

高等数学

解题方法技巧归纳

(与同济大学数学系编·七版配套) 下册

◎毛纲源 编著

- △ 专题讲解 涵盖重点难点
- △ 通俗易懂 帮助记忆理解
- △ 同步学习 深入辅导指点
- △ 复习迎考 获益效果明显

买书送课：配套精品课程讲解



华中科技大学出版社

<http://www.hustp.com>

高等数学

解题方法技巧归纳

(与同济大学数学系编·七版配套)

下册

毛纲源 编著



华中科技大学出版社

<http://www.hustp.com>

图书在版编目(CIP)数据

高等数学解题方法技巧归纳. 下册 / 毛纲源编著. —武汉 : 华中科技大学出版社, 2017. 2

ISBN 978-7-5680-2596-6

I. ①高… II. ①毛… III. ①高等数学—研究生—入学考试—题解
IV. ①O13-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017)第 034153 号

高等数学解题方法技巧归纳(下册)

毛纲源 编著

Gaodeng Shuxue Jieti Fangfa Jiqiao Guina

策划编辑: 王汉江

责任编辑: 王汉江

特约编辑: 陈文峰 邱晓春

封面设计: 杨 安

责任监印: 周治超

出版发行: 华中科技大学出版社(中国·武汉) 电话: (027)81321913

武汉市东湖新技术开发区华工科技园 邮编: 430223

录 排: 世纪文都教育科技集团股份有限公司

印 刷: 北京市兴城福利印刷厂

开 本: 787mm×960mm 1/16

印 张: 30.75

字 数: 566 千字

版 次: 2017 年 2 月第 1 版第 1 次印刷

定 价: 52.00 元



本书若有印装质量问题, 请向出版社营销中心调换
全国免费服务热线: 400-6679-118 竭诚为您服务
版权所有 侵权必究

郑重声明

买正版图书 听精品课程

毛纲源编著的《高等数学解题方法技巧归纳(上册)》《高等数学解题方法技巧归纳(下册)》《线性代数解题方法技巧归纳》《概率论与数理统计解题方法技巧归纳》等系列图书因其通俗易懂,解题方法技巧独特而深受广大考生欢迎。

但当前某些机构和个人非法盗印毛纲源老师的图书,这类图书印制质量差,错误百出,不仅使考生蒙受金钱与精力的损失,而且误导考生,甚至毁掉考生的研究生考试前程。

为了保障考生、作者及出版社等多方的利益,文都教育特发如下郑重声明:

1. 对制作、销售盗版图书的网店、个人,一经发现,文都教育将严厉追究其法律责任;

2. 凡文都图书代理商、合作单位参与制作、销售盗版图书的,立即取消其代理、合作资格,并依法追究其法律和相关经济责任;

3. 对为打击盗版图书提供重要线索、证据者,文都图书事业部将给予奖励;若举报者为参加考研的考生,文都图书事业部将免费提供考研图书资料和考前预测试卷;

4. 全国各地举报电话:010-88820419,13488713672

电子邮箱:tousu@wendu.com

为方便考生使用考研数学系列正版图书,特提供网上增值服务,考生登录文都教育在线(www.wendu.com)可听取文都名师精品课程。

华中科技大学出版社
世纪文都教育科技集团股份有限公司
授权律师:北京市安诺律师事务所

刘 岩

2017年2月

前 言

高等数学(即微积分)是高校理工科最主要的基础课之一. 学生对它掌握得如何, 不仅直接关系到后续课程的学习, 而且对今后的提高与发展, 以及工作中的贡献, 都有着深远的影响. 为帮助广大学生和自学者学好高等数学, 给他们备考研究生入学考试提供一份复习资料, 编写了这套《高等数学解题方法技巧归纳》(上、下册).

本书自出版以来, 深受读者欢迎, 畅销全国. 本书的修订广泛听取了读者的意见, 对前一版本的内容作了适当的调整、充实和删改.

本书将高等数学的主要内容按问题分类, 通过引例归纳总结各类问题的解题规律、方法和技巧. 它不同于一般的教科书和习题解答, 自具特色.

本书注重一题多解, 注意分析各种解题方法的特点与联系, 分析题中条件与所得结果之间的联系, 灵活地将解题方法和技巧与所学基本理论联系起来. 这样不仅可以培养读者的灵活思维能力, 达到化难为易、举一反三的学习效果, 而且在学会解题的同时, 也必将会提高分析问题和解决问题的能力.

本书还注重各种重要题型的解法技巧的归纳和总结. 试题是无限的, 而题型是有限的, 只有掌握好各类题型的解法与技巧, 才能以不变应万变, 找到解题的切入点和突破口.

此外, 还在不少例题后加写“注意”部分, 内容涉及基本概念和基本理论的深入理解、解题方法小结及常见错误的剖析、某些例题中结论的推广等.

本书实例较多, 且类型广、梯度大. 例题和习题中一部分取材于面向 21 世纪课程教材《高等数学》(下册·第七版)(同济大学数学系编, 高等教育出版社)中的典型习题; 另一部分取材于历届的全国硕士研究生入学统一考试数学一、二、三试卷的考题.

考研试题既反映了“数学考试大纲”对考生的要求, 又蕴涵着在大纲指导下的命题思想. 通过对考研试题的研讨, 使有志于攻读硕士学位的学生“平战结合”, 了解考研试题的特点及其逐年发展趋势, 从知识上、题型上、方法和技巧上做好应试准备. 若把这些考研试题全部理解消化, 将为考研成功打下坚实的基础.

考研试题并非都是难题, 其突出特点是全面、准确地体现数学教学大纲和考研大纲的要求. 多做考题并由此总结、归纳解题规律、方法和技巧, 无疑对于启迪思维、开发智力、提高能力, 加深对高等数学基础知识的理解都是大有好处的.

本书可供全日制大专院校、电大、职大、函大、夜大等广大学生学习高等数学(微积分)时阅读和参考;对于自学者和有志攻读硕士研究生学位的青年,本书更是良师益友;对于从事高等数学(微积分)教学的教师也有一定的参考价值。

编写本书时,参阅了有关书籍,引用了一些例子,恕不一一指明出处,在此一并向有关作者致谢。孙晞老师参加书稿的校对和绘图,特此致谢。

尽管作者有过多年从事高等数学和考研数学辅导班的教学实践,但由于水平有限,加之时间仓促,书中难免有不足和错误之处,恳请读者不吝指正。

另外,准备考研的朋友可以参考由本人编写、华中科技大学出版社出版的一套优秀考研书籍:

◎考研数学常考题型解题方法技巧归纳(数学一、二、三)

◎考研数学历年真题分题型详解(数学一、二、三)

毛纲源

2017年2月

目 录

第 8 章 向量代数和空间解析几何	(1)
8.1 向量的运算	(1)
8.2 怎样确定向量	(10)
8.3 利用向量求解有关问题的方法和技巧	(14)
8.4 平面方程的求法	(25)
8.5 直线方程的求法	(34)
8.6 讨论直线与平面的位置关系	(42)
8.7 与投影有关的几类问题的解法	(52)
8.8 点、直线、平面之间距离的计算方法	(60)
8.9 曲面方程、柱面方程和旋转曲面方程的求法	(65)
第 9 章 多元函数微分学及其应用	(76)
9.1 二元函数极限的求法及其不存在的证法	(76)
9.2 二元函数连续、可偏导、可微之间的关系	(83)
9.3 多元显函数的一阶偏导数的算法	(91)
9.4 计算多元复合函数高阶导数的方法和技巧	(101)
9.5 多元函数全微分的求法	(110)
9.6 隐函数的偏导数的求法	(114)
9.7 与求偏导数有关的几类综合题的解法	(123)
9.8 方向导数与梯度	(134)
9.9 多元函数微分学的几何应用	(146)
9.10 二(多)元函数的极值与最值的求法	(156)
第 10 章 重积分	(168)
10.1 简化计算直角坐标系下二重积分的若干方法	(168)
10.2 二次积分的几种转换方法	(187)
10.3 在哪些情况下需调换直角坐标系下二次积分的次序	(195)
10.4 二重积分需分区域积分的几种常见情况	(201)
10.5 二重积分(或可化为二重积分)的等式和不等式的证法	(208)
10.6 如何选择坐标系计算三重积分	(218)
10.7 如何利用对称性简化三重积分的计算	(231)
10.8 用“先二后一”法简化三重积分的计算	(237)
10.9 由重积分定义的函数及其极限、导数的求法	(243)

10.10	重积分在几何上的应用举例	(249)
10.11	重积分在物理上的应用举例	(257)
第 11 章	曲线积分和曲面积分	(267)
11.1	对弧长的(第一类)曲线积分的计算方法与技巧	(267)
11.2	对坐标的(第二类)平面曲线积分的算法	(276)
11.3	如何正确应用格林公式	(286)
11.4	平面曲线积分与路径无关的四个等价条件的应用	(296)
11.5	计算对面积的(第一类)曲面积分的方法与技巧	(306)
11.6	计算对坐标的(第二类)曲面积分的方法与技巧	(315)
11.7	如何利用高斯公式计算曲面积分	(327)
11.8	对坐标的(第二类)空间曲线积分的算法	(337)
11.9	曲线积分、曲面积分在几何、物理上应用举例	(345)
11.10	通量与散度、环流量与旋度	(353)
第 12 章	无穷级数	(361)
12.1	利用定义和基本性质判别级数的敛散性	(361)
12.2	正项级数敛散性的判别方法	(371)
12.3	交错级数与任意项级数敛散性的判别方法	(378)
12.4	常数项级数敛散性的证法	(387)
12.5	幂级数收敛域的求法	(395)
12.6	幂级数的和函数的求法	(402)
12.7	函数展为幂级数的方法	(412)
12.8	函数的幂级数展开式的应用	(422)
12.9	讨论函数项级数的一致收敛性	(426)
12.10	与傅里叶级数有关的几类问题的解法	(431)
12.11	收敛的常数项级数的和的求法	(446)
习题答案或提示		(454)
附录(同济大学编《高等数学》(下册·第七版)部分习题解答查找表)		(473)

第8章 向量代数和空间解析几何

学习一门新知识时,既要注意比较与已掌握的知识的相同点与相近点,更要注意在概念及运算上新的发展,与已掌握的知识的不同之处.

由于数学中在某个集合内规定了某些运算,便形成了某个代数系统.各个代数系统有其自身的运算法则,一定要注意不要把一个代数系统的运算法则随意套用到另一个代数系统中去.

向量运算中常出现的几种错误大多都是由于把实数的运算法则照搬到向量运算中所产生的.

8.1 向量的运算

1. 向量的线性运算及其常用性质

既有方向又有大小的量称为向量,通常用有向线段,如 $\overrightarrow{AB}$ 或用黑体符号如 $\mathbf{a}$ 表示,其长度称为向量的模,记为 $|\overrightarrow{AB}|$ 或 $|\mathbf{a}|$.模为0的向量称为零向量,模为1的向量称为单位向量.规定两向量的夹角 φ 为 $0 \leq \varphi \leq \pi$.

(I) 向量加法 常用平行四边形法则和三角形法则将两向量相加.多个(两个以上向量)向量相加时,可将向量首尾相接,以第一个向量的起点为起点、最后一个向量的终点为终点的向量就是这些向量的和向量.

(II) 向量减法 $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ 规定为 $\mathbf{a} + (-\mathbf{b})$.

(III) 数与向量的乘法 $\lambda \mathbf{a}$ 规定为一向量.

(1) 当 $\lambda > 0$ 时, $\lambda \mathbf{a}$ 的方向与 $\mathbf{a}$ 的方向一致,其模为 $|\lambda \mathbf{a}| = |\lambda| |\mathbf{a}|$;

(2) 当 $\lambda < 0$ 时, $\lambda \mathbf{a}$ 的方向与 $\mathbf{a}$ 的方向相反,其模为 $|\lambda \mathbf{a}| = |\lambda| |\mathbf{a}|$;

(3) 当 $\lambda = 0$ 时, $\lambda \mathbf{a}$ 为零向量,即 $\lambda \mathbf{a} = \mathbf{0}$.

向量的线性运算满足交换律、结合律、分配律.

解题时,如有必要可先作图,然后从图形中分析观察相关有向线段之间的线性关系,再运用上述线性运算法则求解有关问题.

向量的线性运算还可运用向量的坐标进行计算,为此需理解下述常用概念.

(1) 向量投影 过向量 $\mathbf{a}$ 的始点和终点分别作 u 轴的垂直平面,其交点坐标分别为 u_1, u_2 ,则 $u_2 - u_1$ 称为 $\mathbf{a}$ 在 u 轴上的投影,记为

$$\text{Prj}_u \mathbf{a} = u_2 - u_1 = |\mathbf{a}| \cos \varphi,$$

其中 $|\mathbf{a}|$ 为向量 $\mathbf{a}$ 的模, φ 为 $\mathbf{a}$ 与 u 轴的夹角,且有下列投影定理.

定理 8.1.1 $\text{Prj}_u(a_1 + a_2 + \cdots + a_n) = \text{Prj}_u a_1 + \text{Prj}_u a_2 + \cdots + \text{Prj}_u a_n$.

(2) 向量的方向角、方向余弦 α 与三坐标轴的夹角分别为 α, β, γ , 它们称为 a 的方向角, $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ 称为 a 的方向余弦.

(3) 向量的坐标 记 i, j, k 分别表示 x 轴、 y 轴、 z 轴正向的单位向量, 且记为

$$\text{Prj}_x a = |a| \cos\alpha = a_x, \quad \text{Prj}_y a = |a| \cos\beta = a_y, \quad \text{Prj}_z a = |a| \cos\gamma = a_z,$$

则 $a = a_x i + a_y j + a_z k$, 并记 $a = (a_x, a_y, a_z)$, 其中 a_x, a_y, a_z 称为 a 的坐标(或方向数), 也称为 a 在 x, y, z 轴上的投影, 其中

$$|a| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}, \quad \cos\alpha = a_x / \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2},$$

$$\cos\beta = a_y / \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}, \quad \cos\gamma = a_z / \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}.$$

显然有 $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$, 且单位向量

$$a^0 = a / |a| = \cos\alpha i + \cos\beta j + \cos\gamma k = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma),$$

其中 α, β, γ 为非零向量 a 的方向角.

(4) 向量线性运算的坐标运算 设

$$a = (a_x, a_y, a_z), \quad b = (b_x, b_y, b_z),$$

则 $a \pm b = (a_x \pm b_x, a_y \pm b_y, a_z \pm b_z)$, $\lambda a = (\lambda a_x, \lambda a_y, \lambda a_z)$ (λ 为实数).

例 1 [8.1.9] 自点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 分别作各坐标面和各坐标轴的垂线, 写出各垂足的坐标.

解 如图 8.1.1 所示, P_0A 为点 P_0 关于 x 轴的垂线, 垂足点 A 的坐标为 $(x_0, 0, 0)$; P_0B 为点 P_0 关于 y 轴的垂线, 垂足点 B 的坐标为 $(0, y_0, 0)$; P_0C 为点 P_0 关于 z 轴的垂线, 垂足点 C 的坐标为 $(0, 0, z_0)$.

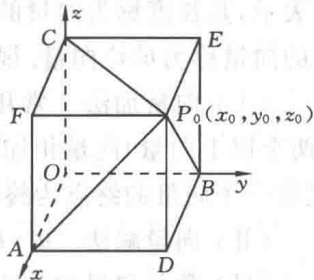


图 8.1.1

例 2 [8.1.17] 设向量 r 的模是 4, 它与 u 轴的夹角是 $\pi/3$, 求 r 在 u 轴上的投影.

解 已知 $|r| = 4$, $\text{Prj}_u r = |r| \cos\theta = 4 \times \cos 60^\circ = 4 \times (1/2) = 2$.

例 3 [8.1.15] 设已知两点 $M_1(4, \sqrt{2}, 1)$ 和 $M_2(3, 0, 2)$, 计算向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 的模、方向余弦和方向角.

解 向量 $\overrightarrow{M_1M_2} = (3-4, 0-\sqrt{2}, 2-1) = (-1, -\sqrt{2}, 1)$,

其模 $|\overrightarrow{M_1M_2}| = \sqrt{(-1)^2 + (-\sqrt{2})^2 + 1^2} = \sqrt{4} = 2$, 其方向余弦分别为

$$\cos\alpha = -1/2, \quad \cos\beta = -\sqrt{2}/2, \quad \cos\gamma = 1/2,$$

方向角分别为 $\alpha = 2\pi/3, \beta = 3\pi/4, \gamma = \pi/3$.

例 4 分别求出向量 $a = i + j + k, b = 2i - 3j + 5k$ 及 $c = -2i - j + 2k$ 的模,

并分别用单位向量 a^0, b^0, c^0 表达向量 a, b, c .

解 因 $a=(1,1,1), b=(2,-3,5), c=(-2,-1,2)$, 故

$$|a| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3}, \quad a = |a|a^0 = \sqrt{3}a^0,$$

$$|b| = \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2} = \sqrt{2^2 + (-3)^2 + 5^2} = \sqrt{38}, \quad b = |b|b^0 = \sqrt{38}b^0,$$

$$|c| = \sqrt{c_x^2 + c_y^2 + c_z^2} = \sqrt{(-2)^2 + (-1)^2 + 2^2} = 3, \quad c = |c|c^0 = 3c^0.$$

例5 一向量与 x 轴、 y 轴成等角, 与 z 轴所构成的角是它的 2 倍, 试确定该向量的方向.

解 设该向量与 x 轴、 y 轴的夹角为 α , 则与 z 轴的夹角为 2α . 又由于方向余弦的平方和等于 1, 即 $\cos^2 \alpha + \cos^2 \alpha + \cos^2 2\alpha = 1 \Rightarrow 2\cos^2 \alpha + (2\cos^2 \alpha - 1)^2 = 1$, 亦即 $2\cos^2 \alpha (2\cos^2 \alpha - 1) = 0$, 从而 $\cos \alpha = 0$ 或 $\cos \alpha = \pm 1/\sqrt{2}$ (舍去 $\cos \alpha = -1/\sqrt{2}$), 由此知 $\alpha = \pi/2$ 或 $\alpha = \pi/4$.

该向量的方向角分别为 $\alpha = \beta = \pi/2, \gamma = \pi$ 或 $\alpha = \beta = \pi/4, \gamma = \pi/2$, 故该向量的方向为

$$(\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma) = (0, 0, -1),$$

或

$$(\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma) = (\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2, 0).$$

2. 数量积(点积、内积)的运算规律和常用性质

在实数运算中, 两个实数 λ 和 μ 相乘可用三种符号表示, 即

$$\lambda\mu = \lambda \cdot \mu = \lambda \times \mu.$$

上述三种乘法记号用于实数是表达同一个乘积概念: 两实数的乘积概念. 而用于向量, 则表示三种不同的乘积.

λa 表示数 λ 与 a 相乘, 不能写成 $\lambda \cdot a$ 或 $\lambda \times a$.

$a \cdot b$ 表示向量 a 与向量 b 的数量积, 不能写成 ab 或 $a \times b$. 而且数量积 $a \cdot b$ 是对两个向量的定义, 三个向量 a, b, c 的数量积 $a \cdot b \cdot c$ 是没有定义的, 因而写成 $a \cdot a \cdot a = a^3$ 是错误的. 虽然有 $a \cdot a = a^2$, 但 a^3 或 a^4 没有定义, 因而没有意义.

数量积的运算规律与实数的运算规律基本一致, 所不同的是结合律、消去律不成立.

数量积的结合律不成立, 即 $a \cdot (b \cdot c) \neq (a \cdot b) \cdot c$.

什么是消去律? 设 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 是三个数, 若 $\lambda_1 \neq 0$, 且 $\lambda_1 \lambda_2 = \lambda_1 \lambda_3$, 那么两边除以 λ_1 (消去 λ_1) 得到 $\lambda_2 = \lambda_3$, 此种运算称为消去律. 因由 $\lambda_1 \lambda_2 = \lambda_1 \lambda_3$ 得到 $\lambda_1 (\lambda_2 - \lambda_3) = 0$, 消去律成立, 就是由 $\lambda_1 (\lambda_2 - \lambda_3) = 0$ 得到 $\lambda_1 = 0$ 或 $\lambda_2 - \lambda_3 = 0$; 消去律不成立, 就是由 $\lambda_1 (\lambda_2 - \lambda_3) = 0$ 推不出 $\lambda_1 = 0$ 或 $\lambda_2 - \lambda_3 = 0$.

由于数量积没有逆运算, 所以数量积的消去律不成立, 即由 $a \cdot b = a \cdot c$

般推不出 $b=c$. 或由 $a \cdot b=0$ 一般推不出 $a=0$ 或 $b=0$.

数量积的运算规律虽然没有结合律和消去律,但满足下列运算规律.

(1) 交换律 $a \cdot b=b \cdot a$.

(2) 分配律 $a \cdot (b+c)=a \cdot b+a \cdot c$.

(3) 数量积与数量的乘积有结合律

$$(\lambda a) \cdot b=\lambda(a \cdot b), \quad (\lambda a) \cdot(\mu b)=(\lambda \mu)(a \cdot b).$$

(4) 数量积的常用性质有以下几条,应熟记.

① 一个向量与它自己的数量积等于其长度的平方,即

$$a \cdot a=|a||a|\cos 0^{\circ}=|a|^2.$$

② 若两个向量相互垂直(或其中有一个为零向量),则两向量的数量积等于零.反之亦然,即

$$a \perp b \Leftrightarrow a \cdot b=0 \Leftrightarrow a_x b_x+a_y b_y+a_z b_z=0. \quad (8.1.1)$$

利用上面两个性质,可以得到

$$i \cdot i=j \cdot j=k \cdot k=1, \quad i \cdot j=j \cdot i=j \cdot k=k \cdot j=k \cdot i=i \cdot k=0.$$

(3) 数量积的几何意义在很多方面有用,务必理解.

a 与 b 的数量积等于 a 的长度和 b 在 a 上投影的乘积或 b 的长度和 a 在 b 上的投影的乘积(见图 8.1.2),即

$$\begin{aligned} a \cdot b &=|a||b|\cos(\widehat{a,b})=|a|\operatorname{Prj}_a b \\ &=|b|\operatorname{Prj}_b a \quad (a \neq 0). \end{aligned}$$

因而向量 b 在 a ($a \neq 0$) 上的投影为

$$\begin{aligned} \operatorname{Prj}_a b &=|b|\cos(\widehat{a,b})=|b|\frac{a \cdot b}{|a||b|}=\frac{b \cdot a}{|a|}=b \cdot a^0 \\ &=b_x \cos \alpha_1+b_y \cos \beta_1+b_z \cos \gamma_1, \end{aligned} \quad (8.1.2)$$

其中 $a^0=(\cos \alpha_1, \cos \beta_1, \cos \gamma_1)$.

同法,可求得

$$a \cdot b=|b| \cdot \operatorname{Prj}_b a \quad (b \neq 0), \quad (8.1.3)$$

因而向量 a 在 b 上的投影为

$$\operatorname{Prj}_b a=a \cdot b^0=a_x \cos \alpha_2+a_y \cos \beta_2+a_z \cos \gamma_2, \quad (8.1.4)$$

其中 $b^0=(\cos \alpha_2, \cos \beta_2, \cos \gamma_2)$.

例 6 [8.2.9(1)] 已知向量 $a=2i-3j+k$, $b=i-j+3k$ 和 $c=i-2j$, 计算 $(a \cdot b) \cdot c-(a \cdot c) \cdot b$.

$$\begin{aligned} \text{解} \quad (a \cdot b) \cdot c-(a \cdot c) \cdot b &=[(2i-3j+k) \cdot (i-j+3k)] \cdot (i-2j) \\ &\quad -[(2i-3j+k) \cdot (i-2j)] \cdot (i-j+3k) \\ &=8(i-2j)-8(i-j+3k)=-8j-24k. \end{aligned}$$

例 7 设 $a=(2,-3,1)$, $b=(1,-2,3)$, $c=(2,1,2)$, 求同时垂直于 a 和 b ,

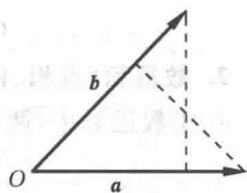


图 8.1.2

且在向量 c 上投影是 14 的向量 d .

解 设 $d=(x, y, z)$, 由 d 与 a 和 b 垂直得 $a \cdot d=0$ 及 $b \cdot d=0$. 又由题设知 d 在 c 上的投影为 14, 即 $\text{Prj}_c d=14$, 得到

$$c \cdot d = |c| \cdot \text{Prj}_c d = \sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2} \times 14 = 42.$$

$$\text{于是有} \begin{cases} a \cdot d = 2x - 3y + z = 0, \\ b \cdot d = x - 2y + 3z = 0, \\ c \cdot d = 2x + y + 2z = 42, \end{cases} \quad \text{解之得} \begin{cases} x = 14, \\ y = 10, \\ z = 2, \end{cases}$$

即

$$d = (14, 10, 2).$$

例 8 设 $a \neq 0$, 试问若 $a \cdot b = a \cdot c$, 能否推知 $b = c$?

解 一般不成立. 事实上, 由 $a \cdot b = a \cdot c$ 可知, $a \cdot (b - c) = 0$. 因 $a \neq 0$, 则 $b - c = 0$ 或 $(b - c) \perp a$ ($b - c \neq 0$).

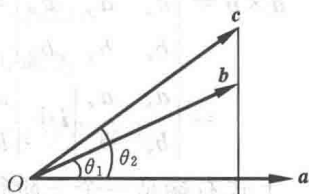


图 8.1.3

从几何上看, 若 a, b, c 共面, $a \cdot b = a \cdot c$ 的图形如图 8.1.3 所示. 由数量积的几何意义知

$$a \cdot b = |a| |b| \cos \theta_1 = |a| (|b| \cos \theta_1)$$

$$= |a| \text{Prj}_a b,$$

$$a \cdot c = |a| |c| \cos \theta_2 = |a| (|c| \cos \theta_2)$$

$$= |a| \text{Prj}_a c.$$

由 $a \cdot b = a \cdot c$ 只能得到 $\text{Prj}_a b = \text{Prj}_a c$ 的结论. 从图形上看, 这个结论是显而易见的, 但得不出 $b = c$ 的结论.

3. 向量积(叉积、外积)的运算规律和常用性质

与实数的运算规律相比较, 向量积的运算规律不同之处在于交换律、结合律及消去律不成立, 即

$$a \times b = -(b \times a) \neq b \times a \quad (\text{向量积交换律不成立});$$

$$a \times (b \times c) \neq (a \times b) \times c \quad (\text{向量积结合律不成立});$$

$$a \times b = 0 \nRightarrow a = 0 \quad \text{或} \quad b = 0 \quad (\text{消去律不成立}).$$

但向量积满足下列运算规律.

$$(1) \text{分配律: } a \times (b + c) = a \times b + a \times c; (b + c) \times a = b \times a + c \times a.$$

$$(2) \text{向量积与数量的乘积有结合律性质: } (\lambda a) \times b = a \times (\lambda b) = \lambda(a \times b).$$

$$(3) a \times (b \times c) = (a \cdot c)b - (a \cdot b)c.$$

(4) 向量积的其他运算性质和算法归纳如下:

① 向量积 $a \times b$ 的方向是垂直于 a 和 b , 且 $a, b, a \times b$ 成右手系的关系; $a \times b$ 的大小为 $|a \times b| = |a| |b| \sin(\widehat{a, b})$; $|a \times b|$ 的几何含义表示为以 a 和 b 为邻边的

平行四边形的面积. 值得注意的是, 切勿把 $|a| |b| \sin(\widehat{a, b})$ 当成向量积本身, 它只是向量积的模. 要完整地表达向量积, 除模以外, 还必须说明向量积的方向.

② 如果两向量 a 与 b 是共线(即平行)向量, 则其向量积等于零; 反之, 如果两向量 a 与 b 的向量积等于零, 则 a 和 b 是共线(即平行)向量, 即

$$a // b (a \text{ 与 } b \text{ 共线}, b \neq 0) \Leftrightarrow a = \lambda b \quad (\lambda \text{ 为常数})$$

$$\Leftrightarrow a \times b = 0 \Leftrightarrow a_x/b_x = a_y/b_y = a_z/b_z.$$

③ 向量积的计算方法: 设 $a = a_x i + a_y j + a_z k$, $b = b_x i + b_y j + b_z k$, 则

$$\begin{aligned} a \times b &= \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = (a_y b_z - a_z b_y) i + (a_z b_x - a_x b_z) j + (a_x b_y - a_y b_x) k \\ &= \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} i + \begin{vmatrix} a_z & a_x \\ b_z & b_x \end{vmatrix} j + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} k. \end{aligned} \quad (8.1.5)$$

上式右端是一个三阶行列式, 其中第 1 行是 i, j, k , 第 2 行、第 3 行分别是向量 a, b 在三个坐标轴上的投影 $a_x, a_y, a_z; b_x, b_y, b_z$. 这样一来, 写出 $a \times b$ 的三阶行列式的形式是不难的. 问题是写出三阶行列式后, 如何更快、更准确地算出这三阶行列式, 从而求出向量 $a \times b$ 中 i, j, k 的系数, 不必按一般三阶行列式按行展开的算法计算. 由式(8.1.5)易看出, 实际运算可按如下方法求解.

只需用 a, b 在三个坐标轴上的投影为元素, 写出下列 3 个二阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_z & a_x \\ b_z & b_x \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix},$$

其值就分别为 i, j, k 的系数. 值得注意的是, 要以三阶行列式中第 2 列的两个元素 a_y, b_y 作为上述二阶行列式的第 1 列, 排好第 1 列, 即可按 $y \rightarrow z \rightarrow x \rightarrow y$ 次序依次写出 3 个二阶行列式, 其中相邻两个二阶行列式中相邻的两列相同.

按式(8.1.5)计算, 可不必考虑余子式的代数符号, 而且快而准.

例 9[8.2.1] 设 $a = 3i - j - 2k, b = i + 2j - k$, 求

(1) $a \cdot b$ 及 $a \times b$; (2) $(-2a) \cdot 3b$ 及 $a \times 2b$;

(3) a, b 的夹角的余弦.

解 (1) $a \cdot b = (3, -1, -2) \cdot (1, 2, -1)$

$$= 3 \times 1 + (-1) \times 2 + (-2) \times (-1) = 3,$$

$$a \times b = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = \left(\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \right)$$

$$= (5, 1, 7) = 5i + j + 7k \quad (\text{见式(8.1.5)});$$

(2) $(-2a) \cdot (3b) = -6(a \cdot b) = -6 \times 3 = -18,$

$$\mathbf{a} \times 2\mathbf{b} = 2(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = 2(5, 1, 7) = (10, 2, 14);$$

$$(3) \cos(\hat{\mathbf{a}, \mathbf{b}}) = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}| |\mathbf{b}|} = \frac{3}{\sqrt{3^2 + (-1)^2 + (-2)^2} \sqrt{1^2 + 2^2 + (-1)^2}} \\ = \frac{3}{2\sqrt{21}}.$$

例 10 [8.2.3] 已知 $M_1(1, -1, 2)$ 、 $M_2(3, 3, 1)$ 和 $M_3(3, 1, 3)$, 求与向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$, $\overrightarrow{M_2M_3}$ 同时垂直的单位向量.

解 $\overrightarrow{M_1M_2} = (3-1, 3-(-1), 1-2) = (2, 4, -1),$

$$\overrightarrow{M_2M_3} = (3-3, 1-3, 3-1) = (0, -2, 2).$$

因 $\overrightarrow{M_1M_2} \times \overrightarrow{M_2M_3}$ 均与 $\overrightarrow{M_1M_2}$, $\overrightarrow{M_2M_3}$ 垂直, 故所求向量可取为

$$\mathbf{a} = \pm \frac{\overrightarrow{M_1M_2} \times \overrightarrow{M_2M_3}}{|\overrightarrow{M_1M_2} \times \overrightarrow{M_2M_3}|} \quad (\text{注意前面的正、负号不能丢}),$$

$$\text{而 } \overrightarrow{M_1M_2} \times \overrightarrow{M_2M_3} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & 4 & -1 \\ 0 & -2 & 2 \end{vmatrix} = \left(\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} \right) \\ = (6, -4, -4),$$

$$|\overrightarrow{M_1M_2} \times \overrightarrow{M_2M_3}| = \sqrt{6^2 + (-4)^2 + (-4)^2} = \sqrt{68} = 2\sqrt{17},$$

故
$$\mathbf{a} = \pm \frac{1}{2\sqrt{17}}(6, -4, -4) = \pm \left(\frac{3}{\sqrt{17}}, -\frac{2}{\sqrt{17}}, -\frac{2}{\sqrt{17}} \right).$$

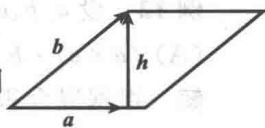
值得注意的是, 向量代数中没有向量除法. 这是因为除法总是作为乘法的逆运算来定义的, 而数量积和向量积都没有逆运算, 因此不可能有以向量为分母的除法. 虽然当数 $a \neq 0$ 时, $\frac{a}{a} = 1$ 有意义, 但当向量 $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ 时, $\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{a}}$ 没有意义. 因而当 $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ 时, $\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{a}} = 1$ 是错误的.

例 11 在以非零向量 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 为相邻边的平行四边形中垂直于 $\mathbf{a}$ 的高向量 $\mathbf{h}$ 为().

(A) $\mathbf{b} - \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{b} \mathbf{a}$ (B) $\mathbf{b} - \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{b^2} \mathbf{a}$ (C) $\mathbf{b} - \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{a^2} \mathbf{a}$ (D) $\mathbf{b} - \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{a^2} \mathbf{a}$

解 仅(D)入选. (A)中有向量除法, 所以没有意义.

(C)中 $\mathbf{b}$ 为向量, $\frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{a^2}$ 为一数量, 不能进行减法运算. 由图



8.1.4 知

$$\mathbf{h} = \mathbf{b} - (\text{Prj}_{\mathbf{a}} \mathbf{b}) \mathbf{a}^0 = \mathbf{b} - (\mathbf{b} \cdot \mathbf{a}^0) \mathbf{a}^0$$

$$= \mathbf{b} - \frac{\mathbf{b} \cdot \mathbf{a}}{|\mathbf{a}|} \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|} = \mathbf{b} - \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{a^2} \mathbf{a}.$$

图 8.1.4

4. 三个向量的混合积

前面为了实际的需要,定义了向量的两种乘积,都是只有两个向量参加的运算.现在要问,由三个向量参加运算,是否也可以定义它们的乘积呢?不难看出,结合数量积和向量积运算,三个向量参加运算,只有 $a \cdot (b \times c)$, $a \times (b \times c)$, $a(b \cdot c)$ 三种情况出现.而 $a(b \cdot c)$ 是一个与 a 共线的向量, $a \times (b \times c)$ 是在 b, c 所决定的平面上的一个向量,因其不常用也不多讨论了.下面只讨论三个向量 a, b, c 中的两个作向量积,其结果再与另一个向量作数量积,即 $a \cdot (b \times c)$ 的情况,称它为三个向量的混合积.混合积又可简写为 $[a \ b \ c]$.

1) 混合积的计算公式

设 $a = a_x i + a_y j + a_z k$, $b = b_x i + b_y j + b_z k$, $c = c_x i + c_y j + c_z k$, 其计算公式为

$$a \cdot (b \times c) = [a \ b \ c] = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}. \quad (8.1.6)$$

2) 混合积 $a \cdot (b \times c)$ 的绝对值 $|a \cdot (b \times c)|$ 的几何意义

$a \cdot (b \times c)$ 的绝对值等于以 a, b, c 为邻边作成的平行六面体的体积 V .

3) 混合积的常用性质

(1) 三个向量共面的充要条件是其混合积等于零,即 $a \cdot (b \times c) = 0$.

(2) 轮换混合积的三个因子向量,混合积的值不变,即

$$a \cdot (b \times c) = b \cdot (c \times a) = c \cdot (a \times b).$$

(3) 对调混合积中的两个相邻因子一次,混合积的值变号,即

$$a \cdot (b \times c) = -a \cdot (c \times b), \quad a \cdot (b \times c) = -b \cdot (a \times c).$$

(4) 混合积中三因子的位置不变,但其数量积、向量积的运算次序互调,其值不变,即

$$a \cdot (b \times c) = (a \times b) \cdot c, \quad b \cdot (c \times a) = (b \times c) \cdot a.$$

事实上,由性质(2)得到 $a \cdot (b \times c) = c \cdot (a \times b)$,再根据数量积可交换的性质又得到 $c \cdot (a \times b) = (a \times b) \cdot c$,因而得到 $a \cdot (b \times c) = (a \times b) \cdot c$.

(5) 混合积中只要有两个向量相同,其值便等于零.

例 12 设 a, b, c 是三个不共面的向量,则 $(a \times b) \cdot c$ 等于().

(A) $(a \times c) \cdot b$ (B) $(b \times a) \cdot c$ (C) $(c \times a) \cdot b$ (D) $(c \times b) \cdot a$

解 根据混合积的上述性质,只有(C)正确.其余三个答案都差一个负号,因而不正确.

例 13 [8.2.11] 已知 $a = (a_x, a_y, a_z)$, $b = (b_x, b_y, b_z)$, $c = (c_x, c_y, c_z)$, 试利用行列式性质,证明 $(a \times b) \cdot c = (b \times c) \cdot a = (c \times a) \cdot b$.

证 利用交换行列式的两行,行列式的值变号的性质得到

$$\begin{aligned}
 (a \times b) \cdot c &= \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} b_x & b_y & b_z \\ a_x & a_y & a_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix} = (b \times c) \cdot a \\
 &= - \begin{vmatrix} c_x & c_y & c_z \\ b_x & b_y & b_z \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c_x & c_y & c_z \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = (c \times a) \cdot b.
 \end{aligned}$$

例 14 已知 $(a \times b) \cdot c = 2$, 则 $(a+b) \times (b+c) \cdot (c+a) = \underline{\hspace{2cm}}$.

解一 利用混合积常用性质求之.

$$\begin{aligned}
 (a+b) \times (b+c) \cdot (c+a) &= (a+b) \times (b+c) \cdot c + (a+b) \times (b+c) \cdot a \\
 &= (a \times b) \cdot c + (b \times b) \cdot c + (a \times c) \cdot c + (b \times c) \cdot c \\
 &\quad + (a \times b) \cdot a + (b \times b) \cdot a + (a \times c) \cdot a + (b \times c) \cdot a \\
 &= (a \times b) \cdot c + (b \times c) \cdot a \quad (\text{利用混合积常用性质(5)}) \\
 &= 2(a \times b) \cdot c \quad (\text{利用混合积常用性质(2)}) \\
 &= 4.
 \end{aligned}$$

解二 设 $a = (a_x, a_y, a_z)$, $b = (b_x, b_y, b_z)$, $c = (c_x, c_y, c_z)$, 则

$$(a \times b) \cdot c = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_x & b_x & c_x \\ a_y & b_y & c_y \\ a_z & b_z & c_z \end{vmatrix}.$$

现将上式最右边的行列式记为 $|a, b, c|$, 即 $(a \times b) \cdot c = |a, b, c|$. 因而

$$\begin{aligned}
 (a+b) \times (b+c) \cdot (c+a) &= |a+b, b+c, c+a| \\
 &= 2|a+b+c, b+c, c+a| \quad (\text{各列都加到第1列}) \\
 &= 2|a, b+c, c+a| \quad (\text{第1列减去第2列}) \\
 &= 2|a, b+c, c| \quad (\text{第3列减去第1列}) \\
 &= 2|a, b, c| \quad (\text{第2列减去第3列}) \\
 &= 2(a \times b) \cdot c = 4.
 \end{aligned}$$

习 题 8.1

1. a, b 为非零向量, 下列等式是否成立:

(1) $|a|a = a^2$; (2) $(a \cdot b)a = a^2b$.

2. 设 $a = 3i - j - 2k$, $b = i + 2j - k$, 求 $\text{Prj}_b a$.

3. 已知向量 a, b, c 满足 $a + b + c = 0$, 且 $|a| = 3$, $|b| = 6$, $|c| = 7$, 计算

$$a \cdot b + b \cdot c + c \cdot a.$$

4. 已知在平面 xOy 上的三点 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$, 试用向量方