

点集拓扑学 简明教程

DIANJI TUOPUXUE JIANMING JIAOCHENG

◆ 杨 鎏◎著

地质出版社

点集拓扑学简明教程

杨鏊 著



地质出版社

· 北京 ·

内容简介

拓扑学是数学中非常重要的一个分支,已经发展出点集拓扑学、代数拓扑学、几何拓扑学和微分拓扑学等多个学科。其中点集拓扑学也称为“一般拓扑学”。本书介绍了点集拓扑学的基本概念,以及拓扑空间的连续不变性等重要性质,并探究了构造拓扑空间的几种方法。全书内容涉及拓扑空间的连续性、分离性、紧致性和连通性,以及子空间、积空间、商空间、紧致空间、一致空间、度量空间和函数空间。本书内容通俗易懂,叙述深入浅出,适合本科阶段数学、物理专业的学生研读或学习。

图书在版编目(CIP)数据

点集拓扑学简明教程 / 杨逵著. —北京:地质出版社, 2017. 1

ISBN 978-7-116-10226-2

I. ①点… II. ①杨… III. ①拓扑—高等学校—教材
IV. ①O189

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2017) 第 012236 号

责任编辑:肖莹莹

责任校对:张冬

出版发行:地质出版社

社址邮编:北京海淀区学院路 31 号, 100083

咨询电话:(010) 66554571 (编辑室) 66554528 (邮购部)

传真:(010) 66554576

印刷:北京地大天成印务有限公司

开本:787mm×1092mm 1/16

印张:13.75

字数:232 千字

版次:2017 年 3 月北京第 1 版

印次:2017 年 3 月北京第 1 次印刷

定价:42.00 元

书号:ISBN 978-7-116-10226-2

(如对本书有建议或意见,敬请致电本社;如本书有印装问题,本社负责调换)

前 言

拓扑学是数学中非常重要的一个分支，现今的拓扑学体系非常庞大，已经发展出点集拓扑学、代数拓扑学、几何拓扑学和微分拓扑学等多个学科。其中点集拓扑学也称为“一般拓扑学”，是拓扑学中最早发展起来的领域。它源于几何学，因此有些概念蕴含很强的几何背景。它的概念体系是用公理化的方法建立起来的，所以初学者对于其中的众多定义、定理和概念感到抽象和枯燥乏味，难以理解其深意。但是公理化方法正是点集拓扑的一个基本特点，这种方法也是近代数学最重要方法之一。故无论如何，研究这门学问需要专心致志。

本书介绍了点集拓扑学的基本概念，以及拓扑空间的连续不变性等重要性质，并探究了构造拓扑空间的几种方法。全书内容涉及拓扑空间的连续性、分离性、紧致性和连通性，以及子空间、积空间、商空间、紧致空间、一致空间、度量空间和函数空间。

从结构上看本书共分8个章节。第1章对点集拓扑的准备知识——集合与映射作了大概介绍，包括集合的基本概念及运算、关系与等价、映射、可数集与不可数集等；第2章首先对拓扑空间的基本概念，如领域、内部与边界、基与子基等作了大体介绍，其次探讨了构造拓扑的基、构造拓扑所需的开领域基等拓扑空间的构造方法，然后探讨了连续映射与同胚映射的相关知识及其实例；第3章讨论了子空间和积空间的性质，并研究了商空间、商映射和拓扑和；第4章刻画了拓扑空间的常用性质，包括可数性、分离性、连通性和道路连通性，并对拓扑空间最重要的性质之一——紧致性作了初步研究；第5章着重探究度量空间和度量化定理，这是点集拓扑非常重要的一环，这里面首先探讨了度量诱导的拓扑、紧度量空间、Baire空间和度量空间的完备化，其次探讨了嵌入定理、度量与伪度量，然后探讨了Urysohn引理，并由Urysohn引理引出了度量化定理；第6章首先总结了紧空间与禁集的基本概念和性质，其次讨论了 $\mathbb{R}$ 中的紧集、度量空间中的紧致性和局部紧

空间，然后探讨了紧扩张和仿紧性；第 7 章首先讨论了一致结构与一致拓扑，其次探讨了一致连续与乘积一致结构，然后探究了完备性与完备扩张；第 8 章首先讨论了点式收敛、联合连续性和一致收敛，其次探讨了在紧集上的一致收敛，然后研究紧性和同等连续性。本书在进行理论研究的同时，注意联系相关实例，有助于理解和接受复杂、抽象的拓扑概念。

点集拓扑的内容是及其丰富的，本书主要涉及一些具有代表性的内容，对于进入拓扑领域的研究具有引领的作用，为深入到拓扑学的其他领域打开一扇窗口。总的来说，本书内容全面、实例丰富，论述条理清晰、深入浅出，并尽量用简练的语言表达繁琐的理论，适合预备进入拓扑学相关领域的读者学习和研究。希望对读者有些帮助。

本书成书过程经历多次修改，但是限于作者水平，书中仍然难免存在不完善之处，希望同行学者和广大读者予以批评指正。在撰写本书过程中，得到了许多专家学者的帮助和指导，参考了大量的相关学术文献，在此特表示真诚的感谢。

作者

2016 年 10 月

目 录

第1章 集合与映射	1
1.1 集合的基本概念及运算	1
1.2 关系与等价	7
1.3 映射	13
1.4 可数集与不可数集	16
第2章 拓扑空间的基本概念	23
2.1 拓扑空间	23
2.2 邻域	30
2.3 内部与边界	33
2.4 基与子基	36
2.5 拓扑空间的构造方法	43
2.6 连续映射与同胚映射	47
第3章 子空间、积空间和商空间	54
3.1 子空间	54
3.2 积空间	56
3.3 商空间及商映射	63
第4章 拓扑空间常用性质刻画	76
4.1 可数性	77
4.2 分离性	82
4.3 连通性与道路连通性	86
4.4 紧致性	96
第5章 度量空间和度量化定理	103
5.1 度量空间及其基本性质	103
5.2 嵌入定理	126

5.3 度量与伪度量	130
5.4 Urysohn 引理	139
5.5 度量化定理	144
第6章 紧致空间	152
6.1 紧致空间与紧集	152
6.2 R 和 R^n 中的紧集	155
6.3 度量空间中的紧致性	161
6.4 局部紧空间	164
6.5 紧扩张和仿紧性	165
第7章 一致空间	178
7.1 一致结构与一致拓扑	179
7.2 一致连续与乘积一致结构	184
7.3 完备性与完备扩张	188
第8章 函数空间	195
8.1 点式收敛与一致收敛	195
8.2 紧集上的一致收敛	206
8.3 紧性和同等连续性	208
参考文献	212

第 1 章 集合与映射

1.1 集合的基本概念及运算

1.1.1 集合的基本概念

集合这一概念是容易被读者所理解的,它指的是由某些具有某种共同特点的个体构成的集体.例如我们常说“正在这里听课的全体学生的集合”、“所有整数的集合”等.集合也常称为集、族、类.

集合(即通常所谓的“集体”)是由它的元素(即通常所谓的“个体”)构成的.例如正在这里听课的全体学生的集合以正在听课的每一位学生为它的元素;所有整数的集合以每一个整数为它的元素.元素也常称为元、点或成员.

集合也可以没有元素.例如平方等于 2 的有理数的集合、既大于 1 又小于 2 的整数的集合都没有任何元素.这种没有元素的集合我们称之为空集,记作 $\emptyset$.此外,由一个元素构成的集合称为单点集.

用文字来描述一个集合由哪些元素构成(像前面所做的那样),是定义集合的一个重要方式.此外,我们还通过以下的方式来定义集合:记号

$$\{x \mid \text{关于 } x \text{ 的一个命题 } P\}$$

表示使花括号中竖线“ $\mid$ ”后面的那个命题 P 成立的所有元素 x 构成的集合.例如,集合 $\{x \mid x \text{ 为实数, 并且 } 0 < x < 1\}$ 即通常所谓开区间 $(0, 1)$.在运用集合这种定义方式时有时允许一些变通,例如集合 $\{x^2 \mid x \text{ 是实数}\}$ 便是集合 $\{y \mid y = x^2, \text{ 其中 } x \text{ 是实数}\}$ 的简略表示,不难明白这个集合实际上是由全体非负实数构成的.集合表示方式中的竖线“ $\mid$ ”也可用冒号“ $:$ ”或分号“ $;$ ”来代替.此外,也常将一个集合的所有元素列举出来再加上花括号以表示这个

集合. 例如 $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ 表示由元素 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 构成的集合. 如果确实不至于发生混淆, 在用列举的办法表示集合时容许某种省略. 例如, 有时我们可以用 $\{2, 3, \dots\}$ 表示全体除 1 之外的正整数构成的集合, 用 $\{3, 5, \dots\}$ 表示全体除 1 之外的正奇数构成的集合. 然而, 在上述两个集合中前者有可能会被误解为全体正素数构成的集合, 而后者也有可能会被误解为全体正奇素数构成的集合. 因此, 我们并不鼓励这种做法, 除非从上下文的陈述中我们能够得到不被误解的保证. 我们再三提醒读者注意: 不管你用任何一种方式定义集合, 最重要的是不允许产生歧义, 也就是说你所定义的集合的元素应当是完全确定的.

在本书中, 我们用:

$\mathbb{Z}_+$ 表示全体正整数构成的集合, 称为正整数集;

$\mathbb{Z}$ 表示全体整数构成的集合, 称为整数集;

$\mathbb{Q}$ 表示全体有理数构成的集合, 称为有理数集;

$\mathbb{R}$ 表示全体实数构成的集合, 称为实数集,

并且假定读者熟知这些集合.

设 A 是一个集合, a 是一个元素. 如果 a 是 A 的元素, 记作 $a \in A$, 读为 a 属于 A ; 如果 a 不是 A 的元素, 则记作 $a \notin A$, 读为 a 不属于 A . 例如, 我们有: $2 \in \mathbb{Z}_+$, $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ 等. 对于任何集合 A 和任何元素 a , $a \in A$ 和 $a \notin A$ 这两者必有且仅有一个成立.

我们总用等号“=”表示逻辑上的同一, 例如 $a=b$ 表示符号 a 和 b 代表着同一个事物. 因此, 如果 A 和 B 是两个集合, $A=B$ 读为 A 等于 B , 表示它们是由相同的元素构成的集合, 即 A 的每一个元素都是 B 的元素, 并且 B 的每一个元素也都是 A 的元素. 将这意思表达得更为形式一点便是: 若 $x \in A$, 则 $x \in B$, 并且若 $x \in B$, 则 $x \in A$. 这是验证两个集合相等的最为基本的方式. 不等号“ $\neq$ ”是等号“=”的否定. 如果 A 和 B 是两个集合, $A \neq B$ 读为 A 不等于 B , 意味着或者 A 中至少有一个元素不是 B 的元素, 或者 B 中至少有一个元素不是 A 的元素, 亦即或者存在 $x \in A$ 使得 $x \notin B$, 或者存在 $x \in B$ 使得 $x \notin A$.

以下的这个定理等价于形式逻辑中的相应命题, 从直觉看去也是自明的.

定理 1.1.1 设 A, B, C 都是集合, 则

(1) $A=A$;

(2) 若 $A=B$, 则 $B=A$;

(3) 若 $A=B, B=C$, 则 $A=C$.

如果集合 A 的每一个元素都是集合 B 的元素, 即: 若 $x \in A$, 则 $x \in B$, 我们便记作 $A \subset B$ 或 $B \supset A$, 分别读为 A 包含于 B 和 B 包含 A .

定理 1.1.2 设 A, B, C 都是集合, 则

(1) $A \subset A$;

(2) 若 $A \subset B, B \subset A$, 则 $A=B$;

(3) 若 $A \subset B, B \subset C$, 则 $A \subset C$.

证: (1) 这个结论是显然的, 无需证明.

(2) $A \subset B$ 意即: 若 $x \in A$, 则 $x \in B$; $B \subset A$ 意即: 若 $x \in B$, 则 $x \in A$. 这两者合起来正好就是 $A=B$ 的意思.

(3) 设 $x \in A$. 由于 $A \subset B$, 故 $x \in B$; 又由于 $B \subset C$, 从而 $x \in C$. 综上所述, 如果 $x \in A$ 就有 $x \in C$. 此意即 $A \subset C$.

空集不含任何元素, 所以它包含于每一个集合之中. 由此我们可以得出结论: 空集是唯一的. 因为如果 $\emptyset_1, \emptyset_2$ 都是空集, 据前说应当有 $\emptyset_1 \subset \emptyset_2$, 以及 $\emptyset_2 \subset \emptyset_1$. 根据定理 1.1.2 可见, $\emptyset_1 = \emptyset_2$.

设 A, B 是两个集合. 如果 $A \subset B$, 我们则称 A 为 B 的子集; 如果 A 是 B 的子集, 但 A 又不等于 B , 即 $A \subset B, A \neq B$. 也就是说 A 的每一个元素都是 B 的元素, 但 B 中至少有一个元素不是 A 的元素, 这时, 我们称 A 为 B 的真子集, 并且记作 $A \subsetneq B$ 或者 $B \supsetneq A$.

定理 1.1.3 设 A, B, C 都是集合, 则

(1) $A \subsetneq A$ 不成立;

(2) $A \subsetneq B$ 和 $B \subsetneq A$ 不能同时成立;

(3) 如果 $A \subsetneq B$, 并且 $B \subsetneq C$, 则 $A \subsetneq C$.

上述定理 1.1.3 的证明就像定理 1.1.2 的证明一样简单, 这里不再证明.

我们常常需要讨论以集合作为元素的集合, 并且为了强调这一特点, 这类集合常称为集族, 并多用花写字母 $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$, 来表示. 例如, $\mathcal{A} = \{\{1\}, \{1, 2\}, \emptyset\}$, 则 $\mathcal{A}$ 是一个集族, 它的三个元素分别是单点集 $\{1\}$, 由两个元素组成的集合 $\{1, 2\}$ 和空集 $\emptyset$.

设 X 是一个集合, 我们常用 $\mathcal{P}(X)$ 表示 X 的所有子集构成的集族, 称为集

合 X 的幂集. 例如, 集合 $\{1, 2\}$ 的幂集是 $P(\{1, 2\}) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$.

本章中所介绍的集合论是所谓“朴素的”集合论. 在这种集合论中, “集合”和“元素”等基本概念均不加定义而被认作是自明的. 正因为如此, 历史上曾经产生过一些悖论. 然而对于绝大多数读者来说了解朴素的集合论已是足够的了, 只是要求他们在运用的时候保持适当的谨慎, 以免导致逻辑矛盾. 例如, 我们应当知道一个集合本身不能是这个集合的一个元素. 即: 若 A 是集合, 则 $A \in A$ 不成立. 这一点是容易理解的. 例如由一些学生组成的一个班级绝不会是这个班级里的一名学生. 因此, 我们不能说“所有集合构成的集合”, 因为如果有这样一个“集合”的话, 它本身既是一个集合, 就应当是这个“所有集合构成的集合”的一个元素了. 也因此, 我们应当能够了解一个元素 a 和仅含一个元素 a 的单点集 $\{a\}$ 是两回事, 尽管我们有时为了行文的简便而忽略这个区别.

1.1.2 集合的基本运算

下面我们介绍集合的并、交、差三种基本运算, 这三种运算的基本规律, 以及它们与集合的包含关系之间的基本关联.

定义 1.1.1 设 A 与 B 是两个集合, 集合

$$\{x | x \in A \text{ 或者 } x \in B\}$$

称为集合 A 与集合 B 的并集或并, 记作 $A \cup B$, 读为 A 并 B . 集合

$$\{x | x \in A \text{ 并且 } x \in B\}$$

称为集合 A 与集合 B 的交集或交, 记作 $A \cap B$, 读为 A 交 B . 若 $A \cap B = \emptyset$, 则称集合 A 与集合 B 无交或不相交; 反之, 若 $A \cap B \neq \emptyset$, 则称集合 A 与集合 B 有(非空的)交. 集合

$$\{x | x \in A \text{ 并且 } x \notin B\}$$

称为集合 A 与集合 B 的差集, 记作 A/B 或 $A - B$, 读为 A 差 B , 或 A 减 B .

关于集合的并, 交, 差三种运算之间, 有以下的基本规律:

定理 1.1.4 设 A, B, C 都是集合, 则以下等式成立:

(1) 幂等律

$$A \cup A = A$$

$$A \cap A = A$$

(2) 交换律

$$A \cup B = B \cup A$$

$$A \cap B = B \cap A$$

(3) 结合律

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

(4) 分配律

$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$$

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$$

(5) De Morgan 律

$$A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$$

$$A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$$

证: 验证这些集合等式的基本方法是验证每一个等式中居于等号左边的集合中的每一个元素都是居于等号右边的集合的元素, 并且居于等号右边的集合中的每一个元素都是居于等号左边的集合的元素. 这里不打算验证这里的全部十个等式, 而只是验证其中两个作为例子. 其余各个等式的验证请有兴趣的读者自行完成.

作为第一个例子我们验证结合律中的后一个等式如下: 若 $x \in (A \cap B) \cap C$, 则 $x \in A \cap B$, 并且 $x \in C$. 于是 $x \in A$, $x \in B$, 并且 $x \in C$. 从而 $x \in A$, 并且 $x \in B \cap C$. 因此 $x \in A \cap (B \cap C)$. 根据以上论证我们有

$$(A \cap B) \cap C \subset A \cap (B \cap C)$$

用同样的办法我们也可以得到

$$(A \cap B) \cap C \supset A \cap (B \cap C)$$

综合这两个包含关系我们便证明了需证的等式.

作为第二个例子我们验证 De Morgan 律中的前一个等式如下: 若 $x \in A - (B \cup C)$, 则 $x \in A$ 并且 $x \notin B \cup C$, 于是 $x \in A$ 并且 $x \notin B$, $x \notin C$, 从而 $x \in A - B$ 并且 $x \in A - C$, 因此 $x \in (A - B) \cap (A - C)$. 这样我们便证明了

$$(A \cap B) \cup C \subset (A \cup C) \cap (B \cup C)$$

用类似的证明方式又可以得到

$$(A \cap B) \cup C \supset (A \cup C) \cap (B \cup C)$$

综合这两个包含关系我们便证明了需证的等式.

集合的并, 交, 差 i 种运算与集合间的包含关系之间有着以下基本关联:

定理 1.1.5 设 A, B 是两个集合, 下列三个条件等价:

(1) $A \subset B$;

$$(2) A \cap B = A;$$

$$(3) A \cup B = B.$$

证: 条件(1)蕴涵(2). 已知 $A \subset B$. 若 $x \in A$, 则 $x \in B$, 故 $x \in A \cap B$. 这证明 $A \subset A \cap B$. 另一方面, 若 $x \in A \cap B$, 则 $x \in A$ 并且 $x \in B$. 因此 $A \cap B \subset A$. 综合两个包含关系即得 $A \cap B = A$.

条件(2)蕴涵(1). 由于 $A \cap B = A$, 故有 $A \cap B \supset A$. 即若 $x \in A$, 则 $x \in A$ 并且 $x \in B$. 这证明 $A \subset B$.

条件(1)等价于(3)的证明完全类似, 这里不作证明.

我们在讨论某一个具体问题时, 所涉及的各个集合往往都是某一个特定的“大的”集合的子集. 例如在平面几何学中, 我们研究的所有图形都是“全平面”这样一个集合的子集. 这时, 包含着我们在特定情形下讨论的所有集合的这样一个集合, 我们称之为基础集. 正如我们在研究平面几何时并不每次都繁琐地指出这个平面一样, 当研究问题中的基础集自明时, 我们也不必每次提起.

定义 1.1.2 设 X 是一个基础集, 对于 X 的任何一个子 A , 我们称 $X - A$ 为 A (相对于基础 X 而言) 的补集或余集, 并且记作 CA , 为了方便起见有时也记作 A' .

我们应当提醒读者, 补集 A' 的定义与基础集的选取有关. 所以在研究某一个问题时, 若用到补集这个概念, 在整个工作过程中基础集必须保持不变.

定理 1.1.6 设 X 是一个基础集, 若 A, B 为 X 的子集, 则

$$A \cup \emptyset = A, \quad A \cap \emptyset = \emptyset$$

$$A \cup X = X, \quad A \cap X = A$$

$$A \cup A' = X, \quad A \cap A' = \emptyset$$

$$(A \cup B)' = A' \cap B', \quad (A \cap B)' = A' \cup B'$$

$$A'' = A$$

我们按如下归纳的方式定义 $n \in \mathbb{Z}_+$ 个集合的并(并集)与交(交集): 当 $n=1$ 时, 某一个集合的并和交都定义为此集合自身; 当 $n \geq 2$ 时, 假定 $n-1$ 个任意集合的并与交已定义, 设 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 是 n 个集合, 则它们的并与交分别定义为

$$A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = (A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_{n-1}) \cup A_n$$

$$A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n = (A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1}) \cap A_n$$

n 个集合的并 $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$ 有时也写作 $\bigcup_{i=1}^n A_i$, n 个集合的交 $A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n$ 有时也写作 $\bigcap_{i=1}^n A_i$.

由于定理 1.1.4 中给出的交换律和结合律, 可见在并 $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$ 与交 $A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n$ 中, 诸 A_i 可以互换位置, 也可以任意(用括号)指定运算次序, 就像对待通常实数的加法和乘法运算那样.

还要提请读者注意的是: 有时我们会用到“有限个集合的并(或交)”这样一个说法, 这样说时总是指“某 $n \in \mathbb{Z}_+$ (即 $n \geq 1$) 个集合的并(或交)”. 另外需要注意, 我们迄今并未定义过 0 个集合的并(或交).

1.2 关系与等价

1.2.1 关系

我们从前在数学的各种科目中学过诸如函数、次序、运算以及等价等种种概念, 它们的一个共同的特点在于给出了某些给定集合的元素之间的某种联系. 为了明确地定义它们, 我们先定义“关系”, 而为了定义关系, 又必须先有两个集合的笛卡儿积这个概念.

定义 1.2.1 设 X 和 Y 是两个集合, 集合

$$\{(x, y) | x \in X, y \in Y\}$$

称为集合 X 与集合 Y 的笛卡儿积, 记作 $X \times Y$, 读为 X 叉乘 Y . 其中 (x, y) 是一个有序偶, x 称为有序偶 (x, y) 的第一个坐标, y 称为有序偶 (x, y) 的第二个坐标. X 称为笛卡儿积 $X \times Y$ 的第一个坐标集, Y 称为笛卡儿积 $X \times Y$ 的第二个坐标集. 集合 X 与自身的笛卡儿积 $X \times X$ 称为 X 的 2 重(笛卡儿)积, 通常简单地记作 X^2 .

一些精明的读者可能会对上面的这个定义提出异议, 因为其中出现了一个未经定义的概念“有序偶”. 为了消除这部分读者的疑虑, 我们给出以下定义.

定义 1.2.2 一个单点集 A 和由最多不超过两个元素构成的一个集合 B 两者组成的集族 $\{A, B\}$ 如果满足条件: $A \subset B$, 则称为一个有序偶, 并且记作 (x, y) , 其中 x 为满足条件 $\{x\} = A \cap B$ 的唯一元素, y 为满足条件 $\{x, y\} = A \cup B$ 的唯一元素.

我们用于有序偶的记号和用于“开区间”的记号是一样的,有时容易混淆.因此在可能发生混淆的情形下应当有必要的说明,以避免误解.

给定两个集合,通过取它们的笛卡儿积以得到一个新的集合的办法对于读者并不陌生.以前学过的数学中通过实数集合构造复数集合,通过直线构造平面时,用的都是这个办法.

我们应当注意,两个集合的笛卡儿积依赖于两个预先给定集合的次序.一般说来集合 X 与集合 Y 的笛卡儿积 $X \times Y$ 完全不同于集合 Y 与集合 X 的笛卡儿积 $Y \times X$.

定义 1.2.3 设 X, Y 是两个集合.如果 R 是 X 与 Y 的笛卡儿积 $X \times Y$ 的一个子集,即 $R \subset X \times Y$,则称 R 是从 X 到 Y 的一个关系.

定义 1.2.4 设 R 是从集合 X 到集合 Y 的一个关系,即

$$R \subset X \times Y.$$

如果 $(x, y) \in R$,则我们称 x 与 y 是 R -相关的,并且记作 xRy .如果 $A \subset X$,则 Y 的子集

$$\{y \in Y \mid \text{存在 } x \in A \text{ 使得 } xRy\}$$

称为集合 A 对于关系 R 而言的像集,或者简单地称为集合 A 的像集,或者称为集合 A 的 R -像,并且记作 $R(A)$. $R(X)$ 称为关系 R 的值域.

关系的概念是十分广泛的.读者很快便会看到,我们熟知的函数(映射)、等价、序、运算等概念都是关系的特例.这里有两个特别简单的从集合 X 到集合 Y 的关系,一个是 $X \times Y$ 本身,另一个是空集 $\emptyset$.

定义 1.2.5 设 R 是从集合 X 到集合 Y 的一个关系,即

$$R \subset X \times Y$$

这时笛卡儿积 $Y \times X$ 的子集

$$\{(y, x) \in Y \times X \mid xRy\}$$

是从集合 Y 到集合 X 的一个关系,我们称它为关系 R 的逆,并且记作 R^{-1} .如果 $B \subset Y$,那么 X 的子集 $R^{-1}(B)$ 是集合 B 的 R^{-1} -像,我们也常称它为集合 B 对于关系 R 而言的原像,或者集合 B 的 R -原像.特别地,关系 R^{-1} 的值域 $R^{-1}(Y)$ 也称为关系 R 的定义域.

定义 1.2.6 设 R 是从集合 X 到集合 Y 的一个关系,即

$$R \subset X \times Y,$$

S 是从集合 Y 到集合 Z 的一个关系,即

$$S \subset Y \times Z.$$

集合

$$\{(x, z) \in X \times Z \mid \text{存在 } y \in Y \text{ 使得 } xRy \text{ 并且 } ySz\}$$

是笛卡儿积 $X \times Z$ 的一个子集, 即从集合 X 到集合 Z 的一个关系, 此关系称为关系 R 与关系 S 的复合或积, 记作 $S \circ R$.

定理 1.2.1 设 R 是从集合 X 到集合 Y 的一个关系, S 是从集合 Y 到集合 Z 的一个关系, T 是从集合 Z 到集合 U 的一个关系. 则

$$(1) (R^{-1})^{-1} = R;$$

$$(2) (S \circ R)^{-1} = R^{-1} \circ S^{-1};$$

$$(3) T \circ (S \circ R) = (T \circ S) \circ R.$$

证: (1) $(x, y) \in (R^{-1})^{-1}$ 意即 $x(R^{-1})^{-1}y$, 这当且仅当 $yR^{-1}x$, 而这又当且仅当 xRy , 也就是 $(x, y) \in R$ 的意思. 于是我们证明了 $(R^{-1})^{-1} = R$.

(2) 和 (3) 的证明都像 (1) 一样根据定义直接验证.

定理 1.2.2 设 R 是从集合 X 到集合 Y 的一个关系, S 是从集合 Y 到集合 Z 的一个关系, 则对于 X 的任意两个子集 A 和 B ,

我们有

$$(1) R(A \cup B) = R(A) \cup R(B);$$

$$(2) R(A \cap B) \subset R(A) \cap R(B);$$

$$(3) (S \circ R)A = S(R(A)).$$

证: (1) 如果 $y \in R(A \cup B)$, 则存在 $x \in A \cup B$ 使得 xRy . 分为两种情形: 当 $x \in A$ 时, 有 $y \in R(A)$; 当 $x \in B$ 时, 有 $y \in R(B)$. 总之, 只要是 $x \in A \cup B$, 我们便有

$$y \in R(A) \cup R(B).$$

这样我们便证明了

$$R(A \cup B) \subset R(A) \cup R(B).$$

反过来的包含关系的证明是类似的, 在此省略.

(2) 和 (3) 的证明也都是像 (1) 的证明一样根据定义进行直接验证.

在本节的最后我们要提到有限个集合的笛卡儿积的概念, 它是两个集合的笛卡儿积的概念的简单推广.

定义 1.2.7 设 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 是 $n \geq 1$ 个集合, 集合

$$\{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_1 \in X_1, x_2 \in X_2, \dots, x_n \in X_n\}$$

称为 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 的笛卡儿积, 并且记作

$$X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n \text{ 或者 } \prod_{i=1}^n X_i.$$

其中 $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 为有序 n 元素组, 对于 $i=1, 2, \dots, n, x_i$ 称为有序 n 元素组 $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 的第 i 个坐标, X_i 称为笛卡儿积 $X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$ 的第 i 个坐标集.

$n \geq 1$ 个集合 X 的笛卡儿积

$$\underbrace{X \times X \times \dots \times X}_{n \uparrow X}$$

常简单地记作 X^n .

类似于两个集合的笛卡儿积的定义中的情形, 在这个定义中“有序 n 元素组”也是一个未经定义的概念, 但读者不难发现仿照前面有序偶的定义方式, 容易给出它的严格定义.

n 个集合的笛卡儿积的概念读者必然也不会感到陌生, 在线性代数中 n 维欧氏空间作为集合而言就是 n 条直线的笛卡儿积.

需要提醒读者的是, 如果你在给定的 n 个集合中交换了集合的次序, 一般说来得到的笛卡儿积会是完全不同的集合.

1.2.2 等价关系

初等数论中的同余类的概念、群论中的商群的概念, 乃至解析几何中的自由向量的概念等都是读者所熟知的. 这些概念的精确定义事实上都有赖于本节中所讨论的等价关系的概念. 在本书中我们将通过等价关系来定义拓扑空间的商空间.

定义 1.2.8 设 X 是一个集合, 从集合 X 到集合 X 的一个关系将简称为集合 X 中的一个关系. 集合 X 中的关系 $\{(x, x) | x \in X\}$ 称为恒同关系、恒同或者对角线, 记作 $\Delta(X)$ 或 Δ .

定义 1.2.9 设 R 是集合 X 中的一个关系, 关系 R 称为自反的, 如果 $\Delta(X) \subset R$, 即对于任何 $x \in X$, 有 xRx ; 关系 R 称为对称的, 如果 $R = R^{-1}$, 即对于任何 $x, y \in X$, 如果 xRy 则 yRx ; 关系 R 称为反对称的, 如果 $R \cap R^{-1} = \emptyset$, 即对于任何 $x, y \in X$, xRy 和 yRx 不能同时成立; 关系 R 称为传递的, 如果 $R \circ R \subset R$, 即对于任何 $x, y, z \in X$, 若 xRy, yRz , 则有 xRz .

集合 X 的一个关系如果同时是自反、对称和传递的, 则称为集合 X 中的一个等价关系.

容易验证集合 X 中的恒同关系 $\Delta(x)$ 是自反、对称、传递的, 因此是 X 中的一个等价关系.