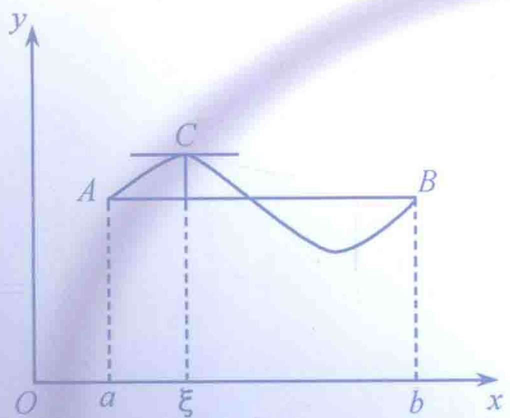
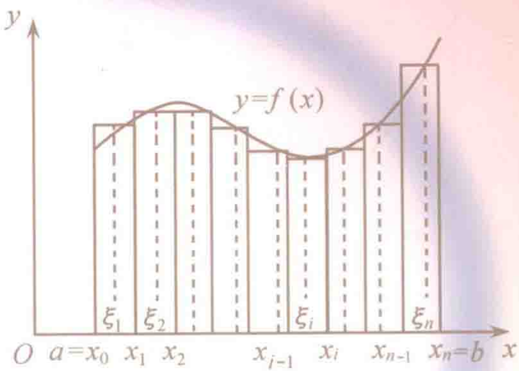
农林类高职高专基础课系列教材

高等数学学习指导（上册）

第2版

谢厚桂　张青娥　辛永清　主编





$$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0 \\ 0 \quad, & x^2+y^2=0 \end{cases}$$

中国林业出版社

农林类高职高专基础课系列教材

高等数学学习指导

（上册）

第2版

谢厚桂　张青娥　辛永清　主编

中国林业出版社

图书在版编目（CIP）数据

高等数学学习指导．上册/谢厚桂，张青娥，辛永清主编．—2 版．—北京：中国林业出版社，2005.8

（农林类高职高专基础课系列教材）

ISBN 7-5038-4042-0

Ⅰ．高…　Ⅱ．①谢…②张…③辛…　Ⅲ．高等数学—高等学校：技术学校—教学参考资料
Ⅳ．013

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2005）第 089821 号

出版　中国林业出版社（100009　北京西城区刘海胡同 7 号）
E-mail：cfphz@public.bta.net.cn　电话：66184477
网址　www.cfph.com.cn
发行　中国林业出版社
印刷　北京林业大学印刷厂
版次　2005 年 8 月第 2 版
印次　2005 年 8 月第 1 次
开本　787mm×960mm　1/16
印张　10.5
字数　200 千字
印数　1～5000 册

定价　16.00 元

《高等数学学习指导（上册）》
（第2版）
编委名单

主　编　谢厚桂　张青娥　辛永清

副主编　郝建民　耿相月　李　钧

编　者　（按姓氏笔画排序）

马建国　王　晨　王志武　李　钧

辛永清　张青娥　张勤英　闫宝英

郑瑞根　郝建民　徐文智　耿相月

聂淑媛　谢厚桂

第 2 版前言

本书是在第一版使用两年的基础上，根据我们多年的教学实践，进行全面修订而成的，目的是为了进一步适应新形势下高职教学的需求。本书仍保留了第一版学习指导的系统和风格，是《高等数学（上册）》的配套用书。

本书在修订过程中对第一版存在的问题进行了全面认真修订。与新版教材相对应，在第二版学习指导中也增加了《无穷级数》一章，使得本书的微积分的内容更加完整和系统，更有利于学生进行全面复习和巩固提高，有利于学生升本、考研之用。

本书由谢厚桂、张青娥、徐文智主持修订。

参加修订的有山东农业大学谢厚桂、耿相月、张勤英，山东农业管理干部学院闫宝英（第 1、2、3、10 章）；山东农业大学王志武，福建林业职业技术学院郑瑞根（第 4 章）；河南科技大学林业职业学院张青娥、马建国、聂淑媛（第 5、6 章）；甘肃林业职业技术学院徐文智、辛永清、王晨（第 7、8 章）；山东农业大学郝建民、李钧（第 9 章）。本书最后由谢厚桂编纂、定稿。

由于水平所限，书中定有不当之处，敬请广大专家、同行及读者批评指正。

编　者

2005 年 6 月

前 言

本书是《高等数学》(上册) 的配套用书。编写的目的是在加强课堂教学的同时加大课外教学的力度，使学生更好地掌握高等数学知识、为专业服务。本书可帮助学生“循环复习，强化记忆，巩固提高，掌握方法，熟练应用和提高能力”。

本书共分九章，分别对应教材各章节。各章包括：小节、典型例题解答、练习题、自测题。每章小节指出了学习该章的基本要求、内容提要和学习建议，可供学生自查、总结之用；精心选取的典型例题，分析解答，重点突出解题的思想方法，有利于培养学生分析问题、解决问题的能力和创新精神；练习题可使学生进一步巩固学习成果；自测题能及时检查学习情况，准确反映学习效果。练习题和自测题均有参考答案。另外，书末还附有综合练习题，以备期末综合复习之用。

本书可供农林类或综合类高等职业学校、成人高校、高等专科学校及本科院校举办的二级职业技术学院专科或本科学生之用，也可作为“专升本”和自学高等数学者的参考用书。

本书由谢厚桂、张青娥、辛永清主编。参加本书编写的有：山东农业大学科技学院谢厚桂（第一、二章)、李钧（第三章)，福建林业职业技术学院郑瑞根（第四章)，河南科技大学林业职业学院张青娥、张宾子（第五、六章)，甘肃林业职业技术学院辛永清、徐文智（第七、八章)，山东农业大学科技学院郝建民（第九章)。全书最后由谢厚桂修改、统纂、定稿。另外，山东农业大学科技学院王志武、张勤英、耿相月参加了部分章节的编写。

本书在编写过程中参考了国内外同行的有关著作和研究成果，并得到了山东农业大学科技学院、河南科技大学林业职业学院、甘肃林业职业技术学院和福建林业职业技术学院教务处以及山东农业大学信息工程学院地数学系有关专家的大力支持,该书的出版还得益于中国林业出版社的精心策划和通力合作,在此一并表示衷心的感谢。

本书尽管经过多次调整、修改，但因篇幅限制，尚不能完全满足读者需要，或有其他不足之处，敬请读者见谅。

编 者

2003 年 8 月

目　录

第一章　函　　数

一、小　　结

(一)基本要求

1. 正确理解函数的定义;弄清楚定义中的两个要素:定义域、对应法则。认识函数符号 $y=f(x)$ 中 $f(\ )$ 的涵义;要区分 $f(x)$ 与 $f(\ )$;要区分 $f(x)$ 与 $f(a)$ (a 为常数);知道函数的三种表示方式,了解分段函数,会求其函数值。

2. 要会求比较简单的函数的定义域,为此,必须牢记基本初等函数的定义域。

3. 弄清函数的单调性、奇偶性、周期性、有界性等概念及其几何意义。

4. 理解反函数的定义,知道反函数存在的条件,了解反函数与直接函数在表达式上和几何图形上的关系。会求简单函数的反函数,记住反三角函数的值域。

5. 弄清复合函数的概念,弄清可复合的条件,会求简单函数的复合,会把复合函数分解成简单函数,熟悉复合运算。

6. 要熟悉基本初等函数的图形及其性质。了解初等函数的定义及构成。

(二)内容提要

1. 变量与函数

变量与常量:在变化过程中,始终保持不变的量叫常量,否则叫变量。

区间与邻域:开区间 $(a-\delta,a+\delta)$ 定义为点 a 的 δ 邻域,记为 $U(a,\delta)$;而 $U^0(a,\delta)=(a-\delta,a)\cup(a,a+\delta)$ 称为点 a 的 δ 去心邻域。其中 a,δ 为两个实数,且 $\delta>0$。区间是介于两个实数 a 与 b 之间的所有实数。区间长度 $b-a$ 为有限的称有限区间,区间长度为无限的叫无限区间。

函数:设 x,y 是同一变化过程中的两个变量,若 x 的变化通过某个确定的法则使 y 随之变化,那么 y 就叫 x 的函数,记作 $y=f(x)$,其中 f 是变量 x 到 y 的对应法则。

定义域:自变量 x 所有取值集合 P。

值域:函数值的全体形成的集合 W。

函数的相等：当两个函数的定义域、对应法则都相同时，称这两个函数相等。

分段函数：当自变量 x 在定义域的不同范围内取值时，函数的解析表达式不同的函数就叫分段函数。

2. 函数的简单性态

单调性：$f(x)$在 I 上严格单调增(或减)是指当 $x_1<x_2$ 时，$f(x_1)<f(x_2)$(或 $f(x_1)>f(x_2)$)，$x_1\in I$，$x_2\in I$。

奇偶性：当 $f(-x)=-f(x)(x\in D)$时，$f(x)$为奇函数，它的图像关于原点对称；当 $f(-x)=f(x)(x\in D)$时，$f(x)$为偶函数，它的图像关于 y 轴对称。

周期性：满足 $f(x+T)=f(x)(x\in D, x+T\in D)$的函数 $f(x)$叫周期函数。

有界性：$f(x)$在区间 I 上有界是指存在正常数 $M>0$ 使得$|f(x)|\leqslant M$ 成立，否则就称无界。

3. 反函数、复合函数、初等函数

反函数：区间 I 上的单调函数一定存在反函数。从 $y=f(x)$中解出反函数 $x=f^{-1}(y)$，它们表示相同的曲线，由于函数表示与变量记号无关，习惯上仍用 x 表示自变量，y 表示函数，所以 $y=f(x)$的反函数亦记作 $y=f^{-1}(x)$，它们的图形关于直线 $y=x$ 对称。注意 $x=f^{-1}(y)$与 $y=f^{-1}(x)$表示的是同一个函数，即 $y=f(x)$的反函数。

复合函数：复合函数 $f[g(x)]$有定义，必须 $u=g(x)$的值域包含在 $f(u)$的定义域内，复合运算即为代入运算。

初等函数：由基本初等函数及常数经过有限次的四则运算和有限次的复合步骤(运算)所构成的并且由一个解析式表达的函数就称为初等函数。

为了以后叙述方便，我们把初等函数进行分类。初等函数可分为代数函数与超越函数。

代数函数：由自变量 x 和常数经过有限次的代数运算所得到的函数叫代数函数。例如，$f(x)=\sqrt{(x^2-1)\sqrt{x}}$，$f(x)=x^2+x+1$，$y=\dfrac{2x^2+\sqrt{x}}{\sqrt{1+2x+2x^2}}$，等都是代数函数。

超越函数：不属于代数函数的函数就叫超越函数。如 $y=\sin x$，$y=\ln x$，$y=e^x$ 等都是超越函数。

总括起来如下所示：

$$
\text{初等函数}\begin{cases}\text{代数函数}\begin{cases}\text{有理函数}\begin{cases}\text{有理整函数}\\\text{有理分式函数}\end{cases}\\\text{无理函数}\end{cases}\\\text{初等超越函数}\end{cases}
$$

(三)学习建议

(1) 本章的特点是概念较多,在学习概念时要仔细推敲,准确理解,务求理解得清楚、确切深刻,不要停留在表面上,透彻理解和牢固掌握其精神实质,从而为学习本课程打下基础。

(2) 对一些中学里已经遇到的知识,仍应在原有的基础上进行复习提高,温故而知新。

(3) 分段函数是新接触的函数形式,本课程中除了主要研究初等函数外,还把分段函数作为研究的重点。应注意分段点处的函数值。

(4) 本章的重点是函数概念与初等函数;难点是复合函数。

(5) 渊博的知识,娴熟的技艺来自于点滴的积累,要认真地完成习题,不放过学习的每一个环节,才能取得优异的成绩。

二、典型例题解答

例 1 下列各函数相同的是( )。

(A)x 与$\frac{x^2}{x}$ (B)$|x|$与$\sqrt{x^2}$

(C)x 与 $e^{\ln x}$ (D)x 与 $\sin(\arcsin x)$

解 因$\frac{x^2}{x}$,$e^{\ln x}$,$\sin(\arcsin x)$的定义域依次为 $x\neq 0$,$x>0$,$x\in[-1,1]$,而 x 的定义域为$(-\infty,+\infty)$,故(A)、(C)、(D)的定义域不同,应选(B)。

例 2 $y=0$ 是( )。

(A)奇函数 (B)偶函数

(C)周期函数 (D)A、B、C 均正确

解 因 $y=0$ 既是奇函数又是偶函数,且为周期函数,所以应选(D)。

例 3 函数 $y=f(x)$与 $x=f^{-1}(y)$在同一坐标里的图像的关系是( )。

(A)关于 x 轴对称 (B)关于 y 轴对称

(C)是同一条曲线 (D)关于直线 $y=x$ 对称

解 虽然 $x=f^{-1}(y)$与 $y=f^{-1}(x)$都是 $y=f(x)$的反函数,但函数 $x=f^{-1}(y)$与 $y=f(x)$在同一坐标系里表示同一条曲线,而 $y=f^{-1}(x)$与 $y=f(x)$的图像关于直线$y=x$对称,故应选(C)。

例 4 求下列函数的定义域。

(1)$y=\sqrt{3-x^2}+\arccos\frac{x-2}{3}$ (2)$y=\sqrt{\sin x}+\lg\frac{1+x}{1-x}$

解 (1)要使函数 y 有意义,则需$\sqrt{3-x^2}$与 $\arccos\dfrac{x-2}{3}$都有意义,所以函数 y 的定义域应为两个函数定义域的交集。对于$\sqrt{3-x^2}$其定义域为$[-\sqrt{3},\sqrt{3}]$,而 $\arccos\dfrac{x-2}{3}$有意义,则需$\left|\dfrac{x-2}{3}\right|\leqslant 1$ 解之得:$-1\leqslant x\leqslant 5$,所以函数定义域为$[-\sqrt{3},\sqrt{3}]\cap[-1,5]=[-1,\sqrt{3}]$。

(2)y 有意义,则$\sqrt{\sin x}$与 $\lg\dfrac{1+x}{1-x}$都有意义。

$\sqrt{\sin x}$有意义,则 $\sin x\geqslant 0$ 即 $2k\pi\leqslant x\leqslant 2k\pi+\pi,k=0,\pm1,\pm2,\cdots$

$\lg\dfrac{1+x}{1-x}$有意义,则$\dfrac{1+x}{1-x}>0$ 即$-1<x<1$,

故 函数 y 的定义域为$[0,2\pi]\cap(-1,1)=[0,1)$。

例 5 设 $f(x)=\dfrac{1+x}{1-x}$,求 $f(a),f[f(x)]$。

解 $f(a)=\dfrac{1+a}{1-a}(a\neq 1)$, $f[f(x)]=\dfrac{1+f(x)}{1-f(x)}=\dfrac{1+\dfrac{1+x}{1-x}}{1-\dfrac{1+x}{1-x}}=-\dfrac{1}{x}(x\neq 0)$

例 6 已知 $f(1+x)=\dfrac{2+x}{2x-1}$,求 $f(x)\left(x\neq\dfrac{3}{2}\right)$

解 方法一(换元法)

令 $1+x=t$,则 $x=t-1$,所以 $f(t)=\dfrac{2+(t-1)}{2(t-1)-1}=\dfrac{1+t}{2t-3}$;

故 $f(x)=\dfrac{1+x}{2x-3}(x\neq\dfrac{3}{2})$

方法二(凑成法)

因 $f(1+x)=\dfrac{2+x}{2x-1}$,即 $f(1+x)=\dfrac{1+(1+x)}{2(1+x)-3}$;故 $f(x)=\dfrac{1+x}{2x-3}\left(x\neq\dfrac{3}{2}\right)$

例 7 设 $f\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=x^2+\dfrac{1}{x^2}$,求 $f(x)$。

解 (凑成法)

因 $f\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=x^2+\dfrac{1}{x^2}=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2-2$,故 $f(x)=x^2-2$

注:此题若用换元法:令 $x+\dfrac{1}{x}=t$,反解出 x 则较繁。

例 8 指出下列复合函数的复合过程。

(1)$y=5\arccos(1-x)^3$, (2)$y=\sqrt{\ln\sqrt{x^2+2x}}$

解 (1)$y=5\arccos(1-x)^3$ 由 $y=5\arccos u,u=t^3,t=1-x$ 复合而成。

(2)$y=\sqrt{\ln\sqrt{x^2+2x}}$是由 $y=\sqrt{u}$,$u=\ln v,v=\sqrt{t}$,$t=x^2+2x$ 复合而成。

例 9 某运输公司规定某种货物的运输收费标准为:不超过 200 公里,每吨公里收费 6 元;200 公里以上但不超过 500 公里,每吨公里收费 4 元;500 公里以上,每吨公里收费 3 元;试将每吨的运费表示为路程的函数。

解 设路程为 x(公里),每吨运费为 y(元)。那么

当 $0\leqslant x\leqslant 200$ 时,$y=6x$

当 $200<x\leqslant 500$ 时,$y=6\times 200+4(x-200)=4x+400$

当 $x>500$ 时,$y=6\times 200+4\times 300+3(x-500)=3x+900$

故 所求函数关系为:$y=\begin{cases}6x, & 0\leqslant x\leqslant 200\\ 4x+400, & 200<x\leqslant 500\\ 3x+900, & x>500\end{cases}$

例 10 《中华人民共和国个人所得税法》第十四条中有下表:

个人所得税税率表(工资、薪金所得适用)

级别	全月应纳税所得额	税率(%)
1	不超过 500 元部分	5
2	超过 500 元至 2000 元部分	10
3	超过 2000 元至 5000 元部分	15
4	超过 5000 元至 20000 元部分	20
5	超过 20000 元至 40000 元部分	25
6	超过 40000 元至 60000 元部分	30
7	超过 60000 元至 80000 元部分	35
8	超过 80000 元至 100000 元部分	40
9	超过 100000 元部分	45

目前,上表中"全月应纳税所得额"是从月工资、薪金收入中减去 1000 元后的余额。

例如:某人月工资 1220 元,减去 1000 元,应纳税所得额是 220 元,应纳个人所得税是:

$$220\times 5\%=11(\text{元})$$

试写出月工资、薪金的个人所得税 y 关于收入额(月工资、薪金)x($0<x\leqslant 4000$)的函数表达式。

解 设月工资、薪金的个人所得税为 y(元),收入额为 x(元)

那么,当 $0<x\leqslant 1000$ 时,$y=0$

当 $1000<x\leqslant 1500$ 时,$y=(x-1000)\times 5\%=0.05x-50$

当 $1500<x\leqslant 3000$ 时,$y=500\times 5\%+(x-1500)\times 10\%=0.1x-125$

当 $3000<x\leqslant 4000$ 时，$y=500\times 5\%+1500\times 10\%+(x-3000)\times 15\%$
$=0.15x-275$

所以，所求函数关系式为：$y=\begin{cases}0, & 0<x\leqslant 1000\\ 0.05x-50, & 1000<x\leqslant 1500\\ 0.1x-125, & 1500<x\leqslant 3000\\ 0.15x-275, & 3000<x\leqslant 4000\end{cases}$

三、练习题

(一)填空题

1. 设 $f(x)$的定义域为$[0,1]$,则 $f[\ln(x)]$ 的定义域为________。
2. 设 $f(x^2+1)=x^4+4x^2+3$,则 $f(x)=$________。
3. 设 $f(3x)=x+1$,则 $f[f(x)]=$________。
4. 函数 $y=1+\ln(2x+3)$的反函数是________。
5. 函数 $y=\cos x\cdot\ln\dfrac{1-x}{1+x}$的奇偶性是________函数。

(二)选择题

1. 下列函数相同的是(　　)。
   (A)x 与$\sqrt{x^2}$　　(B)$\ln x^2$ 与 $2\ln x$
   (C)x 与$\dfrac{x^2}{x}$　　(D)$e^{-\frac{1}{2}\ln x}$与$\dfrac{1}{\sqrt{x}}$
2. 下列函数中(　　)不是周期函数。
   (A)$y=3\sin(x+\pi)$　　(B)$y=\sin^2 x$
   (C)$y=1+\sin 5x$　　(D)$y=x\sin x$
3. $y=\arcsin(u+2)$与 $u=|x|-2$ 构成复合函数,则 x 的取值为(　　)。
   (A)$[3,5]$　　(B)$[-1,1]$
   (C)$[4,6]$　　(D)$[2,4]$
4. $f(x)=\dfrac{1+x}{1-x}$,则 $f[f(x)]=($　　$)$,$(x\neq 0)$。
   (A)$-\dfrac{1}{x}$　　(B)$\dfrac{1+x}{1-x}$　　(C)$\dfrac{1}{1-x}$　　(D)1

(三)解答题

1. 已知 $f(x)$的定义域为$[0,1]$,求 $y=f(x^2)$及 $y=f[\cos x]$的定义域。

2. 设 $f\left(\sin\frac{x}{2}\right)=1+\cos x$，求 $f\left(\cos\frac{x}{2}\right)$。

3. 设 $f\left(\frac{1}{x}\right)=x\left(\frac{x}{1+x}\right)^2$，求 $f(x)$。

4. 设 $f(x)=\begin{cases} e^x & x\leqslant 0。\\ x^\pi & 0<x\leqslant\pi \\ \ln x & x>\pi \end{cases}$，求 $f(-1),f(0),f(e),f(2\pi)$

5. 指出下列函数的复合过程。

(1) $y=2^{\sin^2\frac{1}{x}}$ (2) $y=\cos(\ln\sqrt{1+x^2})$

6. 已知圆锥的体积为 V，试将圆锥的底半径表示为其高的函数，并求此函数的定义域。

7. 一圆形铁片自圆心处剪去中心为 θ 的扇形后围成一个无底的圆锥，试将圆锥的体积表示为 θ 的函数。

8. 某商店按批发价每件 6 元购进一批货，零售价为 8 元时，可卖出 100 件。如果零售价高于 8 元，则一件也卖不出去，如果零售价从 8 元每降低 0.1 元，则可以多卖出 10 件。

(1)写出可卖出的件数 q 与零售价 $x(6<x\leqslant 8)$ 之间的函数关系式。

(2)写出所获利润 y 与零售价 $x(6<x\leqslant 8)$ 之间的函数关系式。

四、自测题

(一)选择题(每小题 4 分，共 40 分)。

1. $y=\sin\left(\frac{x}{2}+3\right)$ 的周期是(　　)。

(A) π (B) 2π (C) $\frac{\pi}{2}$ (D) 4π

2. 设 $f(x)$ 是二次多项式，且 $f(0)=4,f(1)=2,f(2)=1$，则 $f(x)=$(　　)。

(A) $\frac{1}{2}(x^2-5x+8)$ (B) $-\frac{1}{2}(x^2-x-4)$

(C) $\frac{1}{2}(x^2-4x+8)$ (D)以上都不对

3. 函数 $f(x)=2x^2+e^{x^2}(-1\leqslant x\leqslant 2)$ 是(　　)。

(A)偶函数 (B)奇函数

(C)单调增函数 (D)非奇非偶函数