主 编 朱祥和

普通高等院校数学类课程教材

线性代数及应用学习指导

XIANXING DAISHU JI YINGYONG XUEXI ZHIDAO

华中科技大学出版社
http://www.hustp.com

线性代数及应用学习指导

主　编　朱祥和
副主编　龙　松　叶牡才

华中科技大学出版社
中国·武汉

内容简介

本书是与朱祥和主编的《线性代数及应用》教材相配套的学习辅导书籍，主要面向使用该教材的教师和学生，同时也可供报考硕士研究生的学生复习使用.

本书的内容按章编写，每章包括七个部分，分别是教学基本要求、内容提要、疑难解析、典型例题、课后习题解析、考研真题解析、自测题.课后习题解析基本与教材同步.疑难解析与典型例题是本书的重点所在，它是学生自学的极好的材料.通过对内容和方法进行总结归纳，把基本理论、基本方法、解题技巧、疑难解析、数学应用等多方面的教学要求融于典型方法与例题中，并注重对教材的内容作适当的扩展和延伸，注意数学与应用的有机结合.考研真题解析部分选自历年的研究生入学考试的典型题目，并给出了相应的参考答案.每章最后有自测题供学生自测和复习之用.

本书内容丰富，思路清晰，例题典型，注重分析解题思路，揭示解题规律，引导读者思考问题，对培养和提高学生的学习兴趣以及分析问题和解决问题的能力能起到较大的作用.

图书在版编目(CIP)数据

线性代数及应用学习指导/朱祥和主编.—武汉：华中科技大学出版社，2016.8
ISBN 978-7-5680-1983-5

Ⅰ.①线…　Ⅱ.①朱…　Ⅲ.①线性代数-高等学校-习题集　Ⅳ.①O151.2-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2016)第 144884 号

线性代数及应用学习指导
Xianxing Daishu ji Yingyong Xuexi Zhidao
朱祥和　主编

策划编辑：谢燕群
责任编辑：余　涛
封面设计：原色设计
责任校对：何　欢
责任监印：周治超
出版发行：华中科技大学出版社(中国·武汉)
武昌喻家山　邮编：430074　电话：(027)81321913
录　　排：武汉市洪山区佳年华文印部
印　　刷：武汉鑫昶文化有限公司
开　　本：710mm×1000mm　1/16
印　　张：19
字　　数：392 千字
版　　次：2016 年 8 月第 1 版第 1 次印刷
定　　价：39.80 元

华中出版

本书若有印装质量问题，请向出版社营销中心调换
全国免费服务热线：400-6679-118　竭诚为您服务

前　言

本书是与《线性代数及应用》相配套的学习辅导书，按《线性代数及应用》的章节顺序逐章编写，每章包括以下几个部分内容：

一、教学基本要求：主要根据教育部高教司颁发的《工科类本科数学基础课程教学基本要求》确定，同时也根据当前的教学实际作了少许修改并细化.

二、内容提要：归纳本章的主要知识点.

三、疑难解析：针对本章的重点内容和较难理解的内容，以及学生在学习本章时常常问及的一些共性问题，编选出若干个问题并予以分析、解答，以帮助读者进行疑难解析并加深理解.

四、典型例题：对教材中的例题进行适当补充，分析其解题思路、所用的原理和方法，说明该例的意义或引申到一般化的结论.

五、课后习题解析：对教材中大部分习题作出解答.

六、考研真题解析：针对考研学生，列出相应章节的考研真题，有针对性地分析重难点.

七、自测题：每章给出自测题，满足读者练习的需要.

本书由朱祥和任主编，龙松、叶牡才任副主编，参与编写的还有徐彬、张丹丹、沈小芳、张文钢、张秋颖、李春桃等，在此，对他们的工作表示感谢！

在教材的编写过程中，多次与华中科技大学齐欢教授、中国地质大学谢兴武教授、第二炮兵指挥学院阎国辉副教授进行了讨论，他们提出了许多宝贵的意见，对本书的编写与出版产生了十分积极的影响，在此表示由衷的感谢！

在教材的编写中参考的相关书籍均列于书后的参考文献中，在此也向有关作者表示感谢！

最后，再次向所有支持和帮助过本书编写和出版的单位和个人表示衷心的感谢.

由于作者水平的限制，书中的错误和缺点在所难免，欢迎广大读者批评与指教.

编　者
2016.4

目　录

第一章 行 列 式

一、教学基本要求

(1) 会用对角线法则计算二阶和三阶行列式.

(2) 了解 n 阶行列式的定义、代数余子式的定义,会运用 n 阶行列式的性质和代数余子式的性质,会运用按行(列)展开计算简单的 n 阶行列式.

(3) 了解克拉默法则.

二、内容提要

1. 排列

(1) 由数字 $1,2,3,\cdots,n$ 组成的有序数组 $i_1i_2i_3\cdots i_n$ 称为一个 n 元排列,简称为排列.特别地,n 元排列 $123\cdots n$ 称为 n 元自然排列或标准排列.

(2) 在一个 n 元排列 $i_1i_2i_3\cdots i_s\cdots i_t\cdots i_n$ 中($s<t$)的两个数字 i_s,i_t,如果 $i_s>i_t$,则称它们构成一个逆序.排列 $i_1i_2i_3\cdots i_n$ 中全部逆序的总个数称为排列的逆序数,记作 $\tau[i_1i_2i_3\cdots i_n]$.

(3) 求排列的逆序数的方法.

对排列 $i_1i_2i_3\cdots i_n$,从右至左先计算排在最后一位数字 i_n 的逆序数,等于排在 i_n 前面且比 i_n 大的数字的个数,再计算 $i_{n-1}\cdots i_2$ 的逆序数,然后把所有数字的逆序数加起来,就是该排列的逆序数.

(4) 逆序数为偶数的排列称为偶排列,逆序数为奇数的排列称为奇排列.

2. 行列式定义

由 n^2 个数 $a_{ij}(i=1,2,\cdots,n;j=1,2,\cdots,n)$ 排成的 n 行 n 列

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为 n 阶行列式(其中 a_{ij} 表示第 i 行第 j 列位置的数,称为第 i 行第 j 列元素),它表示所有取值不同行、不同列的 n 个数的乘积并按照如下方法带上正号或负号的代数和:每项乘积中的 n 个数按行号排成标准排列时,其列号排列的奇偶性决定该项的符号,列下标为奇排列时取负号,偶排列时取正号,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum (-1)^{\tau(p_1 p_2 \cdots p_n)} a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n}$$

其中,求和 $\sum$ 取遍所有 n 元排列 $p_1 p_2 \cdots p_n$. 特别地,当 $n=1$ 时,规定一阶行列式 $|a_{11}|=a_{11}$.

行列式有时也简记作 $|a_{ij}|$ 或 $\det(\mathbf{A})$,其值是一个数.

行列式的等价定义 n 阶行列式 $|a_{ij}|$ 可定义为

$$\sum (-1)^{\tau} a_{q_1 1} a_{q_2 2} \cdots a_{q_n n}$$

这是一个将各项乘积中的 n 个数按列号排成标准排列,其行号排列的奇偶性确定该项的符号的定义.

3. 行列式的基本性质

(1) 将行列式转置,行列式的值不变.

转置变形:把行列式的行与列互换,即把原来在第 i 行第 j 列位置的元素换到第 j 行第 i 列上去,所得到的行列式称为原来行列式的转置行列式,记 D 的转置行列式为 D^{T} 或 D'.

(2) 行列式的初等变换及其性质.

① 换行:第 i 行与第 j 行交换,记作 $r_i \leftrightarrow r_j$.

换列:第 i 列与第 j 列交换,记作 $c_i \leftrightarrow c_j$.

② 倍行:第 i 行 k 倍,记作 kr_i.

倍列:第 i 列 k 倍,记作 kc_i.

③ 倍行加:第 j 行 l 倍加到第 i 行上去,记作 $r_i + lr_j$.

倍列加:第 j 列 l 倍加到第 i 列上去,记作 $c_i + lc_j$.

注意:a. 第三种初等变换的记号按规定不能写成 $lr_j + r_i$, $lc_j + c_i$;

b. k, l 为 -1 时,可以直接写成 $-r_i$, $-c_i$, $r_i - r_j$, $c_i - c_j$;

c. $l<0$, $l=-l_1$ 时,$r_i - l_1 r_j$ 可看成第 i 行减去第 j 行的 l_1 倍,$c_j - l_1 c_i$ 可看成第 j 列减去第 i 列的 l_1 倍;

d. $l=1$ 时,$r_i + r_j \neq r_j + r_i$, $c_j + c_i \neq c_i + c_j$.

规定:a. 每次变形对每个元素至多只能改变一次;

b. 每次变形所做的多个初等变换按从上往下的次序.

行列式的初等变换性质:

① 换行,值反号;

② 倍行,倍值;

③ 倍行加,值不变.

(3) 提取一行公因子，即可以把行列式中某一行所有元素的公因子提取出来放到行列式外面作为因子.

(4) 具有如下特征之一的行列式，其值为 0.

① 有一行元素全为 0；

② 有两行元素对应相等；

③ 有两行元素对应成比例.

(5) 拆行拆值，即把一个行列式的某一行拆开成两行所得到的两个行列式的值之和就等于原行列式的值.

(6) 展开性质.

① 在 n 阶行列式 $|a_{ij}|$ 中，划去元素 a_{ij} 所在的第 i 行和第 j 列后，余下的元素按原来的相对位置排成的 $n-1$ 阶行列式称为 a_{ij} 的余子式，记作 M_{ij}，则 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$，称 A_{ij} 为 a_{ij} 的代数余子式.

② n 阶行列式 $D=|a_{ij}|$ 等于任一行（列）的元素与其对应的代数余子式乘积之和，即

$$D=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in},\quad i=1,2,\cdots,n$$

③ n 阶行列式 $D=|a_{ij}|$ 中，任一行（列）的元素与另一行（列）中对应元素代数余子式的乘积之和等于 0，即 $a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=0, i\neq j$.

4. 克拉默法则

(1) 如果 n 元 n 个方程的线性方程

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \qquad\qquad\vdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n \end{cases}$$

的系数行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

满足条件 $D\neq 0$，则其有且仅有一组解，并且这组解满足公式 $x_j=\dfrac{D_j}{D}, j=1,2,\cdots,n$.

其中，$D_j=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,j-1} & b_2 & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & b_n & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$，即是以常数项取代 D 中 x_j 的系

数得到的,称为分子行列式.

(2) 如果 n 元 n 个方程的齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\vdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=0 \end{cases}$$

的系数行列式 $D=|a_{ij}|\neq0$,则其只有零解.反过来说,如果上述齐次线性方程组有非零解,则其系数行列式 $D=|a_{ij}|=0$.

三、疑难解析

1. 计算 n 元排列的逆序数通常有哪些方法?

答 常用下面两种方法.

法一:分别算出排在 $1,2,\cdots,n$ 前面比它大的数的个数之和,即逐一算出 $1,2,\cdots,n$ 这 n 个元素的逆序数,这 n 个元素的逆序数之总和即为所求 n 元排列的逆序数.

法二:从右边起,分别算出排列中每个元素前面比它大的数的个数之和,即算出排列中每个元素的逆序数,这每个元素的逆序数之总和即为所求逆序数.

2. 为什么 $n(n\geqslant4)$ 阶行列式不能按对角线法则展开?

答 二阶、三阶行列式可以按对角线展开,而四阶及四阶以上的行列式不能按对角线展开,因为它不符合 $n(n\geqslant4)$ 阶行列式的定义.例如,对于四阶行列式,如果按对角线法则,则只能写出 8 项,这显然是错误的,按照行列式的定义,四阶行列式一共有 $4!$ 项;另外,按对角线作出的项的符号也不一定正确.

3. 计算行列式的常用方法有哪些?

答 计算行列式的方法通常可以归纳如下.

法一:用对角线法则计算行列式,但仅适用于计算二阶、三阶行列式.

法二:用 n 阶行列式的定义计算行列式.

法三:利用行列式的性质计算行列式.

法四:利用行列式按某一行(列)展开定理计算 n 阶行列式(降阶法).

法五:利用数学归纳法计算行列式.

法六:利用递推公式计算行列式.

法七:利用范德蒙行列式的结论计算特殊的行列式.

法八:利用加边法计算行列式(升阶法).

法九:化三角形法计算 n 阶行列式.

法十:综合运用上述各法来计算行列式.

四、典型例题

例 1 行列式

$$D_1=\begin{vmatrix}1&3&1\\2&2&3\\3&1&5\end{vmatrix},\quad D_2=\begin{vmatrix}\lambda&0&1\\0&\lambda-1&0\\1&0&\lambda\end{vmatrix}.$$

若 $D_1=D_2$,则 λ 的取值为(　　).

A. 0,1　　B. 0,2　　C. 1,−1　　D. 2,−1

解 按三阶行列式的对角线法则,有

$$D_1=10+2+27-6-30-3=0,\quad D_2=\lambda^2(\lambda-1)-(\lambda-1)=(\lambda+1)(\lambda-1)^2.$$

若 $D_1=D_2$,则$(\lambda+1)(\lambda-1)^2=0$,解得 $\lambda_1=-1$ 或 $\lambda_2=1$. 选 C.

例 2 排列 134782695 的逆序数是(　　).

A. 9　　B. 10　　C. 11　　D. 12

解 $\tau(134782695)=4+0+2+4+0+0+0+0+0=10$. 选 B.

例 3 下列排列中(　　)是偶排列.

A. 4312　　B. 51432　　C. 45312　　D. 654321

解 $\tau(4312)=5,\tau(51432)=7,\tau(45312)=8,\tau(654321)=15$. 选 C.

例 4 在六阶行列式中,对应项

$$a_{23}a_{31}a_{42}a_{56}a_{14}a_{65},\quad a_{32}a_{43}a_{14}a_{51}a_{66}a_{25}$$

各应带什么符号?

解一 对换项中的元素,使每项所对应的行标为标准次序,即把所给的两项调成

$$a_{14}a_{23}a_{31}a_{42}a_{56}a_{65}\text{ 及 }a_{14}a_{25}a_{32}a_{43}a_{51}a_{66}$$

这两项列标所组成的排列分别为

$$431265\text{ 及 }452316$$

它们的逆序数分别为 6 与 8,均为偶排列,故所给的两项在六阶行列式中均应带正号.

解二 分别算出两项行标及列标排列的逆序数,即算出排列

$$234516,312645 \qquad ①$$

$$341562,234165 \qquad ②$$

的逆序数.

由于①中两个排列的逆序数都是 4,且这两个排列的逆序数之和为偶数,故所给的前一项应带正号.

由于②中两个排列的逆序数依次为 6,4,且这两个排列的逆序数之和为偶数,故所给的后一项也应带正号.

解二是将所给项的行标和列标按已给的排列,求其行标排列与列标排列的逆序

数之和. 此和为奇数则该项带负号,此和为偶数则该项带正号.

例 5 写出五阶行列式 $D_5=|a_{ij}|$ 中包含 a_{13},a_{25},并带正号的项.

解 D_5 中包含 a_{13} 及 a_{25} 的所有项数为五元排列 $35j_3j_4j_5$ 的个数,因 j_3,j_4,j_5 所取的排列是 1,2,4 这三个数码所取的 6 个全排列,因而 $35j_3j_4j_5$ 能组成的五元排列共有 6 个,即

$$35124;35142;35214;35241;35412;35421$$

相应的项分别为

$$(-1)^{\tau(35124)}a_{13}a_{25}a_{31}a_{42}a_{54}=-a_{13}a_{25}a_{31}a_{42}a_{54}$$
$$(-1)^{\tau(35142)}a_{13}a_{25}a_{31}a_{44}a_{52}=a_{13}a_{25}a_{31}a_{44}a_{52}$$
$$(-1)^{\tau(35214)}a_{13}a_{25}a_{32}a_{41}a_{54}=a_{13}a_{25}a_{32}a_{41}a_{54}$$
$$(-1)^{\tau(35241)}a_{13}a_{25}a_{32}a_{44}a_{51}=-a_{13}a_{25}a_{32}a_{44}a_{51}$$
$$(-1)^{\tau(35412)}a_{13}a_{25}a_{34}a_{41}a_{52}=-a_{13}a_{25}a_{34}a_{41}a_{52}$$
$$(-1)^{\tau(35421)}a_{13}a_{25}a_{34}a_{42}a_{51}=a_{13}a_{25}a_{34}a_{42}a_{51}$$

故包含 a_{13},a_{25},并带正号的所有项为

$$a_{13}a_{25}a_{31}a_{44}a_{52}, \quad a_{13}a_{25}a_{32}a_{41}a_{54}, \quad a_{13}a_{25}a_{34}a_{42}a_{51}$$

例 6 计算下列排列的逆序数,并讨论奇偶性.

(1) $n(n-1)\cdots21$;　(2) $135\cdots(2n-1)2n(2n-2)\cdots42$.

解 (1) $\tau(n(n-1)\cdots21)=(n-1)+(n-2)+\cdots+2+1+0=\dfrac{n(n-1)}{2}$,该排列当 $n=4k$,$n=4k+1$ 时为偶排列,当 $n=4k+2$,$n=4k+3$ 时为奇排列.

(2) 对于排列 $135\cdots(2n-1)2n(2n-2)\cdots42$ 中,前面 n 个数字 $13\cdots(2n-1)$ 为顺序排法,只考虑后 n 个偶数的逆序数就行了,故 $\tau(13\cdots(2n-1)2n(2n-2)\cdots42)=0+2+4+\cdots+(2n-2)=2(1+2+\cdots+n-1)=n(n-1)$,无论 n 为奇数或偶数,$n(n-1)$ 为偶数,故该排列为偶排列.

例 7 用定义计算五阶行列式:

$$D_5=\begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ 0 & a_{42} & a_{43} & 0 & 0 \\ 0 & a_{52} & a_{53} & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

其中,第 2,3 行及第 2,3 列上的元素都不等于零.

解 D_5 中各行非零元素的列标分别可取以下各值:

$$p_1=2,3;\quad p_2=1,2,3,4,5;\quad p_3=1,2,3,4,5;\quad p_4=2,3;\quad p_5=2,3$$

在上述可能取的数值中,不能组成任何一个五元排列 $p_1p_2p_3p_4p_5$,即 D_5 的每项 5 个元素中,必至少含有一个零元素,由行列式的定义可知,$D_5=0$.

例 8 计算 n 阶行列式：

$$D_n=\begin{vmatrix}0&0&\cdots&0&a_1&0\\0&0&\cdots&a_2&0&0\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots&\vdots\\0&a_{n-2}&\cdots&0&0&0\\a_{n-1}&0&\cdots&0&0&0\\0&0&\cdots&0&0&a_n\end{vmatrix}$$

其中，$a_i\neq 0(i=1,2,\cdots,n)$.

解 因为该行列式中每一行及每一列只有一个非零元素，由 n 阶行列式定义知，D_n 只含一项 $a_1a_2\cdots a_{n-2}a_{n-1}a_n$，其中元素的下标正好是它们所在行的下标，已是一个标准排列. 而它们所在列的下标构成的排列为 $(n-1)(n-2)\cdots 2\cdot 1\cdot n$，这个排列的逆序数

$$\tau[(n-1)(n-2)\cdots 2\cdot 1\cdot n]=\frac{(n-1)(n-2)}{2}$$

故

$$D_n=(-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}a_1a_2\cdots a_{n-2}\cdot a_{n-1}\cdot a_n$$

例 9 试求 $f(x)$ 中 x^4 的系数，已知

$$f(x)=\begin{vmatrix}-x&3&1&3&0\\x&3&2x&11&4\\-1&x&0&4&3x\\2&21&4&x&5\\1&-7x&3&-1&2\end{vmatrix}$$

解一 $f(x)$ 中含 x 为因子的元素有

$$a_{11}=-x,\quad a_{21}=x,\quad a_{23}=2x,\quad a_{32}=x,\quad a_{35}=3x,\quad a_{44}=x,\quad a_{52}=-7x$$

因而，含有 x 为因子的元素 a_{ij_i} 的列下标取

$$j_1=1;j_2=1,3;j_3=2,5;j_4=4;j_5=2$$

于是，含 x^4 的项中元素 a_{ij_i} 的列下标只能取

$$j_1=1,j_2=3,j_3=2,j_4=4 \text{ 与 } j_2=1,j_3=5,j_4=4,j_5=2$$

相应的五元排列只有 13245，31542. 含 x^4 的相应项为

$$(-1)^{\tau(13245)}a_{11}a_{23}a_{32}a_{44}a_{55}=4x^4$$

$$(-1)^{\tau(31542)}a_{13}a_{21}a_{35}a_{44}a_{52}=21x^4$$

故 $f(x)$ 中 x^4 的系数为 $21+4=25$.

解二 将 $f(x)$ 化成含 x 的元素位于不同行、不同列的行列式，于是将这些元素相乘，即可求出 x^4 的系数. 为此将 $a_{21}=x$ 及 $a_{32}=x$ 变成零元素，得到

$$f(x)=\begin{vmatrix} -x & 3 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 6 & 2x+1 & 14 & 4 \\ -6/7 & 0 & 3/7 & 27/7 & 3x+2/7 \\ 2 & 21 & 4 & x & 5 \\ 1 & -7x & 3 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

x^4 的系数是下列两项系数的和：

$$(-1)^{\tau(13542)}(-x)\cdot 1\cdot(3x)\cdot x\cdot(-7x)=21x^4$$

$$(-1)^{\tau(13542)}(-x)\cdot(2x)\cdot(2/7)\cdot x\cdot(-7x)=4x^4$$

故所求系数为 $21+4=25$.

解三 将 $f(x)$ 化成 x 只位于主对角线上的行列式.为此，将 $f(x)$ 的第 1 行加到第 2 行、第 5 行加上第 3 行的 7 倍，再将所得行列式的第 5 列减去第 2 列的 3 倍，最后将新行列式的第 2,3 行对调，得到

$$f(x)=-\begin{vmatrix} -x & 3 & 1 & 3 & -9 \\ -1 & x & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 6 & 2x+1 & 14 & -14 \\ 2 & 21 & 4 & x & -58 \\ -6 & 0 & 3 & 27 & 21x+2 \end{vmatrix}$$

含 x^4 的两项分别为

$$(-1)\cdot(-x)\cdot x\cdot(2x)\cdot x\cdot 2$$

$$(-1)\cdot(-x)\cdot x\cdot 1\cdot x\cdot(21x)$$

故 $f(x)$ 中含 x^4 的系数为 $4+21=25$.

例 10 计算下列行列式：

(1) $D_1=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 5 & 7 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{vmatrix}$； (2) $D_2=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$.

解 (1) 利用消元性质，将第 1 行的 -1 倍加到第 2,3,4 行上，再由第 2,3 行成比例，得

$$D_1=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & 3 & 9 & 19 \end{vmatrix}=0$$

(2) **分析** 此题属低阶行列式的计算.由于行列式除次对角线上的元素全为 0 外，其余元素均为 1，可据此特点化为上(或下)三角行列式，或利用各行(列)和都是 3 来化为三角行列式.

解一 $$\begin{vmatrix}1&1&1&0\\1&1&0&1\\1&0&1&1\\0&1&1&1\end{vmatrix}\xlongequal[i=2,3]{r_i-r_1}\begin{vmatrix}1&1&1&0\\0&0&-1&1\\0&-1&0&1\\0&1&1&1\end{vmatrix}\xlongequal{r_2\leftrightarrow r_3}-\begin{vmatrix}1&1&1&0\\0&-1&0&1\\0&0&-1&1\\0&1&1&1\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_4+r_2+r_3}-\begin{vmatrix}1&1&1&0\\0&-1&0&1\\0&0&-1&1\\0&0&0&3\end{vmatrix}=-3$$

解二 $$\begin{vmatrix}1&1&1&0\\1&1&0&1\\1&0&1&1\\0&1&1&1\end{vmatrix}\xlongequal{c_1+c_2+c_3+c_4}\begin{vmatrix}3&1&1&0\\3&1&0&1\\3&0&1&1\\3&1&1&1\end{vmatrix}=3\begin{vmatrix}1&1&1&0\\1&1&0&1\\1&0&1&1\\1&1&1&1\end{vmatrix}$$

$$=3\begin{vmatrix}1&1&1&0\\0&0&-1&1\\0&-1&0&1\\0&0&0&1\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_2\leftrightarrow r_3}-3\begin{vmatrix}1&1&1&0\\0&-1&0&1\\0&0&-1&1\\0&0&0&1\end{vmatrix}=-3$$

例 11 设 $abcd=1$,计算行列式

$$D=\begin{vmatrix}a^2+\frac{1}{a^2}&a&\frac{1}{a}&1\\b^2+\frac{1}{b^2}&b&\frac{1}{b}&1\\c^2+\frac{1}{c^2}&c&\frac{1}{c}&1\\d^2+\frac{1}{d^2}&d&\frac{1}{d}&1\end{vmatrix}$$

解 $$D=\begin{vmatrix}a^2&a&\frac{1}{a}&1\\b^2&b&\frac{1}{b}&1\\c^2&c&\frac{1}{c}&1\\d^2&d&\frac{1}{d}&1\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\frac{1}{a^2}&a&\frac{1}{a}&1\\\frac{1}{b^2}&b&\frac{1}{b}&1\\\frac{1}{c^2}&c&\frac{1}{c}&1\\\frac{1}{d^2}&d&\frac{1}{d}&1\end{vmatrix}$$

$$=abcd\begin{vmatrix} a & 1 & \frac{1}{a^2} & \frac{1}{a} \\ b & 1 & \frac{1}{b^2} & \frac{1}{b} \\ c & 1 & \frac{1}{c^2} & \frac{1}{c} \\ d & 1 & \frac{1}{d^2} & \frac{1}{d} \end{vmatrix}+(-1)^3\begin{vmatrix} a & 1 & \frac{1}{a^2} & \frac{1}{a} \\ b & 1 & \frac{1}{b^2} & \frac{1}{b} \\ c & 1 & \frac{1}{c^2} & \frac{1}{c} \\ d & 1 & \frac{1}{d^2} & \frac{1}{d} \end{vmatrix}=0$$

例 12 计算行列式

$$D=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & x-1 \\ 1 & -1 & 1+x & -1 \\ 1 & x-1 & 1 & -1 \\ 1+x & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

解 行列式每行元素之和都为 x,故把第 2,3,4 列都加到第 1 列上,提取因子.

$$D=\begin{vmatrix} x & -1 & 1 & x-1 \\ x & -1 & 1+x & -1 \\ x & x-1 & 1 & -1 \\ x & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}=x\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & x-1 \\ 1 & -1 & 1+x & -1 \\ 1 & x-1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

将第 1 行的 -1 倍加到各行上,得

$$D=x\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & x-1 \\ 0 & 0 & x & -x \\ 0 & x & 0 & -x \\ 0 & 0 & 0 & -x \end{vmatrix}=x^4\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & x-1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}=-x^4\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & x-1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}=x^4$$

例 13 计算 n 阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 2 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 2 \end{vmatrix}$$

解一 因为这个 n 阶行列式中每一列中的 n 个元素之和都为 $n+1$,所以将第 2,3,…,n 行元素都加到第 1 行上,得

$$D_n=\begin{vmatrix} n+1 & n+1 & n+1 & \cdots & n+1 \\ 1 & 2 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 2 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 2 \end{vmatrix}=(n+1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 2 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 2 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[i=2,3,\cdots,n]{r_i-r_1}(n+1)\begin{vmatrix}1&1&1&\cdots&1\\0&1&0&\cdots&0\\0&0&1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&0&\cdots&1\end{vmatrix}=n+1$$

解二 利用 n 阶行列式的性质化简.

$$D_n\xlongequal[i=2,3,\cdots,n]{r_i-r_1}\begin{vmatrix}2&1&1&\cdots&1\\-1&1&0&\cdots&0\\-1&0&1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\-1&0&0&\cdots&1\end{vmatrix}\xlongequal{c_1+c_2+\cdots+c_n}\begin{vmatrix}n+1&1&1&\cdots&1\\0&1&0&\cdots&0\\0&0&1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&0&\cdots&1\end{vmatrix}$$

$=n+1$

例 14 用行列式性质证明:

(1) $\begin{vmatrix}a_1+kb_1&b_1+c_1&c_1\\a_2+kb_2&b_2+c_2&c_2\\a_3+kb_3&b_3+c_3&c_3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_1&b_1&c_1\\a_2&b_2&c_2\\a_3&b_3&c_3\end{vmatrix}$;

(2) $\begin{vmatrix}b_1+c_1&c_1+a_1&a_1+b_1\\b_2+c_2&c_2+a_2&a_2+b_2\\b_3+c_3&c_3+a_3&a_3+b_3\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}a_1&b_1&c_1\\a_2&b_2&c_2\\a_3&b_3&c_3\end{vmatrix}$.

证 (1) **证一** 直接利用行列式性质从右边化到左边,即

$$\begin{vmatrix}a_1&b_1&c_1\\a_2&b_2&c_2\\a_3&b_3&c_3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_1+kb_1&b_1&c_1\\a_2+kb_2&b_2&c_2\\a_3+kb_3&b_3&c_3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_1+kb_1&b_1+c_1&c_1\\a_2+kb_2&b_2+c_2&c_2\\a_3+kb_3&b_3+c_3&c_3\end{vmatrix}$$

证二 在等式左端的行列式中去掉与第 3 列成比例的分列,再在新行列式中去掉与第 2 列成比例的分列,得到

$$\begin{vmatrix}a_1+kb_1&b_1+c_1&c_1\\a_2+kb_2&b_2+c_2&c_2\\a_3+kb_3&b_3+c_3&c_3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_1+kb_1&b_1&c_1\\a_2+kb_2&b_2&c_2\\a_3+kb_3&b_3&c_3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_1&b_1&c_1\\a_2&b_2&c_2\\a_3&b_3&c_3\end{vmatrix}$$

(2) 因左端行列式的各列均为两数的和,故可将它拆成两行列式之和,再利用去掉成比例的分列证之.

$$\begin{vmatrix}b_1+c_1&c_1+a_1&a_1+b_1\\b_2+c_2&c_2+a_2&a_2+b_2\\b_3+c_3&c_3+a_3&a_3+b_3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}b_1&c_1+a_1&a_1+b_1\\b_2&c_2+a_2&a_2+b_2\\b_3&c_3+a_3&a_3+b_3\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}c_1&c_1+a_1&a_1+b_1\\c_2&c_2+a_2&a_2+b_2\\c_3&c_3+a_3&a_3+b_3\end{vmatrix}$$