"十二五"江苏省高等学校重点教材

高等学校小学教育专业教材

小学数学研究
与教学指引

◎章　飞　凌晓牧　陈　蓓　魏光明　著

XIAOXUE SHUXUE YANJIU YU JIAOXUE ZHIYIN

南京大学出版社

"十二五"江苏省高等学校重点教材
编号：2015-2-022
高等学校小学教育专业教材

小学数学研究与教学指引

章 飞 凌晓牧 陈 蓓 魏光明 著

南京大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

小学数学研究与教学指引 / 章飞等著. — 南京 : 南京大学出版社，2016.3

高等学校小学教育专业教材

ISBN 978-7-305-16507-8

Ⅰ. ①小… Ⅱ. ①章… Ⅲ. ①小学数学课—教学研究—高等学校—教材 Ⅳ. ①G623.502

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2016)第 022296 号

出版发行　南京大学出版社
社　　址　南京市汉口路 22 号　　　邮　编　210093
出 版 人　金鑫荣

丛 书 名　高等学校小学教育专业教材
书　　名　小学数学研究与教学指引
著　　者　章　飞　凌晓牧　陈　蓓　魏光明
责任编辑　胡　豪　耿士祥　　　编辑热线　025-83594071

照　　排　南京南琳图文制作有限公司
印　　刷　江苏凤凰通达印刷有限公司
开　　本　787×960　1/16　印张 25　字数 422 千
版　　次　2016 年 3 月第 1 版　2016 年 3 月第 1 次印刷
ISBN 978-7-305-16507-8
定　　价　58.00 元

网址：http://www.njupco.com
官方微博：http://weibo.com/njupco
官方微信号：njupress
销售咨询热线：(025) 83594756

目 录

第一篇 数与代数

第二篇 图形与几何

第三篇 统计与概率

第四篇 问题解决与综合实践

第一篇 数与代数

代数是搞清楚世界上数量关系的智力工具。

——[英]怀特海(Alfred North Whitehead 1861—1947)

- 数与代数
  - 数与代数的学习价值
  - 第 1 章 数的认识(一)——自然数的认识
  - 第 2 章 数的运算(一)——自然数的运算
  - 第 3 章 数的认识与运算(二)
  - 第 4 章 方程与函数

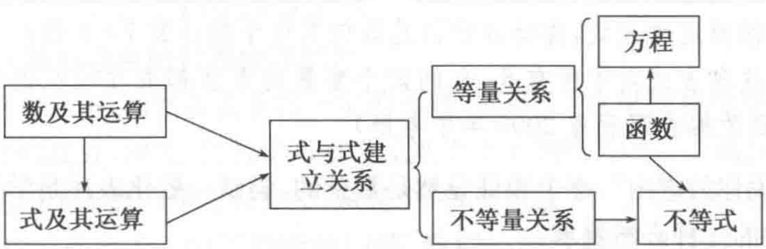
数与代数的学习价值

"数与代数,令人讨厌！到处都是抽象的符号,处处离不开运算。什么数的加减乘除、式的运算啦,什么解方程、不等式,等等,同样需要运算。"是的,顾名思义,代数就是用字母代表数。代数中难免充斥着各种符号,代数学习中必然需要进行一定的代数运算。因此,在很多人的印象中,代数除了繁琐的计算就是空洞的符号,是一门内容枯燥、脱离实际的课程。代数这门学科真是如此吗？代数学习的本质和重点何在呢？

看来,我们还得分析一下代数学习的内容与学习定位。

一、"数与代数"学习的内容和相互关系

数与代数部分有关内容大致可以分为数及其运算、式及其运算、式与式之间的关系这三个方面。



显然,数的学习是式的学习的基础,而数与式的学习,又是为函数、方程、不等式等关系的学习服务的,或者说代数学习的最终目的是能根据具体的情境(现实背景或几何问题)顺利地建立函数、方程、不等式等关系,并利用它们解决问题。当然,解决问题过程中也离不开数与式的运算。

二、"数与代数"学习的目标

从这个意义上讲,代数学习是为了解决现实问题,因而,代数学习的内容

是现实的。代数学习的目标是多样的，包括：

(一) 增强学生的符号意识

数与代数为现实问题的解决、几何学习提供了数学的语言、方法和手段。例如，它的各种符号及其多种表示方式，不仅为解决现实世界的实际问题提供了重要的策略，而且为数学交流提供了有效的途径；它的符号表示手段，深刻地揭示和指明存在于一类问题中的共性和普遍性，把认识和推理提高到一个更高的水平。因此，教学中应着力发展学生的符号意识，让学生习惯于借助代数符号及其运算，解决具体的问题，解释相关的现象，等等。

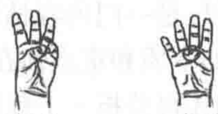
例 1 法国人有一种“小九九”，利用手指帮助学生记忆 6—9 间两个整数的乘法。下面两图是用法国“小九九”计算 7×8 和 8×9 的两个示例。

7×8=?

左手　　右手

∵ 两手伸出的手指数的和为5，
未伸出的手指数的积为6，
∴ 7×8=56。
(7×8=10×(2+3)+3×2=56)

8×9=?



左手　　右手

∵ 两手伸出的手指数的和为7，
未伸出的手指数的积为2，
∴ 8×9=72。
(8×9=10×(3+4)+2×1=72)

(1) 按照这种方式，你估计他们是如何利用手指计算 7×9 的？

(2) 这种方式对于所有 6—9 间两个整数的乘法都成立吗？说说你的理由。（本题改编自河北省 2005 年中考题）

“说说你的理由”，逐个验证显然是繁杂的，尝试一般化表述是学生解决问题过程中的一种必然要求。

实际上，符号意识是数学应用意识的一种外在表现。所谓数学应用意识，笔者认为就是指人们运用数学的观念、方法解决现实问题的主动性。它是数学应用的前提和关键，因而增强学生的数学应用意识具有极为重要的现实意义。严士健先生曾专门论述过数学应用意识的重要性，“要让学生认识到数学本身是有用的，让他们碰到问题能想一想，能否应用数学解决问题，即应培养他们的应用意识。无应用本领，也要有应用意识，有无应用意识是不一样的，

有应用意识遇到问题就会想办法，工具不够就去查。”①因此，应用意识的培养是数学应用教学的首要任务。

（二）提高学生的建模能力

当然，仅有意识是不够的，还需要具备运用数学符号刻画具体问题的能力，即在具体背景中能建立适当的关系（函数、方程、不等式等），较为准确地反映现实问题，也就是说应具备相应的建模能力。

正如上面的例子，仅有想法、意识是不够的，还得顺利建立起关系，解决问题：

设 6—9 间两个整数分别是 a,b，根据归纳的规则，左手伸出的手指数是 $(a-5)$，未伸出的手指数为 $5-(a-5)=10-a$，右手伸出的手指数为 $(b-5)$，未伸出的手指数为 $(10-b)$。两手伸出的手指数的和为 $(a-5)+(b-5)=a+b-10$，未伸出的手指数的积为 $(10-a)\times(10-b)=100-10a-10b+a\times b$，猜想 $a\times b$ 的结果为 $10\times(a+b-10)+(100-10a-10b+a\times b)$。

（三）发展学生必要的运算技能

一旦建立了关系，现实问题业已转化为代数问题，但问题的最终解决还得进行适当的代数运算（如恒等变形等），因此，需要发展学生必要的运算技能，如对于数、式的运算技能、化简技巧，解方程、解不等式的技能，恒等变形以确定函数单调性、最值的技能等。如上述案例中，还得将 $10\times(a+b-10)+(100-10a-10b+a\times b)$ 化简为 $a\times b$ 的形式。

（四）提高学生的代数推理能力

运算过程中，固然需要掌握一定的算理，实际上，这里的算理中就蕴含着代数推理的成分，因此，代数学习也是发展学生推理能力的一个载体。

上述四个方面的学习目标中，从整个“数与代数”学习历程看，核心是前两者，难点也是前两者。因为技能的训练，我们一线教师不乏这样的传统和经验，而意识和能力的培养，可能一线教师还缺乏这样的经验，甚至还缺乏这样的共识，另外其培养也没有一定之规，需要假以时日，不断在具体背景中渗透和外化，因而自然成为教学的难点和重点。

但从小学阶段“数与代数”学习的内容看，小学阶段的主要学习内容是数及其运算，因此，小学阶段“数与代数”的学习应关注运算以及蕴含在运算中的

① 严士健. 面向21世纪的中国数学教育[M]. 南京：江苏教育出版社，1994(12)：115.

代数推理，至于符号意识和建模能力，考虑到小学生的认知实际，还仅仅只能通过具体的问题进行初步的渗透。

第1章　数的认识(一)——自然数的认识

上帝造就了自然数,其他的数都是人为的。

——[德]克罗内克(Leopold Kronecker,1823—1891)

本章概览

自然数是小学数学研究的主要内容。从10以内数到万以内数、到更大数的认识,从自然数的运算到利用自然数解决实际问题等,可见小学数学中涉及大量的有关自然数的内容。本章将站在更高的角度认识自然数,其中涉及人类认数、记数的历史、自然数的基数理论与序数理论、自然数的本质、儿童学习自然数的经验、自然数的认识顺序等,以及基于相关认识的自然数教学案例分析。

- 数的认识(一)——自然数的认识
  - 自然数的本质
    - 自然数的意义
    - 基数理论与序数理论
    - 自然数的本质
    - 学前儿童对自然数的认知经验
    - 教学启示与案例赏析
    - 特殊的自然数0

- 自然数的表示
  - 古代记数方法举例
  - 十进位值制的优点
  - 教学启示
- 自然数的认识
  - 自然数认识的顺序
  - 自然数认识中共性的要求
  - 自然数认识中个性化要求
- 质数与合数
  - 质数研究的意义
  - 算术基本定理
  - 教学启示
  - 1为什么既不是质数又不是合数
- 倍数与约数
  - 常见倍数的规律与教学
  - 最大公约数、最小公倍数的求法与教学

第一节　自然数的本质

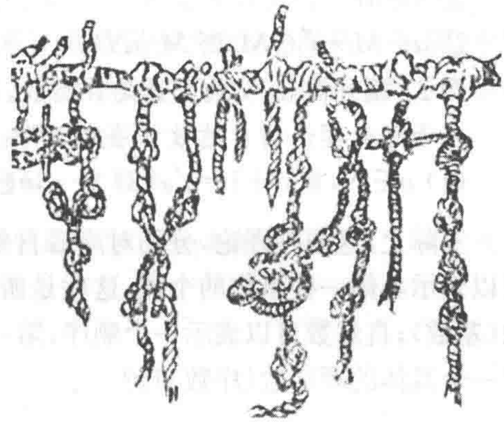
一、自然数的意义

自然数，是英文 Natural number 的直译。这一术语首先被罗马学者波伊

修斯(A. Boethius,475—524)使用。[①]

自然数,顾名思义,就是最为自然的数呗。

克罗内克所说的上帝,应该理解为大自然。实际上,只有自然数是自然地存在着的,在某种意义上还可以看得见、摸得着,其他的数都是人为的模型。自然数用于表示物体的个数,这是人的认识发展过程中首先需要解决的问题,首先需要认识的数。瞧,咿呀学语的小孩,就得区分周围的物体以及他们的数量多少,最简单、基本的就是所谓1个鸡蛋、2张桌子、3个人之类的;历史文献和考古发现表明,人类早期常常采用"结绳""刻画"等方法记录物体的个数;直至上个世纪,一些原始部落还只能认识1,2,3,多。



这些都说明,自然数是最简单、最基本、最原生态的数,自然数名副其实。

二、基数理论与序数理论

近代数学家为了严格地定义自然数,利用公理化的方法给出了自然数的两种理论体系:基数理论与序数理论。

基数理论:

如果集合 A 和集合 B 的元素之间能够建立一一对应关系,就称集合 A 和集合 B 等价,记作 $A \sim B$。

彼此等价的所有集合的共同特征的标志叫作基数,记为 $|A|$。

在基数理论下这样定义加法:设有限集合 A 和 B,且 $A \cap B = \varnothing$,若记 $A \cup B = C$,集合 A,B,C 的基数分别是 a,b 和 c,那么 c 叫作 a 和 b 的和,记作 $a+b=c$。

序数理论:

如果非空集合 N 的元素之间有一个基本关系"后继"(用符号"$'$"表示),

① 张奠宙等. 小学数学研究[M]. 北京:高等教育出版社,2009:21.

并满足下列公理：

(1) $1\in N$，对任意 $a\in N$，a' 不等于1；

(2) 对任何 $a\in N$，有唯一的后继元素 a'；

(3) 1以外的任何元素，只能是一个元素的后继元素；

(4) (归纳公理)若 $M\subseteq N$，且满足下面的条件①②：

① $1\in M$

② $a\in M\rightarrow a'\in M$，则 $M=N$

那么，就称集合 N 的元素是自然数。

基于序数理论的自然数加法定义为：

(1) $a\in N$，则 $a+1=a'$；(2) 设 $a,b\in N$，则 $a+b'=(a+b)'$。

实际上，这两种理论，分别对应着自然数的两种不同意义与作用：自然数可以表示具体一些事物的个数，这就是所谓具体物体组成的集合中元素的个数(基数)；自然数可以表示一个顺序，第一个、第二个、第三个……这不正对应着一个具体的顺序数(序数)吗？

三、自然数的本质

史宁中教授认为："数是对数量的抽象，数的关系是对数量关系的抽象。数量关系的本质是多少，**数量多少比较的方法是对应。**"他在《基本概念与运算法则》一书中给出一些例证①。

在欧洲某地庄园的望楼上有一个乌鸦巢，主人打算杀死这只乌鸦，可是几次都没有成功，因为他一走进这个望楼，乌鸦就飞走，栖在远远的树上，直到他离开望楼才飞回来。后来他想了一个聪明的办法：两个人一起走进望楼，一个人出来，一个人留在里面。可是乌鸦不上当，直到第二个人离开望楼才飞回来。主人不死心，连续试验了几天：三个人，四个人都没有成功。最后用了五个人，四个人走出来，一个人留在里面，这次乌鸦分辨不清了，飞了回来。

这个故事表明：动物对于数量的多少也具有一定的分辨能力。

实际上，儿童对于数量的认识也是如此。

研究表明，两到三岁的孩子也许并不知道用数字描述物体集合，但他们能

① 史宁中. 基本概念与运算法则[M]. 北京：高等教育出版社，2013：79.

分清两个或三个物体的集合①:教师给孩子们观看一只画了三只老鼠的盘子,然后偷偷地擦掉这只盘子上的一只老鼠,孩子们会环顾盘子的周围及其上下,并知道少了一只老鼠。

这说明,人类对于数量多少的感知可能比语言的形成还要早,只是创造语言、符号来表示具体的数量关系,那是一个漫长的过程。

那么,人类早期又如何比较数量的多少,如何记录数量呢?

大多数古文明是借助对应关系来记载数量多少的。《周易·系辞》中记载:"上古结绳而治,后世圣人易之以书契。"就是说,上古的人们在绳子上系结(做记号)来记录数量,后来才发展出书契记载。

在《天空中的圆周率》中记载着这样一件事②:

1929年,考古学家在公元前十五世纪的努鲁孜城废墟中发现了一个很小的圆形土质容器,外侧的楔形文字记载:

与绵羊和山羊有关的物体

4只小公羊

21只生过小羊的母羊

6只生过小羊的母山羊

6只小母羊1只公山羊

8只成年公羊2只小羊

这些数字加起来是48。当人们打开这个容器后发现,里面正好有48个泥球。

西班牙的酒保通过向顾客的兜帽里投放小石子来记数红酒的杯数,因而产生了西班牙成语"echai chinas"(放一个石子)。

从这些例子可以知道,人类在远古时代就能借助集合与集合之间元素的对应关系分辨多少:如果两个集合的元素能够建立一一对应的关系,那么两个集合的元素个数一样多;如果一个集合有剩余,那么这个集合的元素的个数就多于另一个集合元素的个数。

根据上面的分析,**基数更符合人类早期的认知,序数则反映了自然数的某种特点**,序数理论是理论建构时人为地以这些特性为基础建构出来的。而且,蕴含在基数理论中的对应思想在数学的后续发展和学生的后续学习中有着十

① [英]茱莉娅·安吉莱瑞.如何培养学生的数感[M].徐文彬,译.北京:北京师范大学出版社,2007:18.

② 史宁中.基本概念与运算法则[M].北京:高等教育出版社,2013:79-80.

分广泛的应用。

因此，自然数的认识应：**先学习基数再学习序数；关注比较与对应。**

为了凸显从具体的数量到数的抽象过程和对应思想，本应逐个学习1,2,3,4,5这些数，通过重复强化学生的认知感受，而且认识某个具体自然数（如4）时，一般也应经过这样几个程序：呈现一些生活情境，感受几个集合中元素数量的多少，有的集合元素多，有的集合元素少，有的一样多；发现其中几个集合元素一样多，让学生说明怎么知道一样多的（如连一连、画一画、圈一圈）；在某个集合中圈出与已知的集合一样多的元素；在这些活动的基础上，发现它们的个数一样多，需要给出一个新的记号；认识新的数和前面学习的数之间的关系；生活中除了用数4表示具体东西的个数，还有哪些用处，可否表示一个顺序，引出序数的意义。

可是，荷兰数学家和数学教育家弗赖登塔尔则认为："儿童是不会从等价集合的类来构造数的，它不过是数学家的理想化思想。"所以，"人们没有理由要将它作为检验儿童是否掌握数概念的标准。"

这又如何理解呢？

从数学上讲，确实是通过不同集合的等价建立具体某个数的概念的，人类早期也运用了这个想法，但人类早期对这个想法的运用也许是不自觉的，因此，要求一年级的学生领会其中的对应思想，可能有点"曲高和寡"了。况且，如今的学生已经具有丰富的生活经验与认知经验，教学中还需充分利用学生的经验这一学习资源。

四、学前儿童对自然数的认知经验

儿童在学前已经开始跟着父母"唱"数、数数了，并逐步认识一些数字了。

唱数，如："yi，er，san，si，wu，上山打老虎"。这个过程中，儿童已经熟悉了数的语音符号。

数数，如：