肆

解兵博士文丛
Hubing Doctor Thesis Collection

四元数及其在图形图像处理中的应用研究

Research On Financial Data Analytical Method Based On Fractal Technology

邢　燕/著　檀结庆/导师

合肥工业大学出版社
HEFEI UNIVERSITY OF TECHNOLOGY PRESS

四元数及其在图形图像处理中的应用研究

邢　燕　著　　导师　檀结庆

合肥工业大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

四元数及其在图形图像处理中的应用研究/邢燕著．—合肥：合肥工业大学出版社，2016.10

ISBN 978-7-5650-3051-2

Ⅰ.①四…　Ⅱ.①邢…　Ⅲ.①数字图像处理—研究　Ⅳ.①TN911.73

中国版本图书馆CIP数据核字(2016)第262685号

四元数及其在图形图像处理中的应用研究

邢　燕　著　　檀结庆　导师　　责任编辑　权　怡　　责任校对　黄芸梦

出　版	合肥工业大学出版社	版　次	2016年10月第1版
地　址	合肥市屯溪路193号	印　次	2016年11月第1次印刷
邮　编	230009	开　本	710毫米×1010毫米　1/16
电　话	编 校 中 心：0551-62903210	印　张	11.75
	市场营销部：0551-62903198	字　数	186千字
网　址	www.hfutpress.com.cn	印　刷	合肥现代印务有限公司
E-mail	hfutpress@163.com	发　行	全国新华书店

ISBN 978-7-5650-3051-2　　　　定价：25.00元

摘 要

四元数理论是爱尔兰数学家威廉·卢云·哈密顿爵士于十九世纪四十至五十年代创立的,它是复数在四维实空间的不可交换延伸,是有限维的实数结合除法代数,是 Clifford 代数的一个子代数。二十世纪六十年代末四元数开始在经典力学中获得实际应用。1985 年,Shoemake 把四元数引入计算机图形学,从此四元数在计算机图形学、计算机动画、计算机视觉和机器人等领域获得广泛应用。1996 年,彩色图像的四元数模型被提出,四元数在彩色图像上的应用研究才开始发展。

本书将四元数方法与数字图像处理尤其是彩色图像处理的学科知识相结合,以四元数矩阵奇异值分解、四元数傅立叶变换、四元数卷积、四元数球面线性插值、四元数旋转表示等理论作为主要数学工具,辅以其他信号处理方法,如主成分分析、对数极坐标映射、相位相关、奈奎斯特-香农采样定理等,对彩色图像处理中的若干问题进行了研究和探讨。主要研究工作及成果如下:

1. 在四元数及四元数矩阵理论的基础上,构造了四元数矩阵的等价实矩阵,并讨论了四元数矩阵奇异值分解(QSVD)与其等价实矩阵奇异值分解的关系。在彩色图像的四元数模型下,利用四元数矩阵奇异值分解进行彩色图像分解:$X_{(q)}=U_{(q)}\Lambda V_{(q)}^{\mathrm{H}}=\sum_{i=1}^{r}\lambda_i u_{i(q)}v_{i(q)}^{\mathrm{H}}$,彩色图像矩阵 $X_{(q)}$ 被分解成一系列彩色特征图像 $u_{i(q)}v_{i(q)}^{\mathrm{H}}$ 的线性组合,其中奇异值 λ_i 表征彩色图像的不同分量的幅值(能量)。借助四元数主成分分析,讨论了彩色图像的压缩、去噪、增强、边缘检测等处理。

2. 提出一种基于分块 QSVD 和 Arnold 变换的抗几何攻击的鲁棒彩色图像水印方案。因为矩阵的奇异值有稳定性、缩放不变性、旋转不变性、平移不变性、对换不变性等优良性质,所以我们选择在彩色图像的 QSVD 变换域上嵌入和提取水印;为提高 QSVD 的速度、增大嵌入水印的容量,我们采用分块 QSVD 的方法;为增强提出方案的安全性和对裁剪攻击的鲁棒性,我们在水印嵌入前对它进行 Arnold 置乱预处理;为提高水印方案对旋转攻击的鲁棒性,我们采用对数极坐标映射(LPM)和相位相关方法,先求得几何攻

击的变换参数，再通过逆变换重新同步嵌入在奇异值中的水印和宿主图像，之后再进行水印提取操作。实验结果表明，我们的水印方案对高斯噪声、JPEG有损压缩、低通滤波、中值滤波、裁剪、缩放、循环平移、旋转等图像攻击都有很好的鲁棒性。

3. 利用四元数对三维转动的方便表述，构造四元数旋转边缘检测算子，对彩色图像进行边缘检测。彩色图像的边界定义为颜色(包括亮度、色度和饱和度)的不连续跳变。根据相同或相近的颜色矢量绕固定轴旋转360度后可重合或近似重合，相减后为0或近似为0(黑色)；而以不同的颜色矢量旋转后不会重合，差不为0的区别来获得图像的边缘信息。实验表明，我们提出的四元数旋转边缘检测算子，能更好地保留原始彩色图像轮廓特征(既包括亮度跳变，也包括颜色跳变)，算法简单易行，检测效果好。

4. 浮雕显示是指通过一定的处理，使二维平面图像产生犹如雕刻般的凹凸效果。它能艺术地再现图像，在平面上凸现景物及其层次，凝重而富有感染力，给人以强烈的视觉冲击。我们提出一种利用四元数旋转边缘检测算子进行图像浮雕显示的新方法。实验结果表明，该方法计算方便，运算速度快，显示效果类似甚至优于广义模糊算子方法和形态学边缘检测算子方法，可以快速有效地获得满意的浮雕图像。

5. 在四元数球面线性插值(Slerp)基础上，我们推导了双球面线性插值(BiSlerp)公式，并在四元数上用球面线性插值、双球面线性插值、双线性插值、双三次插值以及Thiele型连分式建立的自适应切触有理插值等方法进行了彩色图像放大的实验，对实验结果做了比较、分析。BiSlerp方法放大效果接近主流的Bilinear插值方法，但因为只用了近邻的4个点，所以插值精度不如用了$4\times4=16$个邻点信息的双三次插值。而Thiele型连分式建立的自适应切触有理插值效果最好，有效地保持了图像的高频信息，即边缘信息和细节信息，放大的图像清晰度高，锐度好。

6. 四元数可方便地表示旋转，但四元数代数主要应用于三维空间。四维以上的空间，四元数就失效了。于是我们介绍了可以推广到n维空间的，在几何对象的表示和变换计算上更加通用、直观、简洁、高效的共形几何代数(CGA)。我们利用CGA在几何实体的表示和运动计算上做了一些实验，并对四元数和共形几何代数在对象旋转计算上的异同点做了比较。

关键词：四元数；四元数矩阵奇异值分解；水印；阿诺德变换；对数极坐标映射；相位相关；峰值信噪比；归一化互相关；四元数傅立叶变换；四元数卷积；四元数相关；四元数滤波器；边缘检测；浮雕显示；自适应切触有理插值；双球面线性插值；共形几何代数

Abstract

Quaternion algebra was founded by Irish mathematician Sir William Rowan Hamilton between 1840s and 1860s. Quaternions form a noncommutative extension of complex numbers in the 4-D real number space. It is a finite-dimensional associative division algebra over the real numbers, and is also a subalgebra of Clifford algebra. In the late 1960s, quaternions began to acquire a practical application in the classical mechanics. In 1985, Shoemake introduced quaternions to computer graphics for representing rotations in 3D space. Ever since then quaternions have been widely used in the realms such as computer graphics, computer animation, computer vision and robotics, etc. In 1996, the quaternion model of color images was proposed, and the application research of quaternion in image processing began to develop.

In thisthesis, we combined the quaternion methods with the specialized knowledge of digital image processing, especially color image processing, taking theories including quaternion matrix singular value decomposition, quaternion Fourier transform, quaternion convolution, quaternion spherical linear interpolation, compact quaternion representation of 3D rotations, etc. as the main mathematical tools, assisted with other signal processing methods, such as principal component analysis, log-polar mapping, phase correlation, Nyquist-Shannon sampling theorem, and so on, to study and discuss some issues in color image processing. The main research work and contributions are as follows:

1. On the basis of theories of quaternion and quaternion matrix, we

constructed the equivalent real matrix of quaternion matrix, and discussed the relationship between the quaternion matrix singular value decomposition (QSVD) and its equivalent real matrix singular value decomposition. Under the quaternion model of color images, quaternion matrix singular value decomposition is used for color image decomposition: $X_{(q)} = U_{(q)} \Lambda V_{(q)}^H = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i u_{i(q)} v_{i(q)}^H$. The color image matrix is decomposed into linear combination of a series of color eigen-images, in which singular value represents the energy of each eigen-image in the original image. With the help of quaternion principal component analysis, we discussed the color image processing, such as compression, denoising, enhancement, edge detection, and so forth.

2. A robust color image watermarking scheme based on block QSVD and Arnold transformation with resistance to geometric attacks was proposed. Since singular values possess some excellent properties such as stability, scaling invariance, rotation invariance, translation invariance and transposition invariance, etc., we chose to embed and extract watermark in the QSVD transform domain of color images. In order to improve the QSVD speed and increase the capacity of watermark information embedded, we adopted the block QSVD method. For enhancing the security and robustness against cropping attacks, we employed Arnold scrambling pretreatment before embedding watermark. In order to strengthen the robustness of the proposed watermarking scheme against rotation attacks, we used log-polar mapping (LPM) and phase correlation methods, first calculating transformation parameters of geometric attacks, and then resynchronizing the watermark embedded in singular values and the host image through inverse transform before extracting watermark. Experimental results show that our watermarking scheme is robust to Gaussian noise, JPEG lossy compression, low-pass filtering, median filtering, cropping, scaling, cyclic translation, rotation and other image at-

tacks.

3. Making use of the capability of quaternions to succinctly represent 3D rotations, we constructed quaternion rotation edge detection operator for color images. The edge of color images is defined as the discontinuous jump of colors (including luminance/brightness, hue and saturation). The same or similar color vectors lying inside a locally homogenous region will overlap or approach to overlap after revolving 360 degrees around a fixed axis, the difference between which will be 0 or close to 0 (black or look like black). However different color vectors will not overlap after revolving, which results in the nonzero difference, indicating the current color pixel lies on an edge. Experiments show that the more contour features (including both luminance transition and color transitions) of the original color image can be preserved by using quaternion rotation edge detection operator. The test results illustrate the feasibility and effectivity of the proposed algorithm.

4. The relief display of a two dimentional plane image will produce sculptural embossing effect by a certain treatment. It can reproduce art images, highlighting scenery and its level in the plane, dignified and full of infection, giving a strong visual impact. We put forward a new method for image embossed display using quaternion rotation edge detection operator. The experimental results show that the method is easy to implement and executes quickly, the display effect is similar to or even better than that by the generalized fuzzy operator method and morphological edge detection operator method. Through our approach we can quickly and efficiently obtain satisfactory relief images.

5. By means of the quaternion spherical linear interpolation (Slerp), we derived a bi-spherical linear interpolation formula (BiSlerp). And we experimented on color image magnification in quaternion space using various method: quaternion spherical linear interpolation, bi-spherical linear interpolation, bilinear interpolation, bicubic interpolation, as well as the

adaptive osculatory rational interpolation established by Thiele-type continued fractions. The experimental results were compared and analyzed. The enlargement effect of BiSlerp method approaches that of mainstream bilinear interpolation method. But due to using 16 neighboring points, the bicubic interpolation method is preferable in the interpolation accuracy to BiSlerp method, which uses only the information of four neighboring points. The adaptive osculatory rational interpolation method established by Thiele-type continued fractions is the best, effectively maintaining the high-frequency information of images, namely, edge information and detail information, the enlarged images having better clarity and sharpness.

6. Quaternions can represent rotation easily and compactly, but quaternion algebra is mainly used in three-dimensional space. For spaces above 4D, quaternion becomes ineffective. So we introduced the conformal geometric algebra (CGA), which can be extended to n-dimensional space, and more universal, intuitive, simple, efficient in geometric representation and transform calculation of objects. We experimented on the representation of geometric entities and the computation of motions with CGA, and compared the similarities and differences of quaternion and conformal geometric algebra in rotation description.

Keywords: Quaternion, Quaternion matrix singular value decomposition (QSVD), Watermark, Arnold transformation, Log-polar mapping (LPM), Phase correlation, Peak signal-noise ratio (PSNR), Normalized Cross-correlation (NC), Quaternion Fourier transform, Quaternion convolution, Quaternion correlation, Quaternion filter, Edge detection, Relief display, Adaptive osculatory rational interpolation, Bi-spherical linear interpolation (BiSlerp), Conformal geometric algebra (CGA)

目 录

第一章 绪 论

四元数(Quaternion)的数学概念最先是由爱尔兰数学家哈密顿(W. R. Hamilton)爵士在1843年提出的,它把复平面推广到了四维空间([H43],[H44a],[H44b])。1833年,哈密顿把复数看成实数对来处理,以前笼罩在复数上的神秘色彩被排除,复数系对于研究平面上的向量和转动是很方便的一种数系。哈密顿试图设计一种类似的数系以研究三维空间的向量和转动。他的目的是为研究空间几何找到类似解决平面问题中的复数方法。哈密顿的四元数有一个时期(1850—1900年)受到许多人的欢迎,认为它将成为未来的物理学家们不可缺少的工具。哈密顿的学生Maxwel曾用四元数理论和向量分析理论建立电磁场理论。但是,四元数的地位后来被英国数学家凯利(Arthur Cayley)于1857年发现的矩阵代数及美国物理学家和数学家吉布斯(U. W. Gibbs)所创立的向量分析完全取代。由于在很长一段时间里,这种数学工具的优越性尚未显示出来,四元数没有被人们熟悉,也没有得到应有的重视。直到二十世纪六十年代末,这种方法才开始获得实际应用。四元数最初只是在刚体力学中得到应用。随着近代控制理论、空间技术、计算技术,特别是捷联惯导技术的发展,四元数的优越性才重新引起人们的重视。

1.1 理论研究背景

1.1.1 四元数的起源

哈密顿与四元数

威廉·卢云·哈密顿(William Rowan Hamilton),爱尔兰数学家,1805

年8月4日生于爱尔兰都柏林，1865年9月2日卒于都柏林附近的敦辛克天文台。哈密顿的父亲是个律师，母亲来自以智力超群而闻名的家族。他的叔叔——著名的语言学家詹姆士，指导了他大学前的教育。13岁时，哈密顿已不同程度地掌握了13种语言，14岁时因在都柏林欢迎波斯大使的宴会上用波斯语与大使交谈而出尽风头。他也像戴维一样，是位业余诗人，塞缪尔·泰勒·柯勒律治和威廉·华兹华斯都是他的朋友。1821年之前，他的大部分精力是用在语言学和文学上的。

哈密顿自幼喜欢算术，计算很快。1818年遇到美国"计算神童"Z. 科尔本(Zerah Colburn)后对数学产生了更深厚的兴趣。不久以后，哈密顿偶然见到I. 牛顿(Newton)《通用算术》(关于代数和方程论)的抄本。他贪婪地读它，之后又学习掌握了解析几何和微积分。1820年和Z. 科尔本再相逢时，哈密顿已阅读了牛顿的《自然哲学的数学原理》(Mathematical principles of natural philosophy)，并感到自己完全被对数学越来越浓厚的兴趣占据。接着，他又读欧洲大陆的数学巨著。1821年8月，当他阅读了B. 劳埃德(B. Lloyd)的解析几何后，觉得大开眼界。他自修数学，在17岁时，他通知爱尔兰的皇家天文学家说，他发现了拉普拉斯《天体力学》中的数学错误，使天文学家大为惊异。这也让他得到好处，在1823年他以入学考试第一名的成绩考入都柏林大学三一学院，得到正规的大学训练。在古典文学及数学方面以最优异成绩毕业之后，他22岁就被任命为都柏林的三一学院的天文学教授。大学毕业后，在大学研究者和天文台工作者两种职业之间，哈密顿选择了后者，接受这个职位的原因在于他知道在天文台工作可以自由地搞理论，这有助于建立光的波动理论。量子力学和波动力学在数学上来说是等价的！事实上，当人们追寻它们各自的家族史时，发现它们都是从经典的哈密顿函数而来，只不过一个是从粒子的运动方程出发，一个是从波动方程出发罢了。而光学和运动学，早就已经在哈密顿本人的努力下被联系在了一起，这真叫"本是同根生"。哈密顿于1827年建立了光学的数学理论。后来又把这种理论移植到动力学中去，提出哈密顿原理，把广义坐标和广义动量作为典型变量来建立动力学方程，推动了变分法和微分方程理论的进一步研究，并在现代理论物理中得到了广泛的应用。

由于哈密顿的学术成就和声望，1835年在都柏林召开的不列颠科学进

步协会上被选为主席，同年被授予爵士头衔。1836 年，皇家学会因他在光学上的成就而授予皇家奖章。1837 年，哈密顿被任命为爱尔兰皇家科学院院长，直到 1845 年。1863 年，新成立的美国科学院任命哈密顿为 14 个国外院士之一。哈密顿有兄弟姐妹八人，家庭负担很重，为减轻父亲经济压力，他毕业后带着三个妹妹住到敦辛克天文台。哈密顿不擅长天文观测，因为在十九世纪早期，天文台的工作就是尽可能精确地测量天体可能的位置，而哈密顿却是十九世纪最富有想象力的数学家之一。在天文台工作的五年中，他仍主要从事理论研究，但因与外界很少联系，工作成果并未引起重视。由于不愉快的婚姻，哈密顿的家庭生活也很糟糕。早在 1824 年 8 月，他的叔叔詹姆士带他去夏山(Summerhill)遇到了迪士尼一家时，他就无可救药地爱上了他们的女儿凯瑟琳·迪士尼(Catherine Disney)，但凯瑟琳第二年嫁给了大她 15 岁的有钱的牧师，哈密顿却终身不能忘情。在恋爱生活中一再碰壁之后，他于 1833 年草率地同海伦·贝利(Helen Bayly)结婚，虽然生育二子一女，但因感情不和而经常分居。他在生命的最后 20 年里，过着酗酒和潦倒的生活，他的书房像猪舍，他经常不正规用餐，而是边吃边工作，有时没有饭吃，就以酒当饮料喝。长此以往，造成酒精依赖和酒精中毒，哈密顿于 1865 年死于饮酒过度和食用过饱促成的严重痛风发作。他去世后，留下大批包含未发表过的研究结果的文章，在宝贵的论文手稿中，混杂着大量的晚餐碟子，和已脱水的、吃剩的排骨及三明治等残物。

哈密顿最重要的工作是 1843 年关于所谓“四元数”的发现。高斯把虚数和实数结合在一起，用平面的点来表示，并指出处理这种复数的方法。哈密顿试图把它推广到三维，但他发现他找不到一种没有矛盾(保持人们熟悉的运算定律)的处理方法，直到他想到乘法交换律不一定成立。1843 年 10 月 16 日他跟他的妻子在都柏林的皇家运河(Royal Canal)上散步时，四元数的观念忽然在他的灵感中闪现。他突然想到 $i^2=j^2=k^2=ijk=-1$ 的方程解。之后哈密顿立刻将此方程刻在附近布鲁翰穆桥(Brougham Bridge，现称为金雀花桥 Broom Bridge)上，今日该地立匾为记，如图 1－1 所示。这条方程放弃了交换律，在当时属于极端的想法，那时还未发展出向量和矩阵。乘法交换律保证 A 乘 B 等于 B 乘 A(即如果 8 乘 6 等于 48，那么 6 乘 8 也等于 48)，这似乎是一种永恒的，亘古不变的真理。然而，哈密顿证明他可以为他

的四元数建立起一种合乎逻辑的代数，只要使 B 乘 A 等于 $-A$ 乘 B 即可。这似乎违反常识，但是哈密顿，正如洛巴切夫斯基一样，证明真理是相对的，它依赖于你所依据的公理。七八十年之后，这个时代来临了，这时非交换代数成为量子力学以及真正了解原子的内部结构的基础。

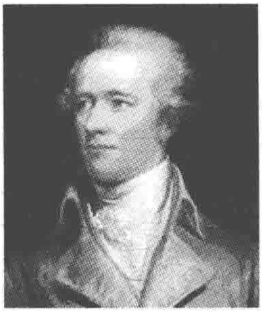
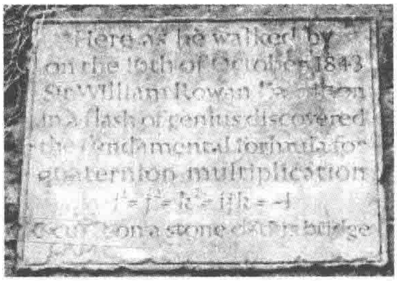

图 1－1　哈密顿与创立四元数的纪念匾

哈密顿在数学上的主要贡献是发现了“四元数”，并建立了四元数的运算法则。他亦把四元数描绘成一个有序的四重实数，一个标量(a)和向量(bi＋cj＋dk)的组合。若两个标量为零的四元数相乘，所得的标量部便是原来的两个向量的标量积的负值，而所得的向量部则为向量积的值，但它们的重要性仍有待发掘。四元数的发现为向量代数和向量分析的建立奠定了基础，而四元数系又构成了以实数域为系数域的有限维可除代数。因此，四元数的产生对代数学的发展具有十分重要的意义。

在生命的最后 20 多年中，哈密顿花费了大部分时间和精力推演其四元数，他认为这将在数学物理中引起巨大的变革，而不再转向新的研究领域。他的伟大著作《四元数讲义》(Lectures on Quaternions)发表于 1853 年([H53])。在这之后，处于生病和婚姻争吵的可悲的最后年月里，哈密顿预计用 2 年时间写一本扩展的 400 页左右的《四元数原理》(Elements of Quaternions)。但是，实际上这本书花了 7 年时间，页数也是预期的两倍，而且不愉快的婚姻带来的潦倒生活使他 1865 年就死于酒精中毒，最后一章并未完成。《四元数原理》([H66])在他死后出版，页数长达 800 多页。

哈密顿工作勤奋，思想活跃。他发表的论文一般都很简洁，别人不易读懂，但手稿却很详细，因而很多成果都由后人整理而得。仅在三一学院图书