



“十二五”普通高等教育本科国家级规划教材

高等学校经济学类核心课程教材

计量经济学 (第四版) 学习指南与练习

潘文卿 李子奈 编著

高等教育出版社



“十二五”



及规划教材

高等学校经济学类核心课程教材

计量经济学 (第四版) 学习指南与练习

潘文卿 李子奈 编著

Jiliang Jingjixue (Disiban) Xuexi Zhinan yu Lianxi



高等教育出版社·北京

内容简介

本书完全按照“十二五”普通高等教育本科国家级规划教材——《计量经济学(第四版)》的内容体系编写,各章主要根据经典的截面数据单方程计量经济学模型、扩展的截面数据单方程计量经济学模型、时间序列计量经济学模型等相对应的章节编写了内容提要与学习指南、典型例题分析、教材练习题及参考解答三部分主体内容。其中,内容提要与学习指南列出了各章的知识结构、归纳了主要学习内容、提示了学习要点与应关注的问题,并对典型例题与教材练习题中所要关注的知识点进行了总结与提炼;典型例题分析对各章的典型题型作了较为详细的分析与解答,它包括了主教材内容中由于篇幅限制只给出相关结论而没有细致讨论的问题及其解答过程,也给出了主教材没有涉及但在计量经济学的学习及对相关知识的深入理解方面都非常重要的知识点;教材练习题及参考解答提供了主教材各章习题的参考解答,一些重要的知识点也出现在这部分练习题及其解答中。为了加深和巩固计量经济学的相关知识,本书还补充了一部分练习题以提供更多的练习机会,同样地,我们也给出了补充练习题的参考解答。

本书与《计量经济学(第四版)》配套使用,也可以独立成册。本书在练习部分设置了概念辨析、思考问答、推理证明与计算分析四大类题型。所有计算题都采用 Eviews 软件解答,书中的相关习题解答部分都以贴图的形式给出了 Eviews 软件下的详细操作步骤。因此,无论对相关专业的学生,还是对经济学研究和经济分析领域的其他人员,本书都是一本更具操作性与实用性的读物。

图书在版编目(CIP)数据

计量经济学(第四版)学习指南与练习 / 潘文卿,
李子奈编著. —北京:高等教育出版社, 2016.7

ISBN 978-7-04-045553-3

I. ①计… II. ①潘… ②李… III. ①计量经济学—
高等学校—教学参考资料 IV. ①F224.0

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2016)第 104925 号

策划编辑 施春花 责任编辑 施春花 封面设计 杨立新 版式设计 于 婕
责任校对 陈旭颖 责任印制 朱学忠

| | | | |
|------|-------------------|------|---|
| 出版发行 | 高等教育出版社 | 网 址 | http://www.hep.edu.cn |
| 社 址 | 北京市西城区德外大街 4 号 | | http://www.hep.com.cn |
| 邮政编码 | 100120 | 网上订购 | http://www.hepmall.com.cn |
| 印 刷 | 高教社(天津)印务有限公司 | | http://www.hepmall.com |
| 开 本 | 787mm×1092mm 1/16 | | http://www.hepmall.cn |
| 印 张 | 17 | 版 次 | 2016 年 7 月第 1 版 |
| 字 数 | 340 千字 | 印 次 | 2016 年 7 月第 1 次印刷 |
| 购书热线 | 010-58581118 | 定 价 | 36.00 元 |
| 咨询电话 | 400-810-0598 | | |

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换

版权所有 侵权必究

物料号 45553-00

前言

计量经济学作为经济学科最重要的方法论课程在中国高等教育中已受到越来越多的关注与重视，它与微观经济学、宏观经济学一起成为经济学科的“三大支柱”，当前国内各高等院校的经济类与管理类学科几乎全部开设了不同层次的计量经济学课程。

由于计量经济学是一门集经济学理论、统计学与数学为一体的交叉性学科，经济类与管理类的学生在学习常常感到有较大困难。这些困难一方面表现在对计量经济学理论的理解与把握上，另一方面表现在运用计量经济学的技术手段对现实问题的分析应用上。为此，对理论的提炼与梳理以及必要的应用练习在克服上述困难方面就显得格外重要。

在教学过程中我们发现，由于计量经济学自身的知识体系庞杂，而大多数计量经济学教材是在有限的时间与篇幅里讲解计量经济学的主要基础理论体系，因此不可能覆盖所有的知识点。同时，计量经济学涉及较多的数学与统计学等数理知识，而有些数理知识本身就呈现推理冗长难懂的特征，因此大多数计量经济学教材都将相关结论性的知识点列入，而将其推理过程略去。这样做可使该课程的教授与学习更好地保持计量经济学自身理论逻辑的连贯性，从而使学生感觉是在学习经济学而不是数学或统计学。当然，在学习有关知识点后，大多数学生自然也想知道相关的数理过程，以便对所学内容有更深入的理解与把握。针对上述情况，受高等教育出版社委托，我们在对《计量经济学(第三版)》教材进行全面修订的同时，也修订了其配套教材《计量经济学学习指南与练习》，以期帮助学生深入、透彻地理解和掌握计量经济学的基本理论，并在练习中应用理论。

这本《计量经济学(第四版)学习指南与练习》完全按照“十二五”普通高等教育本科国家级规划教材《计量经济学(第四版)》的全新内容体系编写，各章包括内容提要、学习指南、典型例题分析、教材练习题及参考解答三部分主体内容。内容提要、学习指南首先以结构图的形式列出了每章的知识结构，之后对每章的主要学习内容作了简要的归纳与总结，提示了教材的学习要点与应关注的问题，最后对典型例题与主教材练习题中所要关注的知识点进行了总结与提炼，以帮助学生在使用本书时明确相关的知识内容。典型例题分析对每章挑选的典型例题作了较为详细的分析与解答，所选例题中包括了主教材内容中由于篇幅限制只给出相关结论而没有细致讨论的问题，也给出了主教材没有涉及但在计量经济学的学习与对相关知识的深入理解方面都非常重要的知识点。教材练习题及参考解答是对主教材中每章习题的参考解答。同样地，主教材中一些没有展

开讨论的问题，有的以练习的方式出现在本书每章的练习题及其解答中，它们对计量经济学基本理论的巩固和把握很有帮助。除此之外，本书还精选了一部分补充练习题并给出了参考解答，目的是增加练习量以达到对课程内容的熟练掌握。

本书是高等教育出版社面向 21 世纪课程教材《计量经济学（第四版）》的配套读本，当然也可以独立成册。本书除内容提要和学习指南部分概括、提炼每一章的学习重点外，还在练习部分设置了概念辨析、思考问答、推理证明与计算分析四大类题型。所有计算题都采用 Eviews 软件进行，书中的相关习题解答部分都以贴图的形式给出了 Eviews 软件下的详细操作步骤。因此，无论对于在校学生，还是对于经济学研究和经济分析领域的其他人员，本书都是一本更具操作性与实用性的读物。

由于我们的水平有限，对计量经济学的理解和掌握不免存在一定的局限性。因此，本书可能存在不妥甚至错误之处，恳请读者批评指正，以便对其不断进行修正与完善。

潘文卿，李子奈

2016 年 4 月于清华大学

目录

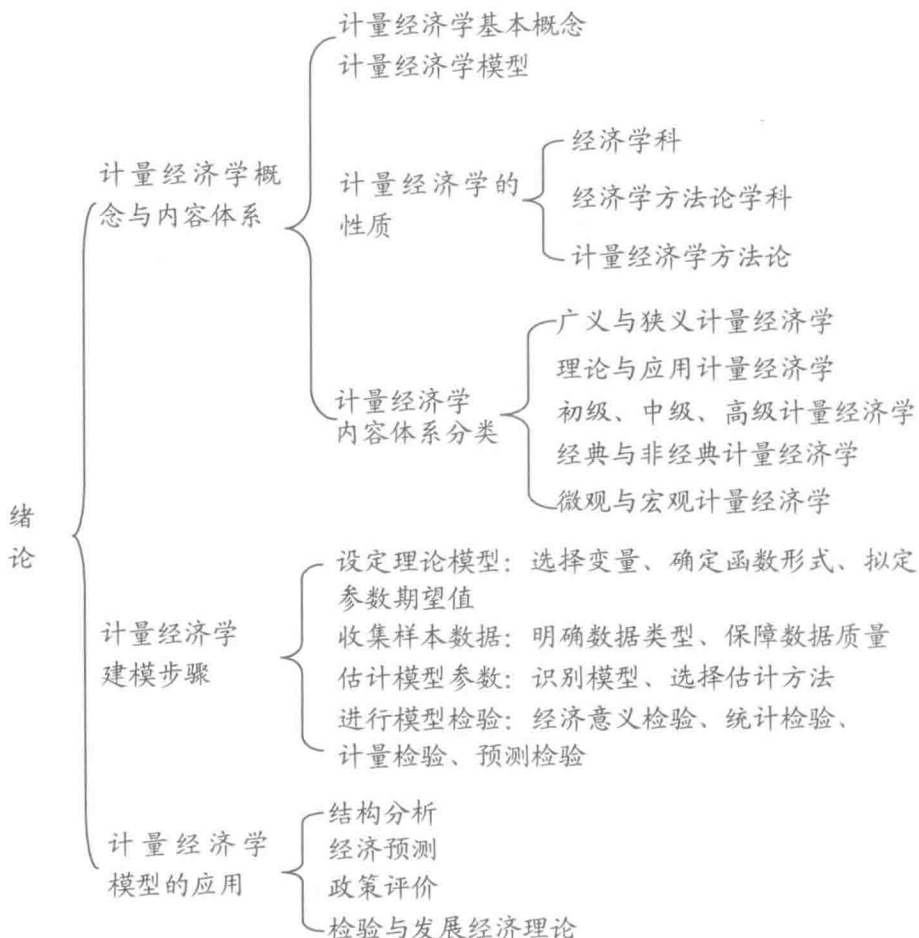
| | | | |
|--------------------------------|-----|--------------------------------|-----|
| 第一章 绪论 | 1 | 一、内容提要和学习指南 | 171 |
| 一、内容提要和学习指南 | 1 | 二、教材练习题及参考解答 | 172 |
| 二、教材练习题及参考解答 | 2 | 补充练习题 | 184 |
| 第二章 经典单方程计量经济学模型： 一元线性回归模型 | 6 | 第二章 经典单方程计量经济学 模型：一元线性回归模型 | 184 |
| 一、内容提要和学习指南 | 6 | 第三章 经典单方程计量经济学 模型：多元线性回归模型 | 188 |
| 二、典型例题分析 | 8 | 第四章 经典单方程计量经济学 模型：放宽基本假定的模型 | 194 |
| 三、教材练习题及参考解答 | 16 | 第五章 时间序列计量经济学模型 | 197 |
| 第三章 经典单方程计量经济学模型： 多元线性回归模型 | 29 | 第六章 非经典截面数据计量 经济学模型 | 200 |
| 一、内容提要和学习指南 | 29 | 补充练习题参考解答 | 203 |
| 二、典型例题分析 | 31 | 第二章 补充练习题参考解答 | 203 |
| 三、教材练习题及参考解答 | 45 | 第三章 补充练习题参考解答 | 213 |
| 第四章 经典单方程计量经济学模型： 放宽基本假定的模型 | 64 | 第四章 补充练习题参考解答 | 227 |
| 一、内容提要和学习指南 | 64 | 第五章 补充练习题参考解答 | 239 |
| 二、典型例题分析 | 67 | 第六章 补充练习题参考解答 | 246 |
| 三、教材练习题及参考解答 | 83 | 附录 1 《计量经济学（第四版）》 目录 | 249 |
| 第五章 时间序列计量经济学模型 | 107 | 附录 2 统计表 | 253 |
| 一、内容提要和学习指南 | 107 | 一、标准正态分布表 | 253 |
| 二、典型例题分析 | 110 | 二、 χ^2 分布表 | 254 |
| 三、教材练习题及参考解答 | 125 | 三、 t 分布表 | 255 |
| 第六章 非经典截面数据计量经济学 模型 | 138 | 四、 F 分布表 | 256 |
| 一、内容提要和学习指南 | 138 | 五、D.W. 检验上下界表 | 262 |
| 二、典型例题分析 | 141 | 六、协整检验临界值表 | 264 |
| 三、教材练习题及参考解答 | 163 | | |
| 第七章 计量经济学应用模型 | 171 | | |

第一章 绪论



一、内容提要和学习指南

1. 知识结构



2. 内容提要和学习指南

本章是全课程的纲，主要介绍计量经济学的基本概念、经典计量经济学模型的建模

步骤和要点,以及计量经济学模型的应用三方面的内容。

计量经济学是经济学的一个重要分支,以揭示经济活动中客观存在的数量关系的理论与方法为主要内容,其核心是建立计量经济学模型。计量经济学的内容体系包括广义计量经济学和狭义计量经济学,理论计量经济学和应用计量经济学等,有初级、中级与高级三个层次。计量经济学在经济学科中已占据了重要的地位。

计量经济学是一门经济学科,更进一步说,计量经济学是一门经济学方法论学科。计量经济学的产生和迅速发展,集中体现了归纳法或者说经验检验在经济学研究中的兴起。然而,不应由此而简单地断言,计量经济学仅仅是经验归纳法。计量经济学应用研究包含两大基本步骤:设定模型和检验模型,前者属于演绎法的范畴,后者则属于归纳法的范畴。因此,计量经济学既是归纳的,又是演绎的,演绎推理和归纳推理是紧密结合在一起的,这种结合不仅意味着彼此补充,也导致了彼此限制。而传统的计量经济学教科书,都是以模型估计和检验方法作为核心内容,甚至是全部内容。也就是说,计量经济学课程所讲授的,并不是计量经济学模型方法的全部,只是其中的一部分。

计量经济学的建模步骤包括理论模型的设定、样本数据的收集、模型参数的估计与模型的检验四个方面。理论模型的设定是建立计量经济学模型的第一步,包括了选择变量,确定变量间的数学关系,以及拟定模型中参数的数值范围。在样本数据的收集阶段,主要关注数据类型与数据质量,它们对所建模型的好坏有着较大的影响。模型参数的估计是建立计量经济学模型的核心,涉及对模型的识别、估计方法的选择等多个方面。模型的检验包括经济意义检验、统计检验、计量检验以及预测检验等。一个成功的计量经济学模型离不开对经济理论的深刻领会和对建模方法的熟练掌握,并要收集加工出高质量的统计数据。经济理论、建模方法与高质量的数据是计量经济学模型成功的三要素。

计量经济学模型的应用主要涉及四个方面:结构分析、经济预测、政策评价,以及检验与发展经济理论。结构分析就是对经济现象中变量间关系所进行的研究,主要方法有弹性分析、乘数分析与比较静力分析。经济预测包括短期预测与中长期预测。政策评价主要指研究不同的政策对经济运行的影响,并从中选择相对适当的政策的一种模拟性试验,起到“经济政策实验室”的作用。检验与发展经济理论则是通过实际数据考察理论的适用性并发展新的适用的经济学理论。

二、教材练习题及参考解答

1. 什么是计量经济学?计量经济学方法与一般经济数学方法有什么区别?

解答 计量经济学是经济学的一个分支学科,以揭示经济活动中客观存在的数量关

系为主要内容，是由经济理论、统计学和数学三者结合而成的交叉性学科。

计量经济学方法揭示经济活动中具有因果关系的各因素间的定量关系，它用随机性的数学方程加以描述；而一般经济数学方法揭示经济活动中各因素间的理论关系，更多地用确定性的数学方程加以描述。

2. 计量经济学的研究对象和内容是什么？计量经济学模型研究的经济关系有哪两个基本特征？

解答 计量经济学的研究对象是经济现象，主要研究经济现象中的具体数量规律，换言之，计量经济学是利用数学方法，根据统计或调查测定的经济数据，对反映经济现象本质的经济数量关系进行研究。计量经济学的内容大致包括两个方面：一是方法论，即计量经济学方法或理论计量经济学；二是应用，即应用计量经济学。无论是理论计量经济学还是应用计量经济学，都包括理论、方法和数据三要素。

计量经济学模型研究的经济关系有两个基本特征：一是随机关系，二是因果关系。

3. 为什么说计量经济学模型研究是演绎和归纳的结合？

解答 计量经济学的产生和迅速发展，集中体现了归纳法或者说经验检验在经济学研究中的兴起。计量经济学模型研究包含两大基本步骤：设定模型和检验模型。前者是由一定的前提假设出发，经由逻辑变形而导出可检验的理论假说，并将之形式化为数理模型，属于演绎法的范畴；后者则是依托于样本数据，对模型进行回归估计和统计检验，并根据检验结果作出在一定概率水平上接受或拒绝原理论假说的判断，属于归纳法的范畴。如果缺少前一个步骤，而仅仅从事经济数据的调查、收集、整理和统计分析，那就不再是计量经济学，而是经济统计学的工作；如果缺少后一个步骤，而仅仅对经济变量之间的逻辑关系进行数理推导，那也不是计量经济学，而是数理经济学的工作。计量经济学综合了上述两个步骤，将抽象演绎法和经验归纳法有机结合，或者说，它既是归纳的，又是演绎的。

在计量经济学模型研究中，演绎推理和归纳推理是紧密结合在一起的，这种结合不仅意味着彼此补充，也导致了彼此限制。由于计量研究中归纳推理的作用在于检验演绎推理得出的理论假说，故而演绎阶段对归纳阶段形成了根本性的限制。当然，归纳阶段反过来也会对演绎阶段形成极大限制。从模型的基本形式到变量的选择，甚至最初研究主题的确定，都要受到既定的数据条件和已有的计量分析方法的局限。所以说，演绎法和归纳法是计量经济学的两翼，缺一不可，不能偏废。

4. 建立与应用计量经济学模型的主要步骤有哪些？

解答 建立与应用计量经济学模型的主要步骤如下：(1) 设定理论模型，包括选择模型所包含的变量，确定变量之间的数学关系和拟定模型中待估参数的数值范围；(2) 收

集样本数据,要考虑样本数据的完整性、准确性、可比性和一致性;(3)估计模型参数;(4)检验模型,包括经济意义检验、统计检验、计量检验和预测检验。

5. 计量经济学模型主要有哪些应用领域?各自的原理是什么?

解答 计量经济学模型主要有以下几个方面的用途:

(1) 结构分析,即研究一个或几个经济变量发生变化及结构参数的变动对其他变量乃至整个经济系统产生何种影响,其原理是弹性分析、乘数分析与比较静力分析;

(2) 经济预测,即进行中短期经济的因果预测,其原理是模拟历史,从已经发生的经济活动中找出变化规律;

(3) 政策评价,即利用计量经济学模型定量分析政策变量变化对经济系统运行的影响,是对不同政策执行情况的“模拟仿真”;

(4) 检验与发展经济理论,即利用计量经济学模型和实际统计资料实证分析某个理论假说正确与否,其原理是如果按照某种经济理论建立的计量经济学模型可以很好地拟合实际观察数据,则意味着该理论是符合客观事实的,否则,则表明该理论不能解释客观事实。

6. 模型的检验包括几个方面?其具体含义是什么?

解答 模型的检验主要包括经济意义检验、统计检验、计量检验和模型的预测检验四个方面。在经济意义检验中,需要检验模型是否符合经济意义,检验求得的参数估计值的符号与大小是否与根据人们的经验和经济理论所拟订的期望值相符合;在统计检验中,需要检验模型参数估计值的可靠性,即检验模型的统计学性质;在计量检验中,需要检验模型的计量性质,包括随机干扰项的序列相关性检验与异方差性检验、解释变量的多重共线性检验与内生性检验、模型设定的偏误性检验等;模型的预测检验主要检验模型参数估计量的稳定性及样本容量发生变化时的灵敏度,以确定所建立的模型是否可以用于样本观测值以外的范围。

7. 下列假想模型是否属于揭示因果关系的计量经济学模型?为什么?

(1) $S_t = 112.0 + 0.12R_t$, 其中 S_t 为第 t 年农村居民储蓄增加额(单位:亿元), R_t 为第 t 年城镇居民可支配收入总额(单位:亿元)。

(2) $S_{t-1} = 4\,432.0 + 0.30R_t$, 其中 S_{t-1} 为第 $t-1$ 年底农村居民储蓄余额(单位:亿元), R_t 为第 t 年农村居民纯收入总额(单位:亿元)。

解答 (1) 不是。因为农村居民储蓄增加额应与农村居民可支配收入总额有关,而与城镇居民可支配收入总额之间没有因果关系。

(2) 不是。第 t 年农村居民的纯收入对当年及以后年份的农村居民储蓄有影响,但并不对第 $t-1$ 年的储蓄产生影响。

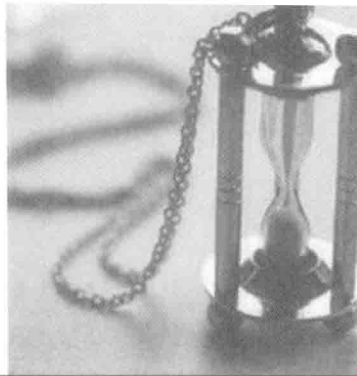
8. 指出下列假想模型中的错误, 并说明理由:

$$RS_t = 8\,300.0 - 0.24 \cdot RI_t + 1.12 \cdot IV_t$$

其中, RS_t 为第 t 年社会消费品零售总额(单位: 亿元), RI_t 为第 t 年居民收入总额(单位: 亿元)(城镇居民可支配收入总额与农村居民纯收入总额之和), IV_t 为第 t 年全社会固定资产投资总额(单位: 亿元)。

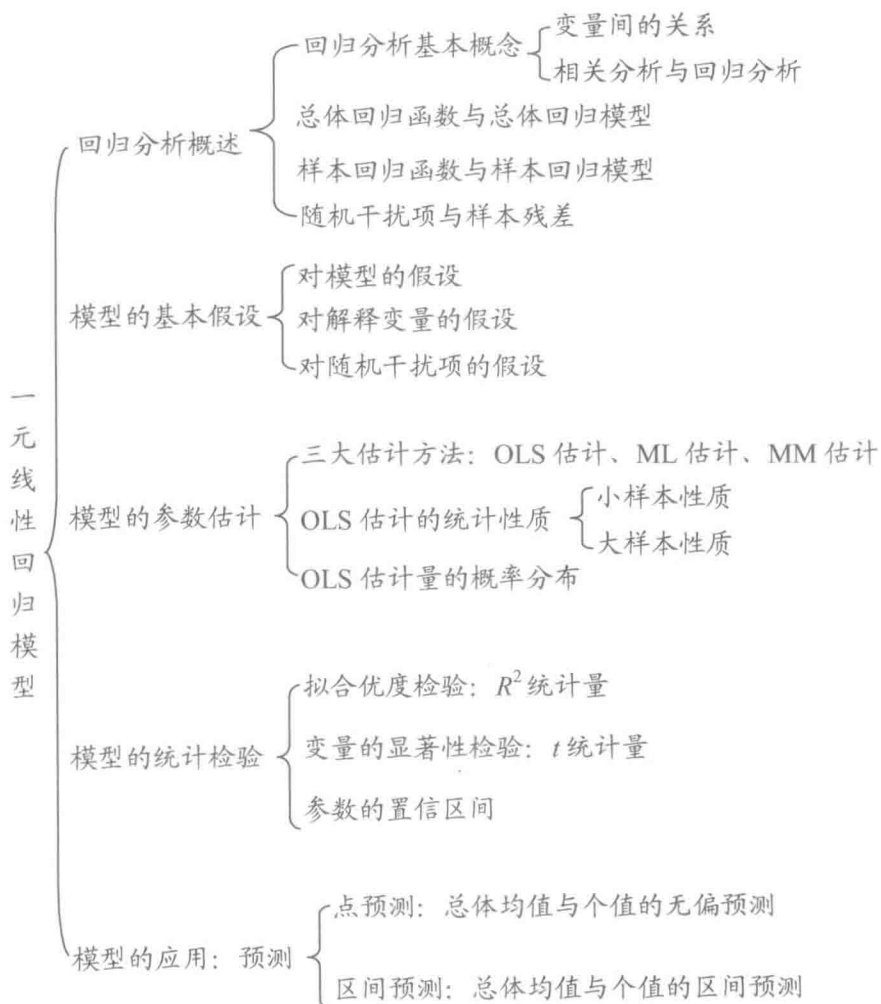
解答 一是居民收入总额 RI_t 前参数的符号有误, 应是正号; 二是全社会固定资产投资总额 IV_t 这一解释变量的选择有误, 它对社会消费品零售总额没有直接的影响。

第二章 经典单方程计量经济学模型：一元线性回归模型



一、内容提要和学习指南

1. 知识结构



2. 内容提要和学习指南

本章介绍了回归分析的基本思想与基本方法。首先本章从总体回归函数与总体回归模型、样本回归函数与样本回归模型这两组概念开始，建立了回归分析的基本思想。总体回归函数是对总体变量间关系的定量表述，一般描述为被解释变量的期望与解释变量间的某种函数关系，由总体回归模型在若干基本假设下得到。总体回归模型是被解释变量与解释变量间定量关系的另一种描述方式，这一描述的最大特征是引入了一个被称为随机扰动项或随机干扰项的随机变量，它本质上是其他影响着被解释变量但又未包含在模型中的所有因素的“综合体”。由于“总体”未知的原因，在现实中观测到的往往是总体中的一个样本，因此实际上是在样本回归模型下获得样本回归函数，并用它对总体回归函数做出统计推断。

本章学习的一个重点是如何获取线性的样本回归函数，主要涉及如下三大方法：普通最小二乘法(OLS)、极大似然估计法(ML)以及矩估计法(MM)。这三大方法作为计量经济学回归模型最主要的估计方法，将贯穿计量经济学学习的始终。而在初级阶段，OLS显得更为重要，需要重点掌握。

本章的另一个学习的重点是对样本回归函数能否代表总体回归函数进行统计推断，即进行所谓的统计检验。统计检验包括两个方面，一是先检验样本回归函数与样本点的“拟合优度”，二是检验样本回归函数与总体回归函数的“接近”程度。后者又包括两个层次：检验解释变量对被解释变量是否存在显著的线性影响关系，通过变量的 t 检验完成；检验样本回归函数与总体回归函数的“接近”程度，通过参数估计值的“区间检验”完成。

本章还有三方面的内容不容忽视。其一，若干基本假设。这些基本假设包括了对模型设定的假设、对解释变量的假设和对随机干扰项的假设三种类型。样本回归函数参数的估计、对参数估计量统计性质所进行的分析以及统计推断都是建立在这些基本假设之上的。同样地，计量经济学的大部分内容也都是围绕着这些假设的检验以及修正而展开的。其二，参数估计量统计性质的分析。这些性质包括小样本性质与大样本性质，特别地，无偏性、有效性与一致性构成了对样本估计量优劣的最主要的衡量准则。高斯-马尔可夫定理表明，当总体回归模型满足上述基本假设时，OLS 估计量是最佳线性无偏估计量。其三，运用样本回归函数进行预测，包括被解释变量条件均值与个值的预测、预测置信区间的计算及其变化特征等。

3. 典型例题与教材练习题知识点

在下面的典型例题分析与教材练习题及参考解答分析中，还有如下内容需要关注，它们在教材中没有特别提及或只给出了结论，但在计量经济学的学习与对相关知识的深

入理解方面是非常重要的。

第一，改变被解释变量的计量单位或解释变量的计量单位，会改变参数的估计结果和变量的拟合优度吗？

第二，对解释变量进行线性变换，如乘以或加上一个非零常数会改变模型参数的估计值以及拟合状况吗？

第三，当模型中不包含常数项时的回归称为“过原点回归”，过原点回归的 OLS 估计会出现什么样的变化？

第四，在一个样本下的 OLS 估计是通过使得样本回归模型的残差平方和最小化完成的。与该残差有关的一些性质称为 OLS 估计的“数值性质”，如残差和为零，残差项与解释变量不相关，残差项与估计的被解释变量不相关等，它们是如何推导出的？

第五，教材指出，在满足高斯基本假设的情况下，一元线性回归模型参数的 OLS 估计量是最佳线性无偏估计量，并证明了线性性与无偏性，那么最小方差性应如何证明呢？

第六，教材给出了一元线性回归模型随机干扰项方差的估计量表达式，如何推导此表达式？

第七，教材在给出一元线性回归模型预测的置信区间时用到了截距项与斜率项估计量的协方差的表达式，又将如何推导该表达式？

二、典型例题分析

例 1 令 Y 表示一名妇女生育孩子的生育率， X 表示该妇女接受教育的年数。生育率对教育年数的简单回归模型为

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X + \mu$$

(1) 随机干扰项 μ 包含什么样的因素？它们可能与教育水平相关吗？

(2) 上述简单回归分析能够揭示教育对生育率在其他条件不变下的影响吗？请解释。

解答 (1) 收入、年龄、家庭状况、政府的相关政策等也是影响生育率的重要因素，在上述简单回归模型中，它们被包含在了随机干扰项 μ 之中。有些因素可能与教育水平相关，如收入水平与教育水平往往呈正相关，年龄大小与教育水平呈负相关。

(2) 当归结在随机干扰项 μ 中的重要影响因素与模型中的教育水平 X 相关时，上述回归模型不能够揭示在其他条件不变下教育对生育率的影响，因为这时出现解释变量与随机干扰项相关的情形，违背了基本假设。

例 2 已知回归模型 $E = \alpha + \beta N + \mu$ ，式中 E 为某类公司一名新员工的起始薪金(单位：元)， N 为所受教育水平(单位：年)。随机干扰项 μ 的分布未知，其他所有假设都满足。

(1) 从直观及经济角度解释 α 和 β 。

(2) OLS 估计量 $\hat{\alpha}$ 和 $\hat{\beta}$ 满足线性性、无偏性及有效性吗？简单陈述理由。

(3) 对参数的假设检验还能进行吗？简单陈述理由。

解答 (1) $\alpha + \beta N$ 为接受过 N 年教育的员工的总体平均起始薪金。当 N 为零时，平均薪金为 α ，因此 α 表示没有接受过教育的员工的平均起始薪金。 β 是每单位 N 变化所引起的 E 的变化，即表示每多接受一年教育所对应的薪金增加值。

(2) OLS 估计量 $\hat{\alpha}$ 和 $\hat{\beta}$ 仍满足线性性、无偏性及有效性，因为这些性质的成立无需随机干扰项 μ 的正态分布假设。

(3) 如果 μ 的分布未知，则所有的假设检验都是无效的。因为 t 检验与 F 检验是建立在 μ 的正态分布假设之上的。

例 3 在例 2 中，如果被解释变量新员工起始薪金的度量单位由元改为百元，估计的截距项与斜率项有无变化？如果解释变量所受教育水平的度量单位由年改为月，估计的截距项与斜率项有无变化？

解答 首先考察被解释变量度量单位变化的情形。以 E^* 表示以百元为度量单位的薪金，则

$$E = E^* \times 100 = \alpha + \beta N + \mu$$

由此有如下新模型：

$$E^* = \frac{\alpha}{100} + \frac{\beta N}{100} + \frac{\mu}{100}$$

或

$$E^* = \alpha^* + \beta^* N + \mu^*$$

这里 $\alpha^* = \frac{\alpha}{100}$ ， $\beta^* = \frac{\beta}{100}$ ， $\mu^* = \frac{\mu}{100}$ ，即估计的截距项与斜率项均为原回归系数的 $\frac{1}{100}$ 。

再考虑解释变量度量单位变化的情形。设 N^* 为用月表示的新员工受教育的时间长度，则 $N^* = 12N$ ，于是

$$E = \alpha + \beta N + \mu = \alpha + \beta \frac{N^*}{12} + \mu$$

或

$$E = \alpha + \frac{\beta}{12} N^* + \mu$$

可见，估计的截距项不变，而斜率项将为原回归系数的 $\frac{1}{12}$ 。

例 4 假设居民户储蓄 (Y) 与收入 (X) 之间可建立如下形式的储蓄模型

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X + \mu, \quad \mu = \sqrt{X} \varepsilon$$

其中， ε 为具有零均值 $E(\varepsilon) = 0$ 、同方差 $\text{Var}(\varepsilon) = \sigma_\varepsilon^2$ 且与 X 相互独立的随机变量。

(1) 该模型满足零均值基本假设 $E(\mu | X) = 0$ 吗？

(2) 该模型满足同方差基本假设 $\text{Var}(\mu | X) = \sigma^2$ 吗？

(3) 如果该模型不满足同方差性, 试解释随着居民户收入 X 的提高, 随机扰动项 μ 的方差是增大还是缩小?

解答 (1) 由于 ε 与 X 相互独立, 则

$$E(\mu|X) = E(\sqrt{X}\varepsilon|X) = \sqrt{X}E(\varepsilon|X) = \sqrt{X}E(\varepsilon) = \sqrt{X} \cdot 0 = 0$$

即模型满足零均值基本假设。

(2) 由于 ε 与 X 相互独立, 则

$$\begin{aligned} \text{Var}(\mu|X) &= \text{Var}(\sqrt{X}\varepsilon|X) = X \cdot \text{Var}(\varepsilon|X) = X\{E(\varepsilon^2|X) - [E(\varepsilon|X)]^2\} \\ &= X\{E(\varepsilon^2) - [E(\varepsilon)]^2\} = X \cdot \text{Var}(\varepsilon) = X\sigma_\varepsilon^2 \end{aligned}$$

这里, 虽然 σ_ε^2 为常数, 但 $\text{Var}(\mu|X) = X\sigma_\varepsilon^2$ 却随 X 的变化而变化, 不是常数, 因此模型不满足同方差性。

(3) 由(2)知 $\text{Var}(\mu|X) = X\sigma_\varepsilon^2$, 故随机扰动项 μ 的方差会随着居民户收入 X 的提高而增大。事实上, 收入低的居民户, 对收入的支配范围往往很有限, 其绝大多数收入要用来购买食品、衣物等生活必需品, 不同低收入的居民户用于储蓄的额度往往是一个较为固定的小的额度, 差异不会太大。但对高收入居民户来说, 储蓄的大小在不同居民户之间差异很大, 有的家庭大部分收入用来消费, 储蓄额较低, 而有些家庭则可能有较高的储蓄额。

例 5 没有截距项的一元回归模型

$$Y_i = \beta_1 X_i + \mu_i$$

称为过原点回归(regression through the origin)。试证明:

(1) 如果通过相应的样本回归模型可得到通常的正规方程组

$$\begin{cases} \sum e_i = 0 \\ \sum e_i X_i = 0 \end{cases}$$

则可以得到 β_1 的两个不同的估计值:

$$\tilde{\beta}_1 = \frac{\bar{Y}}{\bar{X}}, \quad \hat{\beta}_1 = \frac{\sum X_i Y_i}{\sum X_i^2}$$

(2) 在基本假设 $E(\mu_i|X) = 0$ 下, $\tilde{\beta}_1$ 与 $\hat{\beta}_1$ 均为无偏估计量。

(3) 拟合线 $\hat{Y} = \hat{\beta}_1 X$ 通常不会经过均值点 (\bar{X}, \bar{Y}) , 但拟合线 $\tilde{Y} = \tilde{\beta}_1 X$ 则相反。

(4) 只有 $\hat{\beta}_1$ 是 β_1 的 OLS 估计量。

证明 (1) 由第一个正规方程 $\sum e_i = 0$ 得

$$\sum (Y_i - \tilde{\beta}_1 X_i) = 0$$

或

$$\sum Y_i = \tilde{\beta}_1 \sum X_i$$

求解得

$$\tilde{\beta}_1 = \frac{\bar{Y}}{\bar{X}}$$

由第二个正规方程 $\sum X_i(Y_i - \hat{\beta}_1 X_i) = 0$ 得

$$\sum X_i Y_i = \hat{\beta}_1 \sum X_i^2$$

求解得

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum X_i Y_i}{\sum X_i^2}$$

(2) 对于 $\tilde{\beta}_1 = \frac{\bar{Y}}{\bar{X}}$, 求条件期望

$$\begin{aligned} E(\tilde{\beta}_1 | X) &= E\left(\frac{\bar{Y}}{\bar{X}} | X\right) = E\left(\frac{\beta_1 \bar{X} + \bar{\mu}}{\bar{X}} | X\right) \\ &= E(\beta_1) + E\left(\frac{\bar{\mu}}{\bar{X}} | X\right) \\ &= \beta_1 + \frac{1}{\bar{X}} E\left(\frac{1}{n} \sum \mu_i | X\right) \\ &= \beta_1 + \frac{1}{n\bar{X}} \sum E(\mu_i | X) = \beta_1 \end{aligned}$$

对于 $\hat{\beta}_1 = \frac{\sum X_i Y_i}{\sum X_i^2}$, 取关于 X 的条件期望, 得

$$\begin{aligned} E(\hat{\beta}_1 | X) &= E\left(\frac{\sum X_i Y_i}{\sum X_i^2} | X\right) \\ &= \frac{1}{\sum X_i^2} \sum X_i E(Y_i | X) = \frac{1}{\sum X_i^2} \sum X_i E[(\beta_1 X_i + \mu_i) | X] \\ &= \frac{1}{\sum X_i^2} \beta_1 \sum X_i^2 + \frac{1}{\sum X_i^2} \sum X_i E(\mu_i | X) = \beta_1 \end{aligned}$$

(3) 要想拟合值 $\hat{Y} = \hat{\beta}_1 X$ 通过点 (\bar{X}, \bar{Y}) , $\hat{\beta}_1 \bar{X}$ 必须等于 \bar{Y} , 但

$$\hat{\beta}_1 \bar{X} = \frac{\sum X_i Y_i}{\sum X_i^2} \bar{X}$$

通常不等于 \bar{Y} 。这就意味着点 (\bar{X}, \bar{Y}) 不太可能位于直线 $\hat{Y} = \hat{\beta}_1 X$ 上。

相反地, 由于 $\tilde{\beta}_1 \bar{X} = \bar{Y}$, 所以直线 $\hat{Y} = \tilde{\beta}_1 X$ 经过点 (\bar{X}, \bar{Y}) 。

(4) OLS 要求残差平方和最小, 即

$$\text{Min} \quad \text{RSS} = \sum e_i^2 = \sum (Y_i - \hat{\beta}_1 X_i)^2$$

将 RSS 对 $\hat{\beta}_1$ 求偏导得

$$\frac{\partial \text{RSS}}{\partial \hat{\beta}_1} = 2 \sum (Y_i - \hat{\beta}_1 X_i)(-X_i) = 0$$

即

$$\sum X_i (Y_i - \hat{\beta}_1 X_i) = 0$$

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum X_i Y_i}{\sum X_i^2}$$