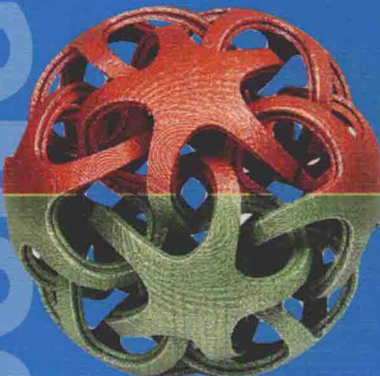
数学奥林匹克小丛书

高中卷 7

Shuxue Aolinpike

XIAOCONG SHU



复数

安振平 编著

华东师范大学出版社

olinpike

数学奥林匹克小丛书

高中卷 7

复数

inpike Xiao Congshu ● 安振平 编著

华东师范大学出版社

图书在版编目（C I P）数据

数学奥林匹克小丛书. 高中卷. 复数／安振平编著.—上海：华东师范大学出版社，2005.3
ISBN 7-5617-4141-3

I.数... II.安... III.数学课-高中-教学参考资料 IV.G634.603

中国版本图书馆CIP数据核字(2005)第019471号

数学奥林匹克小丛书·高中卷

复 数

编　　著　安振平
策划组稿　倪　明
责任编辑　审校部编辑工作组
特约编辑　王学锋
封面设计　高　山
版式设计　蒋　克

出版发行　华东师范大学出版社
　　　　　市场部 电话 021-62865537
　　　　　门市(邮购) 电话 021-62869887
　　　　　门市地址 华东师大校内先锋路口
业务电话　上海地区 021-62232873
　　　　　华东 中南地区 021-62458734
　　　　　华北 东北地区 021-62571961
　　　　　西南 西北地区 021-62232893
业务传真　021-62860410 62602316
http://www.ecnupress.com.cn
社　　址　上海市中山北路3663号
　　　　　邮编 200062

印 刷 者　江苏苏州市永新印刷包装有限责任公司
开　　本　787x960 16开
印　　张　6.5
字　　数　108千字
版　　次　2005年4月第一版
印　　次　2005年4月第一次
印　　数　11 000
书　　号　ISBN 7-5617-4141-3/G·2370
定　　价　9.00元

出 版 人　朱杰人

（如发现本版图书有印订质量问题，请寄回本社市场部调换或电话021-62865537联系）

总 序

数学竞赛像其他竞赛活动一样，是青少年学生的一种智力竞赛. 在类似的以基础科学为竞赛内容的智力竞赛活动中，数学竞赛的历史最悠久、国际性强，影响也最大. 我国于1956年开始举行数学竞赛，当时最有威望的著名数学家华罗庚、苏步青、江泽涵等都积极参加领导和组织竞赛活动，并组织出版了一系列青少年数学读物，激励了一大批青年学生立志从事科学事业. 我国于1986年起参加国际数学奥林匹克，多次获得团体总分第一，并于1990年在北京成功地举办了第31届国际数学奥林匹克，这标志着我国数学竞赛水平在国际上居领先地位，为各国科学家与教育家所瞩目.

我国数学竞赛活动表明，凡是开展好的地区和单位，都能大大激发学生的学习数学的兴趣，有利于培养创造性思维，提高学生的学习效率. 这项竞赛活动，将健康的竞争机制引进数学教学过程中，有利于选拔人才. 由数学竞赛选拔的优胜者，既有踏实广泛的数学基础，又有刻苦钻研、科学的学习方法，其中的不少青年学生将来会成为出色的科学工作者. 在美国，数学竞赛的优胜者中后来成名如米尔诺 (J.W.Milnor)、芒福德 (D.B.Mumford)、奎伦 (D.Quillen) 等都是菲尔兹数学奖的获得者；在波兰，著名数论专家辛哲尔 (A.Schinzel) 学生时代是一位数学竞赛优胜者；在匈牙利，著名数学家费叶尔 (L.Fejér)、里斯 (M.Riesz)、舍贵 (G.Szegö)、哈尔 (A.Haar)、拉多 (T.Radó) 等都曾是数学竞赛获奖者. 匈牙利是开展数学竞赛活动最早的国家，产生了同它的人口不成比例的许多大数学家！

在开展数学竞赛的活动同时，各学校能加强联系，彼此交流数学教学经验，从这种意义上来说，数学竞赛可能成为数学课程改革的“催化剂”，成为培养优秀人才的有力措施.

不过，应当注意在数学竞赛活动中，注意普及与提高相结合，而且要以普及为主，使竞赛具有广泛的群众基础，否则难以持久.

当然，现在有些人过于关注数学竞赛的成绩，组织和参与都具有很强的功利目的，过分扩大数学竞赛的作用，这些都是不正确的，违背了开展数学竞赛活动的本意. 这些缺点有其深层次的社会原因，需要逐步加以克服，不必因为有某些缺点，就否定这项活动.

我十分高兴看到这套《数学奥林匹克小丛书》的正式出版. 这套书，规模大、专题细. 据我所知，这样的丛书还不多见. 这套书不仅对数学竞赛中出现的常用方法作了阐述，而且对竞赛题作了精到的分析解答，不少出自作者自己的研究所得，是一套很好的数学竞赛专题教程，也是中小学生和教师的参考书.

这套小丛书的作者都是数学竞赛教学和研究人员，不少是国家集训队的教练和国家队的领队. 他们为我国开展数学竞赛的活动和我国学生在IMO上取得成绩、为国争光作出了贡献，为这套书尽早面世付出了艰辛的劳动. 华东师大出版社在出版《奥数教程》和《走向IMO》等竞赛图书基础上，策划组织了这套丛书，花了不少心血. 我非常感谢作者们和编辑们在这方面所做的工作，并衷心祝愿我国的数学竞赛活动开展得越来越好.

王元

王元，著名数学家，中国科学院院士，曾任中国数学会理事长、中国数学奥林匹克委员会主席.

前言

复数知识是中学数学中相对独立的内容之一.在现行的高中过渡教材中,复数仅涉及到复数的概念和复数代数形式的运算,学习的内容相对较少.然而,在各级各类的数学竞赛中,复数问题和复数方法又是命题的热门话题.

所谓复数问题,是指以复数的面孔呈现的问题.它涉及到复数的有关概念,复数代数形式、三角形式的运算,复数及其运算的几何意义等内容.这当中,出现较为频繁的题型有:复数模的计算与不等式证明,复数的辐角主值范围的确定,复平面内的动点轨迹问题的探求,复数集中的方程.解答复数问题的本质是"化虚为实",将复数问题转化为实数问题去解决.怎么化归,则完全因题而异,你可以从复数的代数形式入手,也可以从复数的三角形式入手,还可以考虑复数的几何意义,给出直观的几何解答.

所谓复数方法,是指通过构造复数,利用复数的相关知识来解答一些非复数问题的方法.从数学问题的结构上去观察、去发现、去挖掘,寻找问题与复数知识的联系,构建复数知识解答问题的思维程序.例如:由距离联想到复数的模,由角度想到复数的三角形式,由图形的旋转想到复数乘法的几何意义,如此等等.应用复数方法可以解答某些数学问题,诸如:证明不等式,解答三角题,解决几何问题等等.特别是平面几何问题,它是数学竞赛当中常考常新的话题之一,对其中的一些问题用复数方法去解答就显得比较简明,这充分说明了用复数方法解决问题的实效性.

本书中的各节次之间既有联系,又相对独立,读者在阅读时,不必依照书的节次顺序,你可以先阅读一些自己感兴趣的内容,也可以先阅读节次前的知识概要,对于一些难度较大的问题,建议你放一放,等你系统学习了复数的有关知识以后,再反过来去阅读、去思考、去演练.学贵于思,思在于疑,解答数学问题时,既要知道"是什么"(解题知识),还要明白"为什么"(解题能力),更要反思"还有什么"(解题潜能),只要坚持这样持续的训练,将会逐

步提高你的分析问题和解决问题的能力.

本书可供高中、师范院校数学系的师生和奥林匹克数学爱好者阅读.限于作者水平,书中谬误在所难免,敬请读者不吝指正.

安振平

2004年9月

目录

1 复数的概念

对于最简单的二次方程

$$x^2 + 1 = 0,$$

在实数集范围内就没有解，因为对于任意实数 x 而言，x^2+1 的值总是正的. 为了求解这类方程的需要，就得将实数集加以扩张. 首先，引进一个“新数”i，使它满足

$$\mathrm{i}^2 = -1,$$

即 i 适合方程 $x^2+1=0$. 这个新数 i 就叫做虚数单位. 将 i 添加到实数集中去，定义：

形如

$$z = a + b\mathrm{i}\ (\text{其中 } a\text{、}b \text{ 均是实数})$$

的表达式称为一个复数. 其中的 a 和 b 分别叫做复数 z 的实部和虚部，分别记作

$$a = \mathrm{Re}(z),\ b = \mathrm{Im}(z).$$

一、复数 $z = a + b\mathrm{i}(a,\ b \in \mathbf{R})$ 的分类

当虚部 $b = 0$ 时，复数 z 是实数；

当虚部 $b \neq 0$，且实部 $a = 0$ 时，复数 z 是纯虚数；

当虚部 $b \neq 0$，且实部 $a \neq 0$，复数 z 是非纯虚数.

如果记：

R——实数集　　　　**C**——复数集

P——虚数集　　　　**Q**——纯虚数集

就有关系

$$\mathbf{R} \cap \mathbf{P} = \varnothing \qquad \mathbf{R} \cup \mathbf{P} = \mathbf{C} \qquad \mathbf{Q} \subsetneqq \mathbf{P} \subsetneqq \mathbf{C}$$

二、复数的几何形式

复数 $a+b\mathrm{i}$ $(a, b \in \mathbf{R})$ 与复平面上的点 $Z(a, b)$是一一对应的，并且点 $Z(a, b)$又和向量$\overrightarrow{OZ}$构成一一对应关系，从而说明点 Z 和向量$\overrightarrow{OZ}$均是复数 $z=a+b\mathrm{i}$ 的几何形式.

复数 $z=a+b\mathrm{i}$ $(a, b \in \mathbf{R})$ $\leftrightarrow$ 点 $Z(a, b)$ $\leftrightarrow$ 向量$\overrightarrow{OZ}$

这种对应关系的构建，揭示了复数问题与向量问题之间的相互转化，指出了向量方法是解决复数问题的一条有效途径.

三、复数相等的充要条件

对于两个复数 $z_1=a+b\mathrm{i}$ $(a, b \in \mathbf{R})$，$z_2=c+d\mathrm{i}$ $(c, d \in \mathbf{R})$，二者相等的充要条件是

$$a=c, \text{且 } b=d.$$

也就是

$$a+b\mathrm{i}=c+d\mathrm{i} \Leftrightarrow \begin{cases} a=c, \\ b=d. \end{cases}$$

复数相等的充要条件是复数问题化归为实数问题的理论依据，看来，“化虚为实”应是解答复数问题的通性通法.

例 1　m 分别取何实数时，复数

$$z=\frac{m^2-m-6}{m+3}+(m^2-2m-15)\mathrm{i}$$

是

(1) 实数；

(2) 虚数；

(3) 纯虚数.

分析与解　显然复数 z 是代数形式 $a+b\mathrm{i}$ $(a, b \in \mathbf{R})$ 呈现的，因而，只

要依据复数的分类来求实数 m 的值.

$$\mathrm{Re}(z)=\frac{m^2-m-6}{m+3}=\frac{(m+2)(m-3)}{m+3},$$

$$\mathrm{Im}(z)=m^2-2m-15=(m-5)(m+3).$$

(1) 要使复数 z 为实数,只要

$$\begin{cases}(m-5)(m+3)=0,\\ m+3\neq 0,\end{cases}$$

从而,当 $m=5$ 时,复数 z 是实数.

(2) 要使复数 z 为虚数,只要

$$(m-5)(m+3)\neq 0,$$

从而,当 $m\neq 5$ 且 $m\neq -3$ 时,复数 z 是虚数.

(3) 要使复数 z 为纯虚数,只要

$$\begin{cases}\dfrac{(m+2)(m-3)}{m+3}=0,\\ (m-5)(m+3)\neq 0,\end{cases}$$

于是,当 $m=-2$ 或 $m=3$ 时,复数 z 是纯虚数.

注 在本题的求解过程中,不可忽视"$m+3\neq 0$"的情形,否则,复数 z 无意义.

例 2 是否存在这样的正整数 n,使复数

$$z=\left(\frac{3}{\dfrac{3}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}}\right)^n$$

是纯虚数?若存在,求出正整数 n 的值;若不存在,请说明理由.

分析与解 注意到复数 z 当中似乎隐含有 $w=-\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$, 于是,可先对 z 进行必要的化归.

因为
$$z=\left(\frac{3-\sqrt{3}\mathrm{i}}{2}\right)^n$$

$$=\left[\sqrt{3}\mathrm{i}\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right)\right]^n$$

$$= (\sqrt{3})^n (\mathrm{i})^n w^n,$$

所以,当 $n = 3k\ (k \in \mathbf{N}^*)$ 时,复数 $z = \pm(\sqrt{3})^n \mathrm{i}$ 是纯虚数.

注 $w = -\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$ 是 1 的一个立方虚根.

例 3 设 a、b、c 是正整数,且满足关系式

$$c = (a + b\mathrm{i})^3 - 107\mathrm{i},$$

试求 c 的值.

分析与解 因为 c 是正整数,所以 c 为实数. 于是由

$$c = (a^3 - 3ab^2) + (3a^2b - b^3 - 107)\mathrm{i},$$

得
$$3a^2b - b^3 - 107 = 0,$$

即
$$b(3a^2 - b^2) = 107.$$

由于 107 是质数,从而

$$\begin{cases} b = 1, \\ 3a^2 - b^2 = 107, \end{cases}$$

或
$$\begin{cases} b = 107, \\ 3a^2 - b^2 = 1. \end{cases}$$

经计算得 $a = 6$, $b = 1$.

故 $c = a^3 - 3ab^2 = 198$.

例 4 实数 m 取何值时,复数

$$z = (-m^2 - 3m + 4) + m(m + 4)\mathrm{i}$$

所对应的点位于

(1) 虚轴上;

(2) 第二象限;

(3) 实轴的下方(不包括实轴).

分析与解 将题设条件转化为不等式组或混合组后进行求解.

(1) 当复数 z 所对应的点位于虚轴上时,必有

$$\begin{cases} -m^2 - 3m + 4 = 0, \\ m(m + 4) \neq 0, \end{cases}$$

即
$$\begin{cases} m=1 \text{ 或 } m=-4, \\ m\neq 0 \text{ 且 } m\neq -4, \end{cases}$$

所以 $m=1$.

故当 $m=1$ 时，复数 z 所对应的点在虚轴上.

(2) 当复数 z 所对应的点位于第二象限内时，必有

$$\begin{cases} -m^2-3m+4<0, \\ m(m+4)>0, \end{cases}$$

即
$$\begin{cases} m<-4 \text{ 或 } m>1, \\ m<-4 \text{ 或 } m>0, \end{cases}$$

所以 $m<-4$ 或 $m>1$.

故当 $m<-4$ 或 $m>1$ 时，复数 z 所对应的点在第二象限.

(3) 依据题意，可得

$$m(m+4)<0,$$

解出
$$-4<m<0.$$

故当 $-4<m<0$ 时，复数 z 所对应的点在实轴的下方.

注 表示实数的点集是实轴所在的直线；表示虚数的点集是除实轴以外的复平面.

例5 下面两个命题：

(1) 设 a、b、c 是复数，如果 $a^2+b^2>c^2$，那么 $a^2+b^2-c^2>0$；

(2) 设 a、b、c 是复数，如果 $a^2+b^2-c^2>0$，那么 $a^2+b^2>c^2$.

都是真命题吗？请说明理由.（全国高中数学联赛试题）

分析与解 本题是数的大小比较问题，关键要看两数是否都是实数.

命题(1)是真命题.

事实上，由 $a^2+b^2>c^2$ 可知 a^2+b^2、c^2 均是实数，从而，根据移项法则立得 $a^2+b^2-c^2>0$.

命题(2)是假命题.

事实上，由 $a^2+b^2-c^2>0$ 仅能说明 $a^2+b^2-c^2$ 是实数，而不能保证 a^2+b^2 和 c^2 均是实数，也就是说，$a^2+b^2>c^2$ 不一定成立.

对于命题(2)，我们亦可以通过举反例加以解决.

一方面，取 $a=1+\mathrm{i}$, $b=1-\mathrm{i}$, $c=\mathrm{i}$, 则有

$$a^2+b^2-c^2=(1+\mathrm{i})^2+(1-\mathrm{i})^2-\mathrm{i}^2=1>0,$$

$$a^2+b^2=(1+\mathrm{i})^2+(1-\mathrm{i})^2=0>-1=\mathrm{i}^2=c^2.$$

另一方面，取 $a=\mathrm{i}$, $b=2+\mathrm{i}$, $c=\sqrt{2}+\sqrt{2}\mathrm{i}$, 则有

$$\begin{aligned}a^2+b^2-c^2&=\mathrm{i}^2+(2+\mathrm{i})^2-(\sqrt{2}+\sqrt{2}\mathrm{i})^2\\&=2>0,\end{aligned}$$

但由 $$a^2+b^2=2+4\mathrm{i},\ c^2=4\mathrm{i},$$

可知 $a^2+b^2>c^2$ 不能成立.

例 6 已知关于 x 的二次方程

$$x^2+(2+\mathrm{i})x+4ab+(2a-b)\mathrm{i}=0\ (a,\ b\in\mathbf{R}).$$

(1) 当方程有实根时，求点 $(a,\ b)$ 的轨迹；

(2) 求方程实数根的取值范围.

分析与解 将方程的实根 x_0 代入，可得关于 a、b、x_0 的方程组，再消去 x_0，便得点 $(a,\ b)$ 的轨迹方程.

(1) 设原方程的实根为 x_0，则

$$x_0^2+(2+\mathrm{i})x_0+4ab+(2a-b)\mathrm{i}=0,$$

$$(x_0^2+2x_0+4ab)+(x_0+2a-b)\mathrm{i}=0.$$

于是，由两复数相等的充要条件，得

$$\begin{cases}x_0^2+2x_0+4ab=0, & ①\\ x_0+2a-b=0. & ②\end{cases}$$

由②，得 $x_0=b-2a$，代入①，得

$$(b-2a)^2+2(b-2a)+4ab=0,$$

$$(2a-1)^2+(b+1)^2=2,$$

即 $$\frac{\left(a-\frac{1}{2}\right)^2}{\frac{1}{2}}+\frac{(b+1)^2}{2}=1.$$

故所求点 $(a,\ b)$ 的轨迹是以 $\left(\frac{1}{2},\ -1\right)$ 为中心，以 $\left(\frac{1}{2},\ -\frac{\sqrt{6}}{2}-1\right)$ 和

$\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{6}}{2}-1\right)$为焦点的椭圆.

(2) 由②得 $b = x_0 + 2a$，代入①消去 b,得

$$x_0^2 + 2x_0 + 4a(x_0 + 2a) = 0,$$

即得关于 a 的一元二次方程

$$8a^2 + 4x_0 a + (x_0^2 + 2x_0) = 0.$$

因为 $a \in \mathbf{R}$,所以 $\Delta = 16x_0^2 - 32(x_0^2 + 2x_0) \geqslant 0$,

即 $$x_0(x_0 + 4) \leqslant 0,$$

解得 $$-4 \leqslant x_0 \leqslant 0.$$

故原方程实数根的取值范围是$[-4, 0]$.

注 对于第(2)小题,建立关于实数 b 的二次方程,可以求解吗?试试看.

习 题 1

1 若 z_1、z_2、$z_3 \in \mathbf{C}$,则 $z_1 = z_2 = z_3$ 是$(z_1 - z_2)^2 + (z_2 - z_3)^2 = 0$ 成立的(　　).

(A) 充分但不必要条件　　(B) 必要但不充分条件

(C) 充分且必要条件　　(D) 既不充分也不必要条件

2 若 $t \in \mathbf{R}$,则复数 $z = \frac{1 - t^2 + 2t\mathrm{i}}{1 + t^2}$ 所对应的点组成的图形是(　　).

(A) 单位圆　　(B) 单位圆除去点$(\pm 1, 0)$

(C) 单位圆除去点$(1, 0)$　　(D) 单位圆除去点$(-1, 0)$

3 若 A、B 是锐角$\triangle ABC$ 的两个内角,则复数

$$z = (\cos B - \sin A) + \mathrm{i}(\sin B - \cos A)$$

在复平面内所对应的点位于(　　).

(A) 第一象限　　(B) 第二象限

(C) 第三象限　　(D) 第四象限

(全国高中数学联赛试题)

4 已知复数 z_1、z_2 满足 $10z_1^2+5z_2^2=2z_1z_2$，且 z_1+2z_2 为纯虚数，求证：复数 $3z_1-z_2$ 是实数.

5 试求满足

$$\frac{2x+\mathrm{i}}{y+\mathrm{i}}=\frac{1+\mathrm{i}\tan\theta}{1-\mathrm{i}\tan\theta}$$

的实数 x、y，其中 θ 是不等于 $n\pi+\frac{\pi}{2}$ (n 是整数)的常数.

6 已知非零复数 a、b、c 满足 $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}=\frac{c}{a}$，试求$\frac{a+b-c}{a-b+c}$的值.（全国高中数学联赛试题）

7 已知 $a\in\mathbf{R}$，试问：复数

$$z=(a^2-2a+4)-(a^2-2a+2)\mathrm{i}$$

所对应的点在第几象限？复数 z 所对应点的轨迹是什么？

8 已知 $z\in\mathbf{C}$，关于 x 的一元二次方程

$$x^2-zx+4+3\mathrm{i}=0$$

有实根，求使复数 z 的模取得最小值时的复数 z.

2 复数的代数运算

代数形式是复数的表示形式之一，本讲着重研究复数代数形式的四则运算和共轭复数的若干性质.

一、复数的运算法则

对于两个复数 $a+b\mathrm{i}$、$c+d\mathrm{i}$ (a、b、c、$d\in\mathbf{R}$).

加法：$(a+b\mathrm{i})+(c+d\mathrm{i})=(a+c)+(b+d)\mathrm{i}$;

减法：$(a+b\mathrm{i})-(c+d\mathrm{i})=(a-c)+(b-d)\mathrm{i}$;

乘法：$(a+b\mathrm{i})(c+d\mathrm{i})=(ac-bd)+(bc+ad)\mathrm{i}$;

除法：$\dfrac{a+b\mathrm{i}}{c+d\mathrm{i}}=\dfrac{ac+bd}{c^2+d^2}+\dfrac{bc-ad}{c^2+d^2}\mathrm{i}\ (c+d\mathrm{i}\neq 0)$.

二、复数的运算定律

复数的加法满足交换律、结合律，也就是说，对于任何复数 z_1、z_2、z_3，均有

$$z_1+z_2=z_2+z_1,$$

$$(z_1+z_2)+z_3=z_1+(z_2+z_3).$$

复数的乘法满足交换律、结合律，以及乘法对于加法的分配律. 也就是说，对于任何复数 z_1、z_2、z_3，均有

$$z_1z_2=z_2z_1;$$

$$(z_1z_2)z_3=z_1(z_2z_3);$$

$$z_1(z_2+z_3)=z_1z_2+z_1z_3.$$

三、共轭复数的性质

当两个复数的实部相等，虚部互为相反数时，就称其互为共轭复数. 特