讲义。原讲义中第一部分转子动力学基础已出版。本书是在该讲义第二部分复杂转子的动力计算分析方法的基础上修订而成。本书介绍的基本分析方法主要针对转子动力学中的线性涡动问题。第三部分转子系统的非线性特性将另行独立成书。

本书在编写过程中参考了国内外若干相关著作和文献,谨向这些著作和文献作者致以诚挚感谢。本书的出版得到了国家自然科学基金(51275081)和冶金工业出版社的大力支持,在此谨表示衷心感谢。作者的博士研究生贺威、杨文军、赵天宇等协助整理了部分章节内容,并计算了大部分算例,对他们的辛勤工作表示诚挚感谢。

本书可以作为高等学校机械、动力、航空、力学等专业高年级大学生和研

究生在学习了《转子动力学基础》之后进一步学习有关转子动力学分析方法的
教学参考书，也可作为工程技术人员解决工程中转子动力学问题的参考书或
资料。

限于水平，不当之处实恐难免，敬请读者指正。

作 者

2016 年 3 月

目 录

1 转子系统涡动分析的直接法	1
1.1 非对称支承转子系统涡动分析的直接法	1
1.1.1 非对称弹性支承多盘转子的涡动模型	1
1.1.2 稳态自由涡动的频率方程与临界角速度	6
1.1.3 算例：非对称弹性支承三盘转子的稳态涡动	6
1.2 弹性支承双刚度轴转子的稳态涡动	11
1.2.1 弹性支承双刚度轴转子的稳态涡动微分方程	11
1.2.2 弹性支承双刚度轴单盘转子的稳态自由涡动	13
1.2.3 固定坐标系下双刚度轴单盘转子的稳态涡动	17
1.3 非对称弹性支承多盘转子的瞬态涡动	25
1.3.1 非对称弹性支承多盘转子的瞬态涡动模型	25
1.3.2 非对称弹性支承多盘转子的瞬态涡动微分方程	25
1.3.3 算例：非对称弹性支承三盘转子的瞬态涡动	27
习题	31
2 磁悬浮轴承转子系统的涡动特性	32
2.1 磁悬浮轴承概述	32
2.1.1 磁悬浮轴承特点	32
2.1.2 磁悬浮轴承的种类	33
2.1.3 磁悬浮轴承的结构	33
2.2 磁悬浮轴承的电磁力	34
2.2.1 磁感应强度计算	34
2.2.2 无扰动时的电磁力计算	35
2.2.3 受扰动时轴向磁轴承电磁力	35
2.3 磁悬浮轴承弹性转子系统的稳态涡动特性	38
2.3.1 磁悬浮轴承弹性转子系统模型	38
2.3.2 磁悬浮轴承单圆盘偏置转子系统的涡动微分方程	43
2.3.3 算例：磁悬浮轴承单盘偏置弹性转子的自由涡动分析	45
2.4 磁悬浮轴承刚性转子的涡动特性	47
2.4.1 磁悬浮轴承刚性转子的涡动微分方程	47
2.4.2 磁悬浮轴承刚性转子的自由涡动特性	49
2.4.3 磁悬浮轴承刚性转子控制的状态方程	50

2.4.4 磁悬浮轴承刚性转子的控制仿真	51
习题	53
3 多轴转子系统动力分析的整体传递矩阵法	54
3.1 整体传递矩阵法的基本原理	54
3.1.1 计算模型及子结构划分	54
3.1.2 整体传递矩阵法的基本思想	55
3.2 转子系统的整体传递矩阵	57
3.2.1 各向同性非耦合单元的整体传递矩阵	58
3.2.2 各向同性耦合单元传递矩阵	59
3.2.3 各向异性耦合单元传递矩阵	61
3.3 临界转速及振型的求解	64
3.3.1 求解多转子系统的临界转速	64
3.3.2 求解转子的振型	65
3.3.3 不平衡响应	66
3.4 整体传递矩阵法计算临界转速及振型算例	67
3.4.1 单元划分	68
3.4.2 计算固有频率	68
3.4.3 转子的各阶振型	69
3.5 基于 Riccati 变换的整体传递矩阵法	70
3.5.1 转子系统基于 Riccati 变换的传递矩阵	70
3.5.2 耦合矩阵的 Riccati 变换	71
3.5.3 基于 Riccati 变换的整体传递矩阵法计算不平衡响应	73
习题	77
4 转子系统动力优化设计方法	78
4.1 转子系统临界转速的灵敏度分析	78
4.1.1 转子-轴承系统参数的灵敏度	78
4.1.2 某燃气轮机转子灵敏度分析	82
4.2 转子系统不平衡响应的灵敏度分析	91
4.2.1 不平衡响应的灵敏度分析	91
4.2.2 阻尼器的灵敏度分析	96
4.3 转子系统的动力学优化设计	100
4.3.1 转子支承刚度的优化设计	101
4.3.2 阻尼器的优化设计	105
4.4 智能算法在转子系统优化设计中的应用	110
4.4.1 智能优化算法简介	110
4.4.2 智能算法的实例分析	118
习题	121

5 转子系统动力稳定性分析方法	122
5.1 转子系统的动力稳定性基础	122
5.1.1 运动稳定性判定定理	122
5.1.2 Lyapunov 稳定性定理	123
5.1.3 常系数线性系统的稳定性	123
5.1.4 多自由度线性完整自治动力系统的稳定性	124
5.1.5 Hurwitz 稳定性判据	125
5.1.6 非线性系统稳定性的一次近似判别法	126
5.2 常见动力学系统的稳定性	127
5.2.1 阻尼系统和保守系统的稳定性	127
5.2.2 陀螺系统的稳定性	127
5.2.3 线性循环系统的稳定性	131
5.3 单盘转子的动力稳定性	133
5.4 多盘转子的动力稳定性	137
习题	147
6 充液转子的涡动及稳定性分析方法	148
6.1 单盘充液刚性转子的涡动	148
6.1.1 充液刚性转子的动力学模型	148
6.1.2 转子及腔内流体涡动微分方程	149
6.1.3 充液刚性转子涡动的频率方程	152
6.2 充液刚性转子的失稳区间	155
6.2.1 充液刚性转子的失稳判据	155
6.2.2 充液转子参数对失稳区间的影响	156
6.3 充液刚性转子一般涡动的动力稳定性	160
6.3.1 充液刚性转子涡动的动力学方程	160
6.3.2 充液刚性转子涡动的特征方程	161
6.3.3 薄层充液刚性转子的动力稳定性	164
6.4 任意充液量刚性转子的动力稳定性	166
6.4.1 充液刚性转子的一般涡动特征方程的解析解	166
6.4.2 参数对充液刚性转子一般涡动失稳区域的影响	169
习题	173
7 连续质量转子系统的涡动分析方法	174
7.1 质量连续分布转动轴的涡动特性	174
7.1.1 连续质量梁-轴模型稳态涡动微分方程	174
7.1.2 Bernoulli-Euler 梁-轴模型稳态涡动分析	177
7.1.3 Rayleigh 梁-轴模型稳态涡动分析	182

7.1.4 Timoshenko 梁-轴模型的稳态涡动分析	186
7.2 弹性盘-柔性轴转子系统动力学特性研究	192
7.2.1 弹性盘-柔性轴转子系统的涡动微分方程	192
7.2.2 弹性盘-柔性轴转子系统的涡动特性分析	199
7.3 弹性叶片-盘轴转子系统动力学特性研究	203
7.3.1 弹性叶片-盘轴转子系统建模	203
7.3.2 弹性叶片-盘轴转子系统涡动微分方程	204
7.3.3 弹性叶片-盘轴转子系统涡动分析	207
习题	209
8 转子系统动力分析的有限元法	210
8.1 简单转子系统的有限元分析	210
8.1.1 单元的运动方程	211
8.1.2 系统的运动方程	216
8.1.3 临界转速分析	217
8.1.4 不平衡响应分析	219
8.1.5 转子系统动力响应分析	220
8.1.6 悬臂双盘转子系统有限元分析算例	221
8.2 转子系统三维实体单元有限元分析	225
8.2.1 六面体等参数有限元方法	225
8.2.2 转子系统三维实体单元有限单元法动力学方程	228
8.2.3 算例: 某航空发动机高压转子模态与固有频率分析	229
8.3 热传导问题的有限单元法	233
8.3.1 惯于温度场和热传导的一些概念	233
8.3.2 热传导微分方程	235
8.3.3 温度场的边值条件	236
8.3.4 稳态热传导问题	237
8.3.5 瞬态热传导问题	239
8.3.6 热变形与热应力计算	240
8.4 三维实体转子系统热弯响应分析	241
8.4.1 转子系统热振动有限元模型	241
8.4.2 不平衡量和热弯曲耦合响应分析	242
8.4.3 间接法热应力分析实例	243
8.4.4 稳态不平衡响应	245
8.4.5 不平衡量和热弯曲耦合响应	250
习题	254
参考文献	255

为了分析旋转机械的动力学特性,通常将旋转机械简化为质量集中的多盘转子系统和质量连续分布的弹性转子系统。基于欧拉动力学方程和拉格朗日方程的直接法是分析多盘转子系统涡动的基本方法。对于工程中常见的转子系统的涡动分析方法,《转子动力学基础》中已有较详细的介绍。但是,工程中某些旋转机械具有非轴对称的转子本体或转动轴,旋转机械的支承刚度也有可能在水平方向和铅垂方向不相等。这些情况构成了非对称转子系统。本章将进一步分析工程实际中这类更为复杂的结构工况的转子动力学特性。

1.1 非对称支承转子系统涡动分析的直接法

1.1.1 非对称弹性支承多盘转子的涡动模型

本节应用 Lagrange 方程建立多盘转子的稳态涡动微分方程。设一圆截面弹性转轴两端支承在轴承 A 和 B 上,轴承简化为弹性支承。支承质量分别为 m_A 和 m_B , A 端支承刚度为 k_{Ax} 和 k_{Ay} , B 端支承刚度为 k_{Bx} 和 k_{By} 。静平衡时,两支承弹簧长度为 δ_0 。距离左端支承点为 a_i 处放置第 i 个刚性薄圆盘,其质量、极转动惯量与赤道转动惯量分别为 m_{di} 、 J_{pi} 、 J_{di} 。该转子在圆盘运动到任意瞬时的动力学模型如图 1-1 所示。图中,两支承点分别位于 $A'(x_A, y_A)$ 和 $B'(x_B, y_B)$; 第 i 个圆盘的形心及坐标为 $o'_i(x_i, y_i)$, 第 i 个圆盘的偏摆角为 θ_{xi} 、 θ_{yi} 。旋转轴的自转角速度为 Ω 。

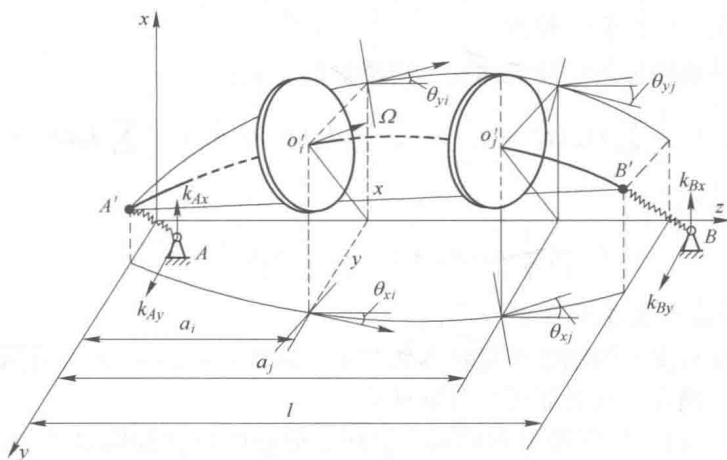


图 1-1 非对称弹性支承多盘转子动力学模型示意图

稳态涡动时圆盘与支承在 oxz 和 oyz 平面的投影如图 1-2 (a)、(b) 所示。先分析转子圆盘与弹性支承的速度和位移,计算转子系统的动能与势能,进而采用 Lagrange 方程建

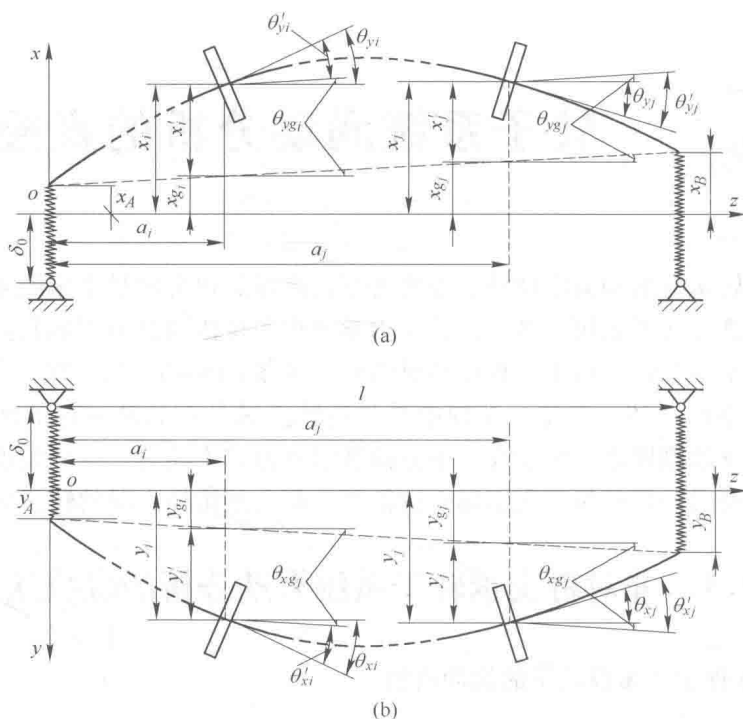


图 1-2 转子变形在平面上的投影

(a) 转子变形在 oxz 平面内的投影关系; (b) 在 oyz 平面内的投影关系

立弹性支承偏置转子系统的稳态涡动微分方程。

设 x_i 、 θ_{yi} 、 y_i 、 θ_{xi} 分别为第 i 个圆盘形心在 oxz 平面内和 oyz 平面内的绝对位移与转角, x_A 、 x_B 和 y_A 、 y_B 分别为两端支承 A 和 B 在 oxz 平面内和 oyz 平面内的位移。忽略轴变形的影响, 稳态涡动时 N 个圆盘与两个支承共计 $4N + 4$ 个自由度。选取广义坐标为 $q = (x_1, \theta_{y1}, \dots, x_N, \theta_{yN}, x_A, x_B, y_1, \theta_{x1}, \dots, y_N, \theta_{xN}, y_A, y_B)^T$ 。

1.1.1.1 圆盘与支承的动能

由动力对称转动刚体的动能表达式, 得圆盘的动能:

$$T_d = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_{di} (\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N J_{di} (\dot{\theta}_{xi}^2 + \dot{\theta}_{yi}^2) + \sum_{i=1}^N J_{pi} \Omega \dot{\theta}_{yi} \theta_{xi} \quad (1-1)$$

两端支承的动能:

$$T_b = \frac{1}{2} m_A (\dot{x}_A^2 + \dot{y}_A^2) + \frac{1}{2} m_B (\dot{x}_B^2 + \dot{y}_B^2) \quad (1-2)$$

1.1.1.2 圆盘与支承的势能

假设转轴圆盘与支承的刚度等材料参数关于自转轴对称, oyz 面内的弹性势能与 oxz 面内的弹性势能互不耦合, 其势能可以分别计算。

设 x'_i 及 θ'_{yi} 表示由转轴弯曲引起的第 i 个圆盘形心的位移和圆盘转角, 简称为弹性位移, x_{gi} 、 θ_{gyi} 表示不计转轴弯曲变形时, 由两端支承弹性变形引起的第 i 个圆盘形心的位移和圆盘转角, 简称为刚体位移。选 oxz 平面内整个盘轴支承系统的广义坐标为: $\mathbf{q}_x = [\mathbf{q}_{cx}^T : \mathbf{q}_{0x}^T]^T = \left\{ \mathbf{q}_{cx} \right\}$ 。其中, $\mathbf{q}_{cx} = (x_1, \theta_{y1}, \dots, x_N, \theta_{yN})^T$ 为非刚体自由度的广义坐标, $\mathbf{q}_{0x} =$

$\{x_A \ x_B\}^T$ 为刚体自由度的广义坐标。注意, 这里刚体自由度是指两端弹性支承的位移, 非刚体自由度的广义坐标是指除 q_{0x} 外的坐标。排除刚体自由度后的系统称为全约束系统。

设全约束系统的坐标为 $\tilde{q}_{xc} = \{x'_1, \theta'_{y1}, \dots, x'_N, \theta'_{yN}\}^T$, 刚体自由度 q_0 在非刚体自由度上引起的变形为 $\bar{q}_{0x} = \{x_{g1}, \theta_{gy1}, \dots, x_{gN}, \theta_{gyN}\}^T$ 。 q_{xc} 、 q_{x0} 、 $\bar{q}_{x0}$ 和 $\tilde{q}_{xc}$ 的 4 个向量中只有两个向量是独立的, 因而是广义坐标。其余两个坐标用这两个广义坐标表示。本节选 q_{cx} 和 q_{0x} 为广义坐标, 从而 $\bar{q}_0$ 和 $\tilde{q}_c$ 是不独立的。

A oxz 平面内的势能

在任意瞬时, 由于两端弹性支承位移引起的第 i 个圆盘形心位移和截面转角与两端支承位移的几何关系为:

$$\begin{aligned} x_{gi} &= \left(1 - \frac{a_i}{l}\right)x_A + \frac{a_i}{l}x_B \\ \theta_{ygi} &= \frac{x_B - x_A}{l} = -\frac{1}{l}x_A + \frac{1}{l}x_B \end{aligned} \quad (1-3)$$

写成矩阵:

$$\begin{Bmatrix} x_{gi} \\ \theta_{ygi} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - \frac{a_i}{l} & \frac{a_i}{l} \\ -\frac{1}{l} & \frac{1}{l} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_A \\ x_B \end{Bmatrix} \quad (1-4)$$

简记为:

$$\bar{q}_{xi} = \Phi_i q_{xb} \quad (1-5)$$

其中,

$$\bar{q}_{xi} = \begin{Bmatrix} x_{gi} \\ \theta_{ygi} \end{Bmatrix}_i, q_{0x} = \begin{Bmatrix} x_A \\ x_B \end{Bmatrix}, \Phi_i = \begin{bmatrix} \phi_{11i} & \phi_{12i} \\ \phi_{21i} & \phi_{22i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} \\ \phi_{21} & \phi_{22} \end{bmatrix}_i = \begin{bmatrix} 1 - \frac{a_i}{l} & \frac{a_i}{l} \\ -\frac{1}{l} & \frac{1}{l} \end{bmatrix} \quad (1-6)$$

在 oxz 平面内, 整个转子系统各个圆盘由于支承弹性变形引起的刚体位移为:

$$\bar{q}_x = \begin{Bmatrix} \bar{q}_{x1} \\ \vdots \\ \bar{q}_{xi} \\ \vdots \\ \bar{q}_{xN} \end{Bmatrix} = \Phi q_{0x} = \begin{bmatrix} \Phi_1 \\ \vdots \\ \Phi_i \\ \vdots \\ \Phi_N \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_A \\ x_B \end{Bmatrix} \quad (1-7)$$

其中,

$$\Phi = [\Phi_1 \ \dots \ \Phi_i \ \dots \ \Phi_N]^T \quad (1-8)$$

反映刚体自由度对圆盘位移的影响, 称为支座弹性影响矩阵, 简称影响矩阵。全约束系统的变形等于盘轴系统的总变形减去刚体自由度引起的变形:

$$\tilde{q}_{cx} = q_{cx} - \Phi q_{0x} \quad (1-9)$$

其分量形式为:

$$\begin{Bmatrix} \tilde{q}_{cx1} \\ \vdots \\ \tilde{q}_{cxi} \\ \vdots \\ \tilde{q}_{cxN} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} q_{cx1} \\ \vdots \\ q_{cxi} \\ \vdots \\ q_{cxN} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \Phi_1 \\ \vdots \\ \Phi_i \\ \vdots \\ \Phi_N \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} x_A \\ x_B \end{Bmatrix} \quad (1-10)$$

将上述刚度表达式代入到计及弹性支承影响的圆盘形心处转轴的势能表达式中可得:

$$\begin{aligned} V_{dx} &= \frac{1}{2} \{\tilde{q}_{cx}\}^T [K_c] \{\tilde{q}_{cx}\} = \frac{1}{2} \{q_{cx} - \Phi q_{0x}\}^T [K_c] \{q_{cx} - \Phi q_{0x}\} \\ &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} q_{cx} \\ q_{0x} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} K_c & -K_c \Phi \\ -\Phi^T K_c & \Phi^T K_c \Phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_{cx} \\ q_{0x} \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \{q_x\}^T [K_e] \{q_x\} \end{aligned} \quad (1-11)$$

其中,

$$K_e = \begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} I \\ -\Phi^T \end{bmatrix} K_c [I \quad -\Phi] = \begin{pmatrix} K_c & -K_c \Phi \\ -\Phi^T K_c & \Phi^T K_c \Phi \end{pmatrix} \quad (1-12)$$

式(1-12)为计及弹性支承影响的整个系统在 oxz 平面内的刚度矩阵。式中 $K_{11} = K_c$ 为不计弹性支承,仅考虑转轴弯曲变形的刚度矩阵。它可通过其与柔度矩阵互逆关系 $[K_c] = [\alpha]^{-1}$ 求出。其余各项: $K_{12} = -K_c \Phi$, $K_{21} = -\Phi^T K_c$, $K_{22} = \Phi^T K_c \Phi$ 均可通过 K_c 与影响矩阵 Φ 的乘积求出。

B oyz 面内转轴的弹性势能

取 oyz 面内的广义坐标为 $q_y = \begin{bmatrix} q_{cy} \\ q_{oy} \end{bmatrix} = \{y_1, \theta_{x1}, \dots, y_N, \theta_{xN}, y_A, y_B\}^T$, 全约束系统的坐标

为 $\tilde{q}_y = \begin{bmatrix} \tilde{q}_{cy} \\ \tilde{q}_{oy} \end{bmatrix}$ 。其中, $\tilde{q}_{cy} = \{y'_1, \theta'_{x1}, \dots, y'_N, \theta'_{xN}, y_A, y_B\}^T$ 。由于结构与材料参数轴对称, oyz

面内的刚度矩阵与 oxz 面内的刚度矩阵是相同的,所以只需将 oxz 面内坐标换为 oyz 面内的对应的坐标,并依照 oxz 面内弹性势能的推导过程,即可得到 oyz 面内的弹性势能。

C 整个转轴的弹性势能

将 oxz 面内的弹性势能与 oyz 面内的弹性势能叠加,即得到整个转轴的弹性势能:

$$V_d = \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} q_x \\ q_y \end{Bmatrix}^T \begin{bmatrix} K_e & \\ & K_e \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_x \\ q_y \end{Bmatrix} \quad (1-13)$$

两端弹性支承的势能:

$$V_b = \frac{1}{2} (k_{Ax} x_A^2 + k_{Ay} y_A^2 + k_{Bx} x_B^2 + k_{By} y_B^2) \quad (1-14)$$

转子系统的总势能:

$$V = V_d + V_b \quad (1-15)$$

1.1.1.3 广义力

设各圆盘的偏心距分别为 $e_i (i = 1, 2, \dots, N)$ ，根据广义力定义可得：

$$Q_j = \{m_{d1}e_1\Omega^2 \cos\Omega t, 0, \dots, m_{dN}e_N\Omega^2 \cos\Omega t, 0, 0, 0, m_{d1}e_1\Omega^2 \sin\Omega t, 0, \dots, m_{dN}e_N\Omega^2 \sin\Omega t, 0, 0, 0\}^T \quad (1-16)$$

1.1.1.4 单跨多盘转子系统的稳态涡动微分方程

取广义坐标： $\mathbf{q} = (x_1, \theta_{y1}, \dots, x_N, \theta_{yN}, x_A, x_B, y_1, \theta_{x1}, \dots, y_N, \theta_{xN}, y_A, y_B)^T$ ，忽略阻尼的影响，将动能和势能表达式代入第二类拉格朗日（Lagrange）方程：

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} + \frac{\partial V}{\partial q_j} = Q_j \quad (1-17)$$

可以得到两端弹性支承单跨多盘转子系统的涡动微分方程：

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_1 & \\ & \mathbf{M}_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{u}}_1 \\ \ddot{\mathbf{u}}_2 \end{Bmatrix} + \Omega \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{J}_1 \\ -\mathbf{J}_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{u}}_1 \\ \dot{\mathbf{u}}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_1 & \\ & \mathbf{K}_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{P}_1 \\ \mathbf{P}_2 \end{Bmatrix} \quad (1-18)$$

其中，

$$\mathbf{M}_1 = \begin{bmatrix} m_{d1} & & & & & \\ & J_{d1} & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & m_{dN} & & \\ & & & & J_{dN} & \\ & & & & & m_A \\ & & & & & & m_B \end{bmatrix}, \mathbf{J}_1 = \begin{bmatrix} 0 & & & & & \\ & J_{P1} & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & J_{PN} & \\ & & & & & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{K}_1 = \mathbf{K}_e + \mathbf{K}_{bx},$$

$$\mathbf{K}_2 = \mathbf{K}_e + \mathbf{K}_{by}, \mathbf{K}_{bx} = \begin{bmatrix} [0]_{2N \times 2N} & \\ & k_{Ax} \\ & & k_{Bx} \end{bmatrix}, \mathbf{K}_{by} = \begin{bmatrix} [0]_{2N \times 2N} & \\ & k_{Ay} \\ & & k_{By} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{u}_1 = \begin{Bmatrix} x_1 \\ \theta_{y1} \\ \vdots \\ x_N \\ \theta_{yN} \\ x_A \\ x_B \end{Bmatrix}, \mathbf{u}_2 = \begin{Bmatrix} y_1 \\ \theta_{x1} \\ \vdots \\ y_N \\ \theta_{xN} \\ y_A \\ y_B \end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} \mathbf{P}_1 \\ \mathbf{P}_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{P}_0 \cos\Omega t \\ \mathbf{P}_0 \sin\Omega t \end{Bmatrix}, \mathbf{P}_0 = \begin{Bmatrix} m_{d1}e_1\Omega^2 \\ 0 \\ \vdots \\ m_{dN}e_N\Omega^2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}_{(2N+2) \times 1}$$

或简记为

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \Omega\mathbf{J}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{P} \quad (1-19)$$

其中，

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_1 & \\ & \mathbf{M}_1 \end{bmatrix}, \mathbf{J} = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{J}_1 \\ -\mathbf{J}_1 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_1 & \\ & \mathbf{K}_2 \end{bmatrix}, \mathbf{P} = \begin{Bmatrix} \mathbf{P}_1 \\ \mathbf{P}_2 \end{Bmatrix}$$

1.1.2 稳态自由涡动的频率方程与临界角速度

不计偏心量, 由稳态涡动微分方程得稳态自由涡动微分方程为:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_1 & \\ & \mathbf{M}_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{u}}_1 \\ \ddot{\mathbf{u}}_2 \end{Bmatrix} + \Omega \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{J}_1 \\ -\mathbf{J}_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{u}}_1 \\ \dot{\mathbf{u}}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_1 & \\ & \mathbf{K}_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (1-20)$$

方程简记为:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \Omega\mathbf{J}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{u} = 0 \quad (1-21)$$

得频率方程:

$$|-\mathbf{M}\omega^2 + \mathbf{J}\Omega\omega + \mathbf{K}| = 0 \quad (1-22)$$

对于同步正向涡动 $\Omega = \omega$, 频率方程化为:

$$|-\mathbf{M}_F\omega^2 + \mathbf{K}| = 0 \quad (1-23)$$

其中,

$$\mathbf{M}_F = \mathbf{M} - \mathbf{J} \quad (1-24)$$

对于同步反向涡动 $\Omega = -\omega$, 频率方程化为:

$$|-\mathbf{M}_B\omega^2 + \mathbf{K}| = 0 \quad (1-25)$$

其中,

$$\mathbf{M}_B = \mathbf{M} + \mathbf{J} \quad (1-26)$$

刚度矩阵恒正定, 而惯性矩阵 $\mathbf{M}_F$ 和 $\mathbf{M}_B$ 可能正定, 也可能非正定。对于后者, 由方程求出的涡动角速度的平方 ω^2 , 可能为负实数值, 在物理上无意义。故涡动临界角速度可能少于 4N 个。

1.1.3 算例: 非对称弹性支承三盘转子的稳态涡动

已知: 单跨三盘转子对称放置如图 1-3 所示。两端轴承简化为非对称弹性支承, A 端支承刚度 $k_{Ax} = 1 \times 10^6 \text{ N/m}$, $k_{Ay} = 2 \times 10^6 \text{ N/m}$, B 端支承刚度 $k_{Bx} = 1 \times 10^6 \text{ N/m}$, $k_{By} = 2 \times 10^6 \text{ N/m}$ 。A 端支承质量 $m_A = 10 \text{ kg}$, B 端支承质量 $m_B = 10 \text{ kg}$ 。轴长 $l = 400 \text{ mm} = 0.4 \text{ m}$, 圆盘 1 距左端支承距离 $a_1 = 100 \text{ mm}$, 圆盘 2 居中, 圆盘 3 距左端支承距离 $a_3 = 300 \text{ mm}$; 转轴直径为 10mm, 抗弯刚度 $EI = 4 \times 10^5 \text{ N} \cdot \text{cm}^2$, 各圆盘直径均为 $D = 80 \text{ mm}$, 厚度 $\Delta = 1 \text{ cm}$ 。轴

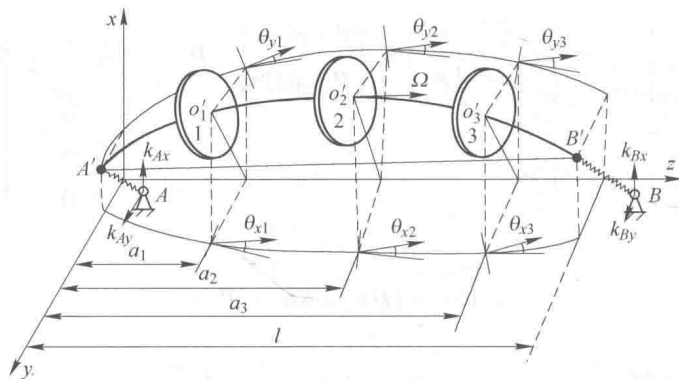


图 1-3 对称放置单跨三盘转子系统的稳态涡动示意图

与盘的弹性模量 $E = 2.1 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2 = 20.58 \times 10^6 \text{ N/cm}^2$, 材料密度 $\rho = 7.8 \times 10^{-3} \text{ kg/cm}^3$ 。

求:

- (1) 导出转子系统刚度矩阵, 建立固定坐标系下的稳态涡动微分方程;
- (2) 求解稳态自由涡动方程, 导出频率方程和临界转速表达式;
- (3) 画出涡动频率与自转角速度的关系曲线图, 并讨论支承刚度和支承质量对临界转速的影响。

解: 为了获得转子系统的涡动微分方程, 首先要求得系统的刚度矩阵。刚度矩阵可由柔度矩阵求逆得到, 因此先求出柔度矩阵。在 xoz 平面内先在圆盘 1 位置的 x 轴方向施加单位力 P , 求解得到的各个自由度上的位移即为柔度矩阵第一列。由材料力学可知, 此时挠曲线方程及截面转角方程为:

$$\left. \begin{aligned} \omega &= \frac{Pa_3z}{6EI}(l^2 - z^2 - a_3^2) \\ \theta &= \frac{d\omega}{dz} = \frac{Pa_3}{6EI}(l^2 - 3z^2 - a_3^2) \end{aligned} \right\}, 0 \leq z \leq a_1 \quad (1-27)$$

$$\left. \begin{aligned} \omega &= \frac{Pa_3}{6EI} \left[\frac{l}{a_3} (z - a_1)^3 + (l^2 - a_3^2)z - z^3 \right] \\ \theta &= \frac{d\omega}{dz} = \frac{Pa_3}{6EI} \left[\frac{3l}{a_3} (z - a_1)^2 + (l^2 - a_3^2) - 3z^2 \right] \end{aligned} \right\}, a_1 \leq z \leq l \quad (1-28)$$

分别代入三个圆盘的 z 坐标即得柔度矩阵第一列:

$$\alpha_{11} = \frac{a_1^2 a_3^2}{3EI}; \alpha_{21} = \frac{a_1 a_3 (a_3 - a_1)}{3EI}; \alpha_{31} = \frac{a_1 (3l^2 - 3a_1^2)}{48EI} \quad (1-29)$$

$$\alpha_{41} = \frac{a_1 (2a_1^2 - l^2)}{24EI}; \alpha_{51} = \frac{a_1^2 (l^2 - 2a_1^2)}{6EI}; \alpha_{61} = \frac{a_1 (2a_1^2 - l^2)}{6EI} \quad (1-30)$$

同理, 在圆盘 1 上施加单位力矩 M 即得柔度矩阵第二列:

$$\alpha_{12} = \frac{a_1 a_3 (a_3 - a_1)}{3EI}; \alpha_{22} = \frac{a_1^2 - a_1 a_3 + a_3^2}{3EI}; \alpha_{32} = \frac{l^2 - 4a_1^2}{16EI} \quad (1-31)$$

$$\alpha_{42} = \frac{l^2 - 12a_1^2}{24EI}; \alpha_{52} = \frac{a_1 (l^2 - 4a_1^2)}{6EI}; \alpha_{62} = \frac{l^2 - 6a_1^2}{6EI} \quad (1-32)$$

其余各列同理可以求得。下面直接给出代入数据之后在 xoz 平面上仅考虑转轴弯曲变形的柔度矩阵:

$$[\alpha] = \begin{bmatrix} 0.00001875 & 0.000125 & 0.000022917 & -0.00003125 & 0.00001458 & -0.000125 \\ 0.000125 & 0.00145833 & 0.0001875 & -0.00010417 & 0.000125 & -0.0010417 \\ 0.000022917 & 0.0001875 & 0.000033333 & 0 & 0.00002292 & -0.0001875 \\ -0.00003125 & -0.00010417 & 0 & 0.0008333 & 0.00003125 & -0.00010417 \\ 0.00001458 & 0.000125 & 0.00002292 & 0.00003125 & -0.0000188 & -0.000125 \\ -0.000125 & -0.0010417 & -0.0001875 & -0.00010417 & -0.000125 & 0.0014583 \end{bmatrix}$$

对 $[\alpha]$ 求逆即得式 (1-12) 中的刚度矩阵 $[K_e]$:

$$[K_e] = \begin{bmatrix} 6.0003 & 0.1200 & -4.8006 & 0.2400 & 0.0004 & 0.0000 \\ 0.1200 & 0.0280 & -0.2400 & 0.0080 & 0.0000 & 0.0000 \\ -4.8006 & -0.2400 & 9.6011 & 0.0000 & -4.8006 & 0.2400 \\ 0.2400 & 0.0080 & 0.0000 & 0.0320 & -0.2400 & 0.0080 \\ 0.0004 & 0.0000 & -4.8006 & -0.2400 & 6.0003 & -0.1200 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.2400 & 0.0080 & -0.1200 & 0.0280 \end{bmatrix} \times 10^5$$

式 (1-12) 中的 Φ 为:

$$\Phi = \begin{bmatrix} 0.75 & -2.5 & 0.5 & -2.5 & 0.25 & -2.5 \\ 0.25 & 2.5 & 0.5 & 2.5 & 0.75 & 2.5 \end{bmatrix}^T$$

由此可得 K_e 为:

$$K_e = \begin{bmatrix} K_e & -K_e\Phi \\ -\Phi^TK_e & \Phi^TK_e\Phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6.0003 & 0.1200 & -4.8006 & 0.2400 & 0.0004 & 0.0000 & -1.2000 & 0.0000 \\ 0.1200 & 0.0280 & -0.2400 & 0.0080 & 0.0000 & 0.0000 & 0.1200 & 0.0000 \\ -4.8006 & -0.2400 & 9.6011 & 0.0000 & -4.8006 & 0.2400 & 0.0001 & 0.0001 \\ 0.2400 & 0.0080 & 0.0000 & 0.0320 & -0.2400 & 0.0080 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0004 & 0.0000 & -4.8006 & -0.2400 & 6.0003 & -0.1200 & 0.0000 & -1.2000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.2400 & 0.0080 & -0.1200 & 0.0280 & 0.0000 & -0.1200 \\ -1.2000 & 0.1200 & 0.0001 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 1.2000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0001 & 0.0000 & -1.2000 & -0.1200 & 0.0000 & 1.2000 \end{bmatrix} \times 10^5$$

取广义坐标: $q = (x_1, \theta_{y1}, \dots, x_N, \theta_{yN}, x_A, x_B, y_1, \theta_{x1}, \dots, y_N, \theta_{xN}, y_A, y_B)^T$, 忽略阻尼的影响, 将系统的动能和势能表达式代入第二类拉格朗日 (Lagrange) 方程:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} + \frac{\partial V}{\partial q_j} = Q_j \quad (1-33)$$

可以得到两端弹性支承单跨多盘转子系统的涡动微分方程:

$$\begin{bmatrix} M_1 & \\ & M_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \end{Bmatrix} + \Omega \begin{bmatrix} 0 & J_1 \\ -J_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_1 & \\ & K_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (1-34)$$

其中,

$$M_1 = \begin{bmatrix} 0.392 & & & & & \\ & 0.00065 & & & & \\ & & 0.392 & & & \\ & & & 0.00065 & & \\ & & & & 0.392 & \\ & & & & & 0.00065 \\ & & & & & & 10 \\ & & & & & & & 10 \end{bmatrix}, J_1 = \begin{bmatrix} 0 & & & & & \\ & 0.0013 & & & & \\ & & 0 & & & \\ & & & 0.0013 & & \\ & & & & 0 & \\ & & & & & 0.0013 \\ & & & & & & 0 \\ & & & & & & & 0 \end{bmatrix}$$

$$K_1 = K_e + K_{bx}$$