

# 数字信号

Shuzixinhao

# 处理原理及应用

(第2版)

ChuliYuanli Ji Yingyong

● 桂志国 陈友兴 主 编

张 权 张鹏程 副主编



国防工业出版社

National Defense Industry Press

# 数字信号处理原理及应用

## (第2版)

SHUZI XINHAO CHULI YUANLI JI YINGYONG

桂志国 陈友兴 主 编  
张 权 张鹏程 副主编

国防工业出版社

·北京·

## 内 容 简 介

本书主要包括离散时间信号与系统的基本理论,快速傅里叶变换,数字滤波器的结构理论和设计方法,特殊滤波器的设计,有限字长效应及多抽样率转换等内容。

本书适合普通高等院校信息类相关专业本科生及研究生选为教材,也可作为相关工程技术人员的自学参考书。

### 图书在版编目(CIP)数据

数字信号处理原理及应用/桂志国,陈友兴主编.

—2版.—北京:国防工业出版社,2016.6

ISBN 978-7-118-10796-8

I. ①数… II. ①桂… ②陈… III. ①数字信号处理  
IV. ①TN911.72

中国版本图书馆CIP数据核字(2016)第137628号

※

国防工业出版社出版发行

(北京市海淀区紫竹院南路23号 邮政编码100048)

北京京华虎彩印刷有限公司印刷

新华书店经售

\*

开本 787 × 1092 1/16 印张 25¼ 字数 627 千字

2016年6月第2版第1次印刷 印数 1—1500册 定价 65.00元

(本书如有印装错误,我社负责调换)

国防书店:(010)88540777

发行邮购:(010)88540776

发行传真:(010)88540755

发行业务:(010)88540717

# 前 言

数字信号处理是高等院校电子信息工程、电子信息科学与技术、通信工程、自动化、生物医学工程、测控技术与仪器、电子科学与技术、计算机科学与技术等专业的一门重要的专业基础课程。随着信息时代的发展,数字信号处理理论与技术日益完善,已成为一门重要的学科与技术,其应用范围日益扩大,几乎遍及各个工程技术领域。

本书是《数字信号处理原理及应用》的第2版。针对第1版自出版以来的使用情况,对其进行了部分修订。这次再版同样系统地讨论了数字信号处理的基本理论、基本分析方法、基本算法和实现方法。全书共10章。第1章~第3章为离散时间信号与系统的基本理论,即离散时间信号与系统、 $z$ 变换及离散傅里叶变换;第4章讨论傅里叶变换的快速算法;第5章~第7章介绍了数字滤波器的结构、理论和设计方法;第8章介绍了常用的特殊滤波器的设计;第9章为数字信号处理的有限字长效应;第10章讨论了多抽样率转换。通过本书的学习,可以为进一步学习有关信号方面的课程打下良好的理论基础。

本书的编写分工如下:桂志国编写第1章和第10章,陈友兴编写第5、6、8章,张权编写第4、7章,张鹏程编写3、4、9章,全书由桂志国教授统稿。

感谢国家自然科学基金项目(NO. 61271357)、国家重大科学仪器设备开发专项项目(NO. 2014YQ240445)的资助。

由于水平有限,本书难免有不妥或错误之处,恳请广大读者给予批评与指正。

作者  
2015年11月

# 目 录

第 1 章 离散时间信号与系统的时域分析	1
1.1 离散时间信号—序列	1
1.1.1 几种常用序列	2
1.1.2 序列的基本运算	9
1.2 序列的卷积和与相关	15
1.2.1 序列的卷积和	15
1.2.2 序列的线性相关	17
1.3 线性移不变系统	21
1.3.1 线性系统	21
1.3.2 移不变系统	22
1.3.3 单位抽样响应与卷积和	23
1.3.4 因果系统	24
1.3.5 稳定系统	24
1.3.6 卷积和的性质及 LTI 系统的互连	26
1.4 线性常系数差分方程	29
1.4.1 线性常系数差分方程的描述	29
1.4.2 线性常系数差分方程的求解	30
1.5 连续时间信号的抽样及抽样定理	32
1.5.1 理想抽样	33
1.5.2 实际抽样	36
1.5.3 带通信号的抽样	37
习题	38
第 2 章 离散时间信号与系统的 $z$ 域分析	41
2.1 $z$ 变换的定义及收敛域	41
2.1.1 $z$ 变换的定义	41
2.1.2 $z$ 变换的收敛域	41
2.1.3 常用序列的 $z$ 变换	46
2.1.4 $z$ 变换收敛域的性质	48
2.2 $z$ 变换	49
2.2.1 部分分式展开法	49
2.2.2 幂级数展开法	51

2.2.3	围线积分法(留数法)	54
2.3	$z$ 变换的性质与定理	56
2.4	$z$ 变换与连续信号拉普拉斯变换、傅里叶变换的关系	64
2.4.1	$z$ 变换与拉普拉斯变换的关系	64
2.4.2	序列的 $z$ 变换和傅里叶变换的关系	66
2.5	序列傅里叶变换及性质	66
2.5.1	非周期序列傅里叶变换	66
2.5.2	序列傅里叶变换的性质与定理	69
2.5.3	常用序列的傅里叶变换	73
2.6	离散时间系统的系统函数和频率响应	76
2.6.1	系统函数的定义	76
2.6.2	系统函数与差分方程的关系	76
2.6.3	系统的频率响应	77
2.6.4	利用 $H(z)$ 的零极点分析系统	80
2.6.5	无限长单位抽样响应系统与有限长单位抽样响应系统	83
	习题	85
<b>第3章</b>	<b>离散傅里叶变换</b>	<b>88</b>
3.1	傅里叶变换的几种形式	88
3.1.1	非周期连续时间信号的傅里叶变换——时域连续、频域连续	88
3.1.2	周期连续时间信号的傅里叶级数——时域连续、频域离散	88
3.1.3	非周期离散时间信号(序列)的傅里叶变换——时域离散、频域连续	89
3.1.4	周期离散时间信号的傅里叶级数——时域离散、频域离散	90
3.2	周期序列的离散傅里叶级数及性质	91
3.2.1	周期序列的离散傅里叶级数	92
3.2.2	周期序列离散傅里叶级数的性质	94
3.2.3	周期序列的傅里叶变换	97
3.3	离散傅里叶变换	100
3.3.1	离散傅里叶变换的定义	100
3.3.2	DFT 与 $z$ 变换以及 DTFT 之间的关系	102
3.3.3	几种频率的关系	103
3.4	离散傅里叶变换的性质	103
3.4.1	离散傅里叶变换隐含的周期性	104
3.4.2	离散傅里叶变换的性质	104
3.5	有限长序列的循环卷积定理和循环相关定理	111
3.5.1	有限长序列的循环卷积	111
3.5.2	循环卷积定理	112
3.5.3	有限长序列的线性卷积和循环卷积	113
3.5.4	有限长序列的循环相关与循环相关定理	116
3.6	频域抽样理论	117

3.6.1	由 $X(k)$ 不失真地恢复 $x(n)$ 的条件	117
3.6.2	频率抽样的内插公式	118
3.7	基于 DFT 技术的频谱分析技术	121
3.7.1	利用 DFT 对连续非周期信号进行频谱分析	121
3.7.2	利用 DFT 对连续信号进行频谱分析中的问题及其解决方法	123
3.7.3	频率分辨率	128
	习题	135
<b>第 4 章</b>	<b>快速傅里叶变换</b>	<b>139</b>
4.1	DFT 的运算量分析及改善途径	139
4.1.1	直接计算 DFT 的运算量	139
4.1.2	改善 DFT 运算效率的基本途径	140
4.2	按时间抽取的基-2FFT 算法	142
4.2.1	算法原理	142
4.2.2	算法运算量分析	146
4.2.3	算法特点分析	147
4.2.4	按时间抽取的其他形式流程图	150
4.2.5	DIT 基-2FFT 的软件编程思想	151
4.3	按频率抽取的基-2 FFT 算法	153
4.3.1	算法的基本原理	153
4.3.2	按频率抽取的 FFT 算法特点分析	155
4.3.3	时间抽取法与频率抽取法的比较	156
4.4	快速傅里叶反变换	157
4.4.1	稍微变动 FFT 程序和参数实现 IFFT	157
4.4.2	不改变 FFT 的程序直接实现 IFFT	157
4.5	FFT 算法的 MATLAB 软件实现	158
4.6	实序列的 FFT 算法	160
4.6.1	利用频谱对称性推导实序列的 FFT	160
4.6.2	离散哈德曼变换	161
4.7	基于 FFT 的线性卷积与线性相关快速算法	165
4.7.1	基于 FFT 的有限长序列线性卷积算法	165
4.7.2	基于 FFT 的有限长序列和无限长序列卷积算法	167
4.7.3	基于 FFT 的线性相关算法	171
	习题	173
<b>第 5 章</b>	<b>数字滤波器的基本结构</b>	<b>175</b>
5.1	数字滤波器结构的表示方法	175
5.2	无限长单位抽样响应(IIR)滤波器的结构	177
5.2.1	直接 I 型	177
5.2.2	直接 II 型(典范型、正准型)	178

5.2.3	级联型	179
5.2.4	并联型	181
5.2.5	转置定理	183
5.3	有限长单位抽样响应(FIR)滤波器的基本结构	184
5.3.1	直接型(横截型、卷积型)	184
5.3.2	级联型	185
5.3.3	快速卷积型	186
5.3.4	频率抽样型结构	187
5.3.5	梳状滤波器	191
5.4	格型滤波器的基本结构	193
5.4.1	全零点(FIR)格型滤波器	193
5.4.2	全极点(IIR)格型滤波器	196
5.4.3	零、极点(IIR)格型滤波器	198
	习题	199
<b>第6章</b>	<b>无限长单位抽样响应数字滤波器的设计</b>	<b>202</b>
6.1	滤波器的基本概念	202
6.1.1	滤波器的分类	202
6.1.2	滤波器的技术指标	203
6.1.3	滤波器的设计步骤	204
6.2	模拟低通滤波器的设计	205
6.2.1	由幅度平方函数来确定系统函数	205
6.2.2	巴特沃思模拟低通滤波器的设计	207
6.2.3	切比雪夫模拟低通滤波器的设计	213
6.2.4	椭圆模拟低通滤波器的设计	223
6.2.5	贝塞尔模拟低通滤波器的设计	225
6.2.6	归一化原型滤波器设计数据	226
6.2.7	常用模拟滤波器的比较	228
6.3	基于模拟滤波器的IIR数字滤波器设计	229
6.3.1	抽样响应不变法	230
6.3.2	双线性变换法	238
6.4	数字高通、带通和带阻IIR滤波器的设计	246
6.4.1	模拟频带法	247
6.4.2	数字频带法	256
	习题	265
<b>第7章</b>	<b>有限长单位抽样响应数字滤波器的设计</b>	<b>267</b>
7.1	线性相位FIR数字滤波器及其特点	267
7.1.1	线性相位的定义	267
7.1.2	线性相位的条件	269



7.1.3	线性相位 FIR 滤波器的幅度特性	271
7.1.4	线性相位 FIR 滤波器的零点分布	275
7.2	窗函数设计法	276
7.2.1	设计方法	277
7.2.2	加窗处理对频谱性能的影响	278
7.2.3	典型窗函数	281
7.2.4	窗函数设计法举例	287
7.3	频率抽样设计法	295
7.3.1	设计方法	296
7.3.2	逼近误差	297
7.3.3	频率抽样法设计举例	300
7.4	等波纹最佳设计法	304
7.4.1	设计思想	305
7.4.2	交错点组定理	305
7.4.3	Parks - McClellan 算法	306
7.4.4	MATLAB 实现	309
7.5	IIR 滤波器和 FIR 滤波器的比较	311
	习题	312
<b>第 8 章</b>	<b>常用的特殊滤波器</b>	<b>315</b>
8.1	常用的特殊 IIR 滤波器	315
8.1.1	全通滤波器	315
8.1.2	最小相位滤波器	317
8.1.3	特殊零极点二阶滤波器	321
8.2	简单整系数 FIR 滤波器	325
8.2.1	均值滤波器	325
8.2.2	平滑滤波器	326
8.2.3	建立在零极点相消思想的简单整系数滤波器	329
	习题	332
<b>第 9 章</b>	<b>有限字长效应</b>	<b>333</b>
9.1	问题的提出	333
9.2	二进制数的表示	334
9.2.1	定点运算与浮点运算	334
9.2.2	原码、补码和反码	336
9.3	量化误差	338
9.3.1	定点运算的量化误差	339
9.3.2	浮点运算中的量化误差	341
9.4	系统输入信号的量化效应	342
9.4.1	信号量化误差的统计分析	343

9.4.2	量化噪声通过线性系统的响应 .....	344
9.5	系统系数的量化效应 .....	345
9.5.1	系数量化误差对系统零极点的影响 .....	345
9.5.2	系数量化对滤波器稳定性的影响 .....	350
9.6	定点运算 FIR 滤波器的有限字长效应 .....	351
9.6.1	FIR 滤波器的有限字长效应 .....	352
9.6.2	FFT 算法的有限字长效应 .....	353
9.7	定点运算 IIR 滤波器的有限字长效应 .....	354
9.7.1	量化噪声 .....	355
9.7.2	极限环振荡 .....	356
9.7.3	死带效应 .....	358
9.8	浮点运算的有限字长效应 .....	360
	习题 .....	361
<b>第 10 章</b>	<b>多抽样率转换 .....</b>	<b>363</b>
10.1	按整数因子 $D$ 抽取 .....	363
10.1.1	抽取器 .....	363
10.1.2	抗混叠抽取器 .....	364
10.1.3	频谱关系 .....	367
10.2	按整数因子 $I$ 内插 .....	369
10.2.1	插值器 .....	369
10.2.2	插值器的频域分析 .....	373
10.2.3	插值器的时域关系 .....	374
10.3	按有理因子 $I/D$ 的抽样率转换 .....	374
10.4	多抽样率转换 FIR 滤波器的 MATLAB 实现 .....	377
10.4.1	相关的 MATLAB 函数 .....	377
10.4.2	FIR 整数插值举例 .....	378
10.4.3	FIR 整数抽取举例 .....	380
10.4.4	FIR 有理因子的抽样率转换 .....	382
10.5	多抽样率转换的 FIR 滤波器结构 .....	383
10.5.1	整数因子抽取的 FIR 实现 .....	383
10.5.2	整数因子插值的 FIR 实现 .....	385
10.5.3	多相 FIR 结构 .....	387
	习题 .....	389
	参考文献 .....	392

# 第 1 章 离散时间信号与系统的时域分析

信号是承载信息的工具,如古代的烽火台,它传递的信息是“火(烟)起便是有敌人进犯”。信号可以用时间函数的方式进行表述,根据函数自变量的取值是否连续,可以将信号分为连续时间信号和离散时间信号。连续时间信号是在连续时间范围内定义的信号;离散时间信号是在离散时间范围内定义的信号。随着数字电路和计算机技术的迅猛发展,离散时间信号与系统的研究日趋丰富,其应用日益广泛。

本章首先介绍离散时间信号的表述方法、常用的离散序列和序列的基本运算;其次介绍序列的卷积和及其求解方法、序列的线性相关;然后着重讨论线性移不变系统的特性和差分方程的时域解法;最后介绍连续时间信号数字化时的抽样及抽样定理。

## 1.1 离散时间信号—序列

时间为离散变量的信号称为离散时间信号,它只在离散时间上给出函数值,是时间上不连续的序列,用  $x(n)$  表示第  $n$  个离散时间点的序列值,并用  $\{x(n)\}$  表示序列,但为方便起见,序列也直接用  $x(n)$  来表示。

离散时间信号可用数的集合  $\{\cdot\}$  的形式表示。例如一个离散时间信号可表示为  $x(n) = \{1, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 0\}$ , 箭头指向的元素表示  $n=0$  时的序列值,即  $x(0) = 1$ 。

离散时间信号也可用数学表达式来表示,例如  $x(n) = 3^n$ , 这里  $n$  为整数。

另外,离散信号  $x(n)$  也常用图形来描述,如图 1.1.1 所示。纵轴线段的长短代表各序列值的大小。注意,图中横轴虽为连续直线,但只在  $n$  为整数时才有意义,而对于非整数没有定义,即此时不能认为  $x(n)$  的取值为零。

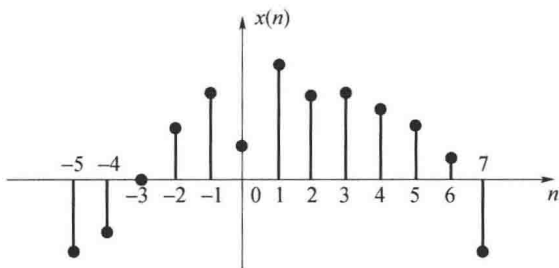


图 1.1.1 离散信号  $x(n)$  的图形描述

一个离散信号  $x(n)$  可能产生时就是离散的,例如,若  $x(n)$  表示某市每天出生的新生儿数,则  $x(n)$  本身就是离散的。离散信号  $x(n)$  也可以由一个连续时间信号  $x(t)$  的抽样得到。若  $x(t)$  表示一个连续时间信号,以抽样间隔  $T_s$  对其进行周期抽样得到离散时间信号  $x(nT_s)$  ( $n=0, \pm 1, \pm 2, \dots$ )。  $nT_s$  作为信号的变量,表明信号在离散时间  $nT_s$  点上出现,但在很多情况下,  $nT_s$  并不代表具体的时刻而只表明离散时间信号在序列中前后位置的顺序,所以  $x(nT_s)$

可直接记为  $x(n)$ 。

### 1.1.1 几种常用序列

在离散时域中,有一些基本的离散时间信号,它们在离散时间信号与系统中起着重要的作用。下面给出一些典型的离散时间信号表达式和波形。

#### 1. 单位抽样序列 $\delta(n)$

单位抽样序列  $\delta(n)$  的定义为

$$\delta(n) = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases} \quad (1.1.1)$$

其波形如图 1.1.2(a) 所示。 $\delta(n)$  也称为单位脉冲序列或单位样值序列。这是常用而重要的序列之一,它在离散时间信号与系统的分析、综合中有着重要的作用,其地位犹如连续时间信号与系统中的单位冲激信号  $\delta(t)$ 。虽然  $\delta(t)$  与  $\delta(n)$  符号一样,形式上  $\delta(n)$  就像  $\delta(t)$  的抽样,但它们之间存在本质的区别: $\delta(t)$  在  $t=0$  时,脉宽趋于零、幅值趋于无限大、面积为 1,是极限概念的信号,是现实中不可实现的一种信号,表示在极短时间内所产生的巨大“冲激”;而  $\delta(n)$  在  $n=0$  时,值为 1,是一个现实序列。图 1.1.2(b) 所示为  $\delta(n)$  右移 3 个单位的信号  $\delta(n-3)$  的图形。

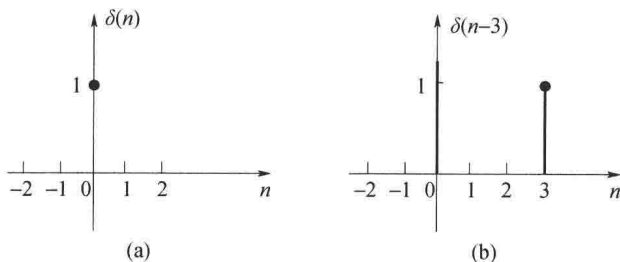


图 1.1.2 单位抽样序列及其移位

(a)  $\delta(n)$ ; (b)  $\delta(n-3)$ 。

显然,任意序列都可以表示成单位抽样序列的移位加权和,即

$$\begin{aligned} x(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)\delta(n-m) = \cdots + x(-1)\delta(n+1) + x(0)\delta(n) \\ + x(1)\delta(n-1) + \cdots \end{aligned} \quad (1.1.2)$$

**例 1.1.1** 已知  $x(n) = \begin{cases} 1, & n = -1 \\ 2, & n = 0 \\ -3, & n = 1 \end{cases}$  该序列可用单位抽样序列信号表示为

$$x(n) = \delta(n+1) + 2\delta(n) - 3\delta(n-1)$$

#### 2. 单位阶跃序列 $u(n)$

单位阶跃序列  $u(n)$  的定义为

$$u(n) = \begin{cases} 1, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases} \quad (1.1.3)$$

其波形如图 1.1.3 所示。它类似于连续时间信号与系统中的单位阶跃信号  $u(t)$ 。但一般情况下  $u(t)$  在  $t=0$  处没有定义,而  $u(n)$  在  $n=0$  时定义为  $u(0) = 1$ 。

用  $\delta(n)$  及其移位来表示  $u(n)$ , 可得两者之间的关系为

$$u(n) = \delta(n) + \delta(n-1) + \delta(n-2) + \delta(n-3) + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \delta(n-k) \quad (1.1.4)$$

反过来  $\delta(n)$  可用  $u(n)$  的后向差分来表示, 即

$$\delta(n) = u(n) - u(n-1) \quad (1.1.5)$$

可见, 相对于连续时间信号与系统中单位冲激信号  $\delta(t)$  与单位阶跃信号  $u(t)$  之间的微分与积分关系, 离散时间系统中, 单位抽样序列  $\delta(n)$  与单位阶跃序列  $u(n)$  之间是差分和求和关系。

由  $u(n)$  的定义可知, 若将序列  $x(n)$  乘以  $u(n)$ , 即  $x(n)u(n)$ , 则相当于保留  $x(n)$  序列  $n \geq 0$  的部分, 所得到的序列即为因果序列。

### 3. 矩形序列 $R_N(n)$

矩形序列  $R_N(n)$  的定义为

$$R_N(n) = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad (1.1.6)$$

其波形如图 1.1.4 所示。显然, 矩形序列与单位抽样序列、单位阶跃序列的关系为

$$R_N(n) = u(n) - u(n-N) \quad (1.1.7)$$

$$R_N(n) = \sum_{m=0}^{N-1} \delta(n-m) \quad (1.1.8)$$

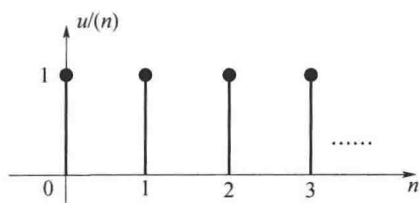


图 1.1.3 单位阶跃序列

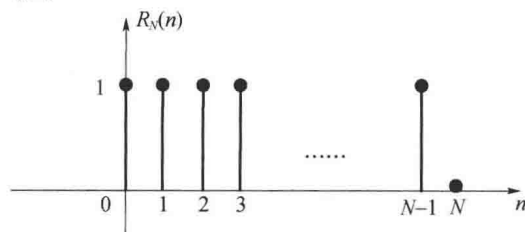


图 1.1.4 矩形序列

### 4. 正弦序列

正弦序列表达式为

$$x(n) = A \sin(\omega_0 n + \varphi) \quad (1.1.9)$$

式中:  $A$  为幅度,  $\varphi$  为初始相位,  $\omega_0$  为正弦序列的数字域频率。其波形如图 1.1.5 所示。

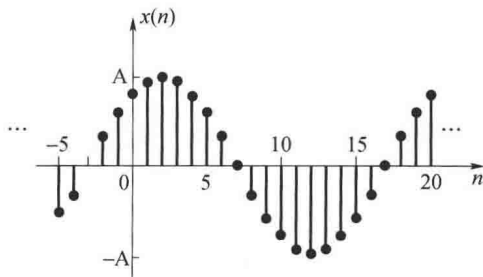


图 1.1.5 正弦序列

该信号可以看成是对连续时间正弦信号进行抽样得到的。若连续正弦信号  $x(t)$  为

$$x(t) = A \sin(\Omega_0 t + \varphi) = A \sin(2\pi f_0 t + \varphi)$$

式中:  $f_0$  为信号(物理)频率,  $\Omega_0 = 2\pi f_0$  为模拟角频率, 信号的周期  $T_0 = \frac{1}{f_0} = \frac{2\pi}{\Omega_0}$ 。

对  $x(t)$  以抽样间隔  $T_s$  进行等间隔周期抽样即可得到离散信号  $x(n)$ , 即

$$x(n) = x(t) |_{t=nT_s} = A\sin(\Omega nT_s + \varphi) = A\sin(\omega_0 n + \varphi)$$

由上述推导过程可知

$$\omega_0 = \Omega_0 T_s = \frac{2\pi f_0}{f_s} \quad (1.1.10)$$

对于一般的信号有,

$$\omega = \Omega T_s = \frac{2\pi f}{f_s} \quad (1.1.11)$$

式(1.1.11)便是数字信号处理中的数字角频率  $\omega$ 、模拟角频率  $\Omega$  以及物理频率  $f$  三者之间的关系, 以后章节会陆续用到。下面分析与正弦序列相关的一些规律。

### 1) 周期序列

由图 1.1.5 可见, 正弦序列的包络是周期正弦函数。但序列本身可能是周期的, 也可能是非周期的。对于任意整数  $n$ , 若  $x(n) = x(n+N)$  ( $N$  为某一最小正整数), 则序列  $x(n)$  是周期序列,  $N$  是该序列的周期。

对于正弦序列  $A\sin(\omega_0 n + \varphi)$ , 当  $\omega_0$  一定、 $n$  为自变量时, 是否是周期序列? 假设其为周期序列, 则对于任意的整数  $n$  有  $A\sin[\omega_0(n+N) + \varphi] = A\sin(\omega_0 n + \varphi)$ , 由此得  $\omega_0 N = 2\pi k$  ( $N, k$  为整数), 即周期为  $N = 2\pi k / \omega_0$ 。下面分几种情况对其周期性进行讨论。

(1) 当  $2\pi/\omega_0$  是整数时, 只要取  $k=1$ , 则  $N = 2\pi/\omega_0$  为最小正整数, 也就是说序列的周期为  $2\pi/\omega_0$ 。如  $\cos(\pi n/5)$ ,  $\omega_0 = \pi/5$ , 所以周期为 10, 如图 1.1.6(a) 所示, 此时正弦序列包络的一个周期与正弦序列的一个周期相对应。

(2) 当  $2\pi/\omega_0$  不是整数, 而是一个有理数时, 正弦序列具有周期性, 其周期为  $N = 2\pi/\omega_0 \cdot k$ 。如  $\cos(3\pi n/20)$ ,  $\omega_0 = 3\pi/20$ , 取  $k=3$ ,  $N=40$ , 如图 1.1.6(b) 所示, 此时正弦序列包络的三个周期与正弦序列的一个周期相对应。

(3) 当  $2\pi/\omega_0$  是无理数时, 则无论如何取  $k$  (整数) 值, 均不能使  $N$  成为整数。所以此时正弦序列不具有周期性。如  $\cos(3n/10)$ ,  $2\pi/\omega_0 = 20\pi/3$  为无理数, 所以该序列不是周期序列, 如图 1.1.6(c) 所示。

小结: 如果能够取得最小正整数  $k$ , 使得  $N = 2\pi k / \omega_0$  为正整数, 那么该正弦序列是周期为  $N$  的周期序列, 一个周期对应其包络的  $k$  个周期; 否则, 正弦序列为非周期序列。

### 2) 频率的周期性与对称性

(1) 正弦序列的频率以  $\omega = 2\pi$  为周期。

定义两个正弦序列  $x_1(n) = \cos(\omega_1 n + \varphi)$  和  $x_2(n) = \cos(\omega_2 n + \varphi)$ , 其中  $0 \leq \omega_1 < 2\pi$  和  $2\pi k \leq \omega_2 < 2\pi(k+1)$ ,  $k$  是任意正整数, 若  $\omega_2 = 2\pi k + \omega_1$ , 则这两个序列在波形上是完全一样的。换言之, 对于任何指数或正弦序列, 设其数字角频率为  $\omega_2$  且取值范围在  $[0, 2\pi)$  之外, 它们都与数字角频率为  $\omega_2 \setminus 2\pi$  的指数 (“\” 表示取余) 或正弦序列相等。

(2) 正弦序列的频率以  $\omega = \pi$  对称。

考虑两个正弦函数  $x_1(n) = \cos(\omega_1 n)$  和  $x_2(n) = \cos(\omega_2 n)$ , 其中  $\omega_2 = 2\pi - \omega_1$ 。因此, 可以推出  $x_2(n) = \cos(2\pi n - \omega_1 n) = \cos(\omega_1 n) = x_1(n)$ 。此时,  $x_1(n)$  和  $x_2(n)$  这两个序列在波形上是完全一样的。因此, 若一个正弦序列的数字角频率为  $\omega_2$ , 且其满足  $\pi \leq \omega_2 < 2\pi$ , 则它在范

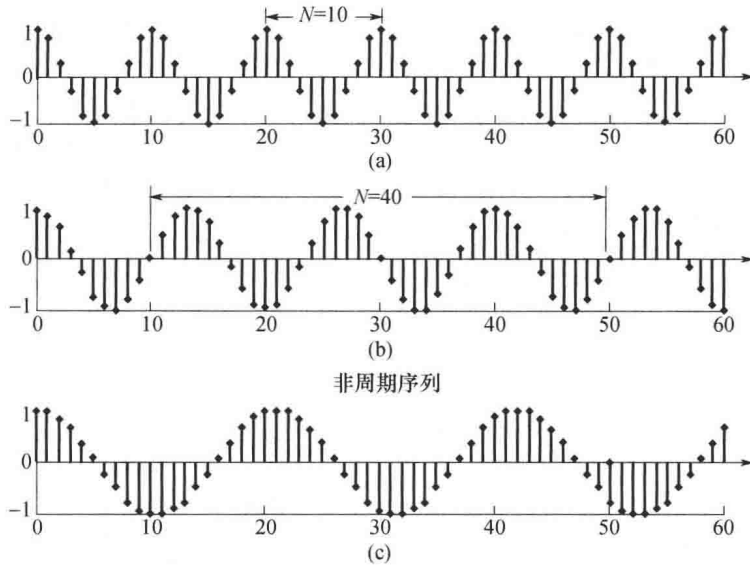
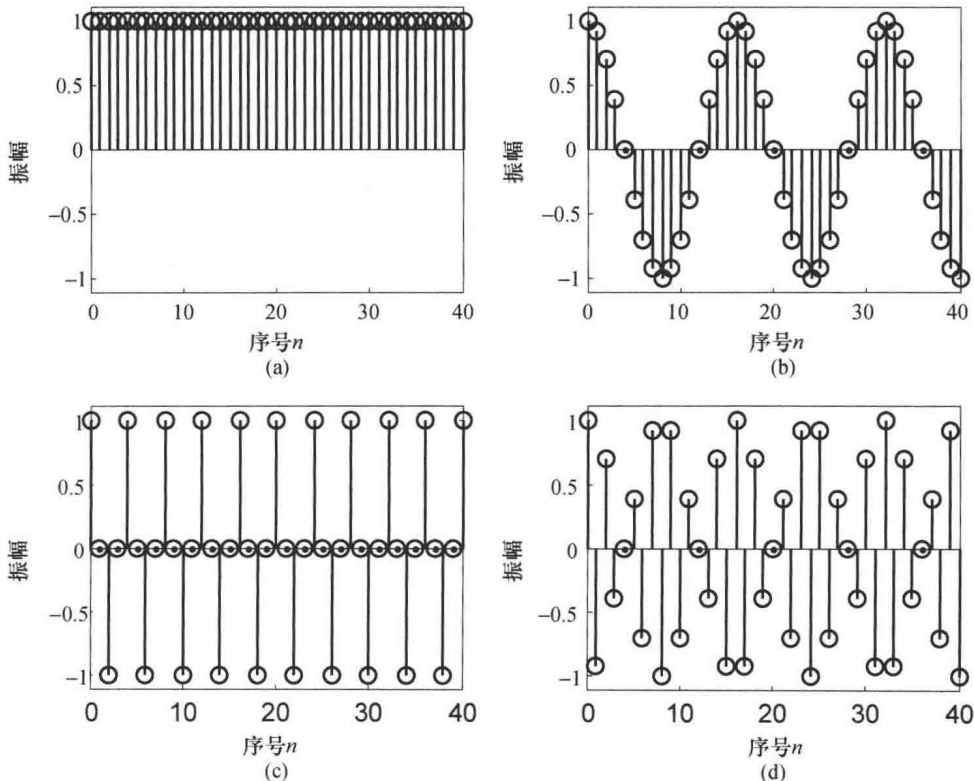
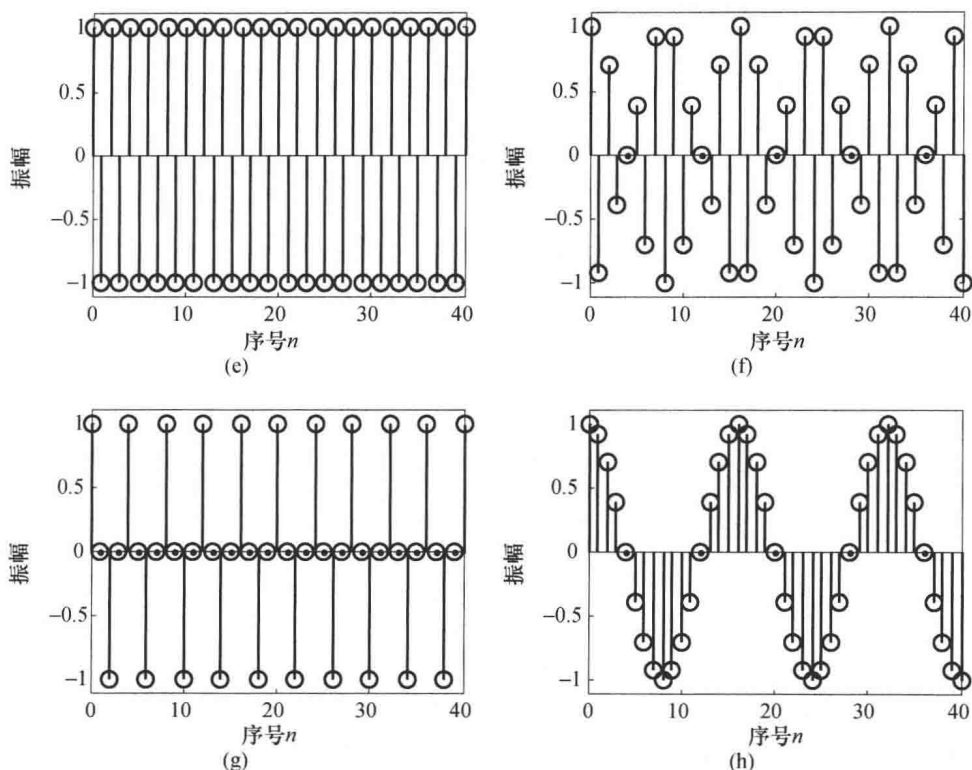


图 1.1.6 周期序列

围  $0 \leq \omega_1 < \pi$  内与数字角频率为  $\omega_1 = 2\pi - \omega_2$  的正弦序列相等。正弦序列的这种特性的含义如图 1.1.7 所示。随着  $\omega_0$  从 0 增加到  $\pi$ , 离散时间正弦序列  $x(n) = \cos(\omega_0 n)$  的振荡频率随着  $\omega_0$  的增加而增加, 振荡得愈来愈快; 而当  $\omega_0$  从  $\pi$  增加到  $2\pi$  时, 振荡频率随着  $\omega_0$  的增加而减小, 振荡得愈来愈慢。如果  $x_1(n) = \sin(\omega_1 n)$ ,  $x_2(n) = \sin(\omega_2 n)$ , 那么会有  $x_2(n) = \sin(2\pi n - \omega_1 n) = -\sin(\omega_1 n) = -x_1(n)$ 。因此, 对于正弦序列  $\cos(\omega_0 n)$  或  $\sin(\omega_0 n)$  呈  $\omega = \pi$  偶对称或奇对称, 因此称频率  $\pi$  为折叠频率。




 图 1.1.7 不同数字角频率的  $\cos(\omega_0 n)$  序列

(a)  $\omega_0 = \pi/8$ ; (b)  $\omega_0 = 0$ ; (c)  $\omega_0 = \pi/2$ ;  
 (d)  $\omega_0 = 7\pi/8$ ; (e)  $\omega_0 = \pi$ ; (f)  $\omega_0 = 9\pi/8$ ; (g)  $\omega_0 = 3\pi/2$ ; (h)  $\omega_0 = 15\pi/8$ 。

将频率的周期性和对称性总结可以得出:任意整数  $k$ ,  $\omega = 2k\pi$  的邻域内的数字角频率  $\omega_0$  与  $\omega = 0$  的邻域内的数字角频率  $\omega_0 - 2k\pi$  是不能区分的;而且  $\omega = (2k+1)\pi$  的邻域内的数字角频率  $\omega_0$  与  $\omega = \pi$  的邻域内的数字角频率  $\omega_0 - (2k+1)\pi$  也是不能区分的。因此,通常称  $\omega = 2k\pi$  的邻域内的频率为低频,而称  $\omega = (2k+1)\pi$  的邻域内的频率为高频。例如,图 1.1.7 (b) 所示的  $x_1(n) = \cos(\pi n/8) = \cos(15\pi n/8)$  则是低频信号,而图 1.1.7 (d) 和图 1.1.7 (h) 所示的  $x_2(n) = \cos(7\pi n/8) = \cos(9\pi n/8)$  则是高频信号。正弦信号的这两个性质也同样适用于后面介绍的信号频谱分析和数字系统,数字信号的频谱和数字系统的频率响应都以  $\omega = 2\pi$  为周期,幅度频谱和幅频特性都是以  $\omega = k\pi$  呈共轭对称,即幅度呈偶对称,相位呈奇对称。第 3 章的频谱分析和第 6 章和第 7 章的滤波器会有相应的内容。

## 5. 实指数序列

实指数序列的表达式为

$$x(n) = a^n u(n) = \begin{cases} a^n, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases} \quad (1.1.12)$$

式中:  $a$  为实数,由于  $u(n)$  的作用,当  $n < 0$  时,  $x(n) = 0$ 。其波形特点是:当  $|a| < 1$  时,序列收敛,如图 1.1.8 (a) 和 (c) 所示;当  $|a| > 1$  时,序列发散,如图 1.1.8 (b) 和 (d) 所示;从图 1.1.8 (c) 和 (d) 可以看出,当  $a$  为负数时,序列值在正负之间摆动。

## 6. 复指数序列

复指数序列的表达式为



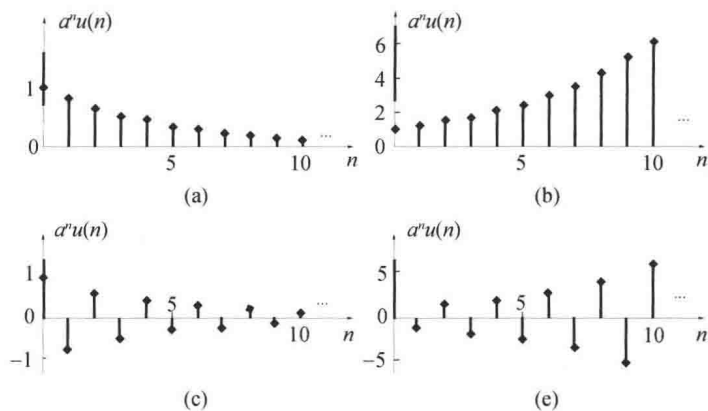


图 1.1.8 实指数序列

(a)  $0 < a < 1$ ; (b)  $a > 1$ ; (c)  $-1 < a < 0$ ; (d)  $a < -1$ 。

$$x(n) = e^{(\sigma + j\omega_0)n} \quad (1.1.13)$$

其指数是复数(或纯虚数),用欧拉公式展开后,得到:

$$x(n) = e^{\sigma n} \cos\omega_0 n + je^{\sigma n} \sin\omega_0 n \quad (1.1.14)$$

式中: $\omega_0$ 为复正弦序列的数字域频率, $\sigma$ 表征了该复正弦序列的幅度变化情况。其实部和虚部的波形如图 1.1.9 所示。

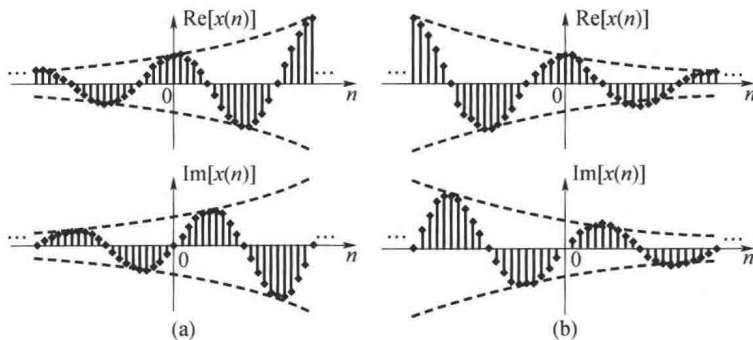


图 1.1.9 复指数序列

(a)  $\sigma > 0$ ; (b)  $\sigma < 0$ 。

复指数序列表示成极坐标形式为

$$x(n) = |x(n)| e^{j\arg[x(n)]} = e^{\sigma n} \cdot e^{j\omega_0 n} \quad (1.1.15)$$

式中:  $|x(n)| = e^{\sigma n}$ ,  $\arg[x(n)] = \omega_0 n$ 。

MATLAB 中有许多可以用于产生信号的函数,一些比较重要的函数如下。

exp, sin, cos, square, sawtooth

用 MATLAB 产生单位抽样序列、单位阶跃序列、矩形脉冲序列、正弦序列和复指数序列的程序如下。

```
clc;closeall;clear all;
n=[-30:30];
figure(1);
% 单位抽样序列
x1=[n==0];
```