

微分方程定性理论

张芷芬 丁同仁 著
黄文灶 董镇喜



科学出版社

现代数学基础丛书·典藏版 12

微分方程定性理论

张芷芬 丁同仁 著
黄文灶 董镇喜

科学出版社

北京

内 容 简 介

本书是作者在常微分方程定性理论的多年教学和科研工作的基础上写成的,着重介绍平面定性理论的主要内容和方法,重点是:平面奇点,极限环的存在,唯一性及个数,无穷远奇点,二维周期系统的调和解,环面上的常微系统,二维流形上的结构稳定性.本书各章均附有习题.

本书可供大学数学系高年级学生及研究生阅读,也可供教师和科研人员参考.

图书在版编目(CIP)数据

现代数学基础丛书:典藏版. 第1辑 / 程民德主编. —北京:科学出版社, 2015. 5

ISBN 978-7-03-044403-5

I. ①现… II. ①程… III. ①数学基础 IV. ①O14

中国版本图书馆CIP数据核字(2015)第110803号

责任编辑:张鸿林 / 责任校对:钟洋

责任印制:徐晓晨 / 封面设计:黄华斌

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码:100717

<http://www.sciencep.com>

北京京华虎彩印刷有限公司印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

1985年5月第一版 开本: B5(720×1000)

2015年7月印刷 印张: 27 1/4

字数: 500 000

(如有印装质量问题, 我社负责调换)

《现代数学基础丛书》编委会

主 编:程民德

副主编:夏道行 龚 昇 王梓坤 齐民友

编 委:(以姓氏笔画为序)

万哲先	王世强	王柔怀	叶彦谦
孙永生	庄圻泰	江泽坚	江泽培
陈希孺	张禾瑞	张恭庆	严志达
胡和生	姜伯驹	聂灵沼	莫绍揆
曹锡华	蒲保明	潘承洞	

序 言

本书是根据 20 世纪 60 年代以来我们在北京大学数学系开设的常微分方程定性理论课所用的讲义编写成的. 它可作为综合性大学、师范院校、工科大学有关专业的高年级大学生和研究生的专门化课程的教材.

由常微分方程来直接研究和判断解的性质, 这是常微分方程定性理论的基本思想. 这种思想在基础课中已经有过, Sturm 振动定理就是一例. 定性理论在常微分方程的研究中往往有其独到的功能. 当前由于电子计算机的出现, 给定性理论研究提供了有力的工具, 同时定性理论分析往往给数字计算提供了理论依据. 常微分方程定性理论从 H. Poincaré 发表的奠基性工作“微分方程所定义的积分曲线”起, 一百年来得到了蓬勃的发展, 它已成为从事许多学科和尖端技术(包括自动控制理论, 航天技术, 生物科学, 经济学等)研究的不可缺少的数学工具, 并且定性的思想和技巧已逐渐渗透到其他数学分支, 例如偏微分方程等.

在二维系统特别是平面系统方面, 定性理论的发展比较完整. 本书基本上是根据上述 H. Poincaré 的名著中所涉及到的几个问题, 对平面或二维系统的有关成果力图作一较为完整的介绍.

本书第一章 § 1, § 2 讲的是常微分方程解的存在性、唯一性、解对初值的连续依赖性问题, 它是全书的基础. 鉴于当前动力系统的符号和概念被广泛使用, 在 § 3 中我们介绍了拓扑动力系统一些最基础的知识, 以及平面动力系统的主要结果. 但这一部分最基本的事实是 Poincaré-Bendixson 环域定理. 讲授时可将这部分移到后面, 也可适当精简, 只要能证明环域定理就可以了. 第二章讲奇点, 基本问题是: 在什么条件下原方程及其相应的线性方程在奇点附近有相同的拓扑结构或定性结构, 以及在一些临界情形下奇点的性质. 对平面系统来说, 这个问题解决得较为彻底. 第三章讲平面奇点指数, 其中 § 3 是奇点指数的有理计算. 第四章论述极限环, 特别是极限环的存在性、唯一性、个数、二次系统的极限环个数等方面, 力图反映当前国内外的最新成果. 第五章讨论无穷远奇点, 为了研究系统的积分曲线的全局结构, 往往必须研究系统的无穷远奇点. 第六章讨论周期微分方程的调和解, 它是属于非线性振动理论的基础知识.

前六章是本书的基本内容. 如果是一学期的课程, 则可在前六章中选取一些内容. 如果是一年的课程, 则第七章环面上的常微系统和第八章结构稳定性理论都是很重要的部分.

为了便于学生自学以及启发学生对此理论的兴趣, 我们尽量介绍定性理论中

最典型和最常用的方法和技巧,同时也尽量介绍有关内容的当前最新成果,此外为了便于读者的学习,我们在书中还列举了一些例子,每节后面都配有习题.

书中打符号“*”的章节乃是进一步的要求,初学时可略过.

本书第一章到第五章是张芷芬撰写或修改定稿的,其中第三章是张芷芬在高维新所写初稿基础上编写成的;第四章 § 6 和第五章 § 3 是索光俭提供初稿,由张芷芬改写成的.第六章是丁同仁撰写的,第一章 § 1, § 2 和第七章是黄文灶编写的,第八章是董镇喜撰写的.

余澍祥,高维新,何启敏,高素志,陈平尚,曾宪武,王裕民,李承治,丁大正,王铎,丁伟岳,王鹏远等还帮助和审查过本书的某些章节.曾试用过北大所编定性理论讲义的黄启宇、王克、马知恩、蔡燧林、徐世龙,都长青,俞伯华,马遵路等和参加过北大定性理论讨论班的人员,都对本书提出过很多宝贵意见.本书在写作过程中得到了廖山涛教授的热情关怀,他还对第五章及第八章的有关内容提出过宝贵意见,叶彦谦教授在审查本书过程中从文字到内容提出了很多中肯的意见和有益的建议.在此对他们一并致以谢意.

限于我们的知识水平,书中难免有错误及不妥之处,请读者批评指正.

作 者

于 1985 年 5 月

《现代数学基础丛书》已出版书目

- 1 数理逻辑基础(上册) 1981.1 胡世华 陆钟万 著
- 2 数理逻辑基础(下册) 1982.8 胡世华 陆钟万 著
- 3 紧黎曼曲面引论 1981.3 伍鸿熙 吕以鞏 陈志华 著
- 4 组合论(上册) 1981.10 柯 召 魏万迪 著
- 5 组合论(下册) 1987.12 魏万迪 著
- 6 数理统计引论 1981.11 陈希孺 著
- 7 多元统计分析引论 1982.6 张尧庭 方开泰 著
- 8 有限群构造(上册) 1982.11 张远达 著
- 9 有限群构造(下册) 1982.12 张远达 著
- 10 测度论基础 1983.9 朱成熹 著
- 11 分析概率论 1984.4 胡迪鹤 著
- 12 微分方程定性理论 1985.5 张芷芬 丁同仁 黄文灶 董镇喜 著
- 13 傅里叶积分算子理论及其应用 1985.9 仇庆久 陈恕行 是嘉鸿 刘景麟 蒋鲁敏 编
- 14 辛几何引论 1986.3 J.柯歇尔 邹异明 著
- 15 概率论基础和随机过程 1986.6 王寿仁 编著
- 16 算子代数 1986.6 李炳仁 著
- 17 线性偏微分算子引论(上册) 1986.8 齐民友 编著
- 18 线性偏微分算子引论(下册) 1992.1 齐民友 徐超江 编著
- 19 实用微分几何引论 1986.11 苏步青 华宣积 忻元龙 著
- 20 微分动力系统原理 1987.2 张筑生 著
- 21 线性代数群表示导论(上册) 1987.2 曹锡华 王建磐 著
- 22 模型论基础 1987.8 王世强 著
- 23 递归论 1987.11 莫绍揆 著
- 24 拟共形映射及其在黎曼曲面论中的应用 1988.1 李 忠 著
- 25 代数体函数与常微分方程 1988.2 何育赞 萧修治 著
- 26 同调代数 1988.2 周伯壖 著
- 27 近代调和分析方法及其应用 1988.6 韩永生 著
- 28 带有时滞的动力系统的稳定性 1989.10 秦元勋 刘永清 王 联 郑祖庠 著
- 29 代数拓扑与示性类 1989.11 [丹麦] I. 马德森 著
- 30 非线性发展方程 1989.12 李大潜 陈韵梅 著

- 31 仿微分算子引论 1990.2 陈恕行 仇庆久 李成章 编
- 32 公理集合论导引 1991.1 张锦文 著
- 33 解析数论基础 1991.2 潘承洞 潘承彪 著
- 34 二阶椭圆型方程与椭圆型方程组 1991.4 陈亚浙 吴兰成 著
- 35 黎曼曲面 1991.4 吕以桢 张学莲 著
- 36 复变函数逼近论 1992.3 沈燮昌 著
- 37 Banach 代数 1992.11 李炳仁 著
- 38 随机点过程及其应用 1992.12 邓永录 梁之舜 著
- 39 丢番图逼近引论 1993.4 朱尧辰 王连祥 著
- 40 线性整数规划的数学基础 1995.2 马仲蕃 著
- 41 单复变函数论中的几个论题 1995.8 庄圻泰 杨重骏 何育赞 闻国椿 著
- 42 复解析动力系统 1995.10 吕以桢 著
- 43 组合矩阵论(第二版) 2005.1 柳柏濂 著
- 44 Banach 空间中的非线性逼近理论 1997.5 徐士英 李冲 杨文善 著
- 45 实分析导论 1998.2 丁传松 李秉彝 布伦 著
- 46 对称性分岔理论基础 1998.3 唐云 著
- 47 Gel'fond-Baker 方法在丢番图方程中的应用 1998.10 乐茂华 著
- 48 随机模型的密度演化方法 1999.6 史定华 著
- 49 非线性偏微分复方程 1999.6 闻国椿 著
- 50 复合算子理论 1999.8 徐宪民 著
- 51 离散鞅及其应用 1999.9 史及民 编著
- 52 惯性流形与近似惯性流形 2000.1 戴正德 郭柏灵 著
- 53 数学规划导论 2000.6 徐增堃 著
- 54 拓扑空间中的反例 2000.6 汪林 杨富春 编著
- 55 序半群引论 2001.1 谢祥云 著
- 56 动力系统的定性与分支理论 2001.2 罗定军 张祥 董梅芳 著
- 57 随机分析学基础(第二版) 2001.3 黄志远 著
- 58 非线性动力系统分析引论 2001.9 盛昭瀚 马军海 著
- 59 高斯过程的样本轨道性质 2001.11 林正炎 陆传荣 张立新 著
- 60 光滑映射的奇点理论 2002.1 李养成 著
- 61 动力系统的周期解与分支理论 2002.4 韩茂安 著
- 62 神经动力学模型方法和应用 2002.4 阮炯 顾凡及 蔡志杰 编著
- 63 同调论——代数拓扑之一 2002.7 沈信耀 著
- 64 金兹堡-朗道方程 2002.8 郭柏灵 黄海洋 蒋慕容 著

- 65 排队论基础 2002.10 孙荣恒 李建平 著
- 66 算子代数上线性映射引论 2002.12 侯晋川 崔建莲 著
- 67 微分方法中的变分方法 2003.2 陆文端 著
- 68 周期小波及其应用 2003.3 彭思龙 李登峰 谌秋辉 著
- 69 集值分析 2003.8 李 雷 吴从炘 著
- 70 强偏差定理与分析方法 2003.8 刘 文 著
- 71 椭圆与抛物型方程引论 2003.9 伍卓群 尹景学 王春朋 著
- 72 有限典型量子空间轨道生成的格(第二版) 2003.10 万哲先 霍元极 著
- 73 调和分析及其在偏微分方程中的应用(第二版) 2004.3 苗长兴 著
- 74 稳定性和单纯性理论 2004.6 史念东 著
- 75 发展方程数值计算方法 2004.6 黄明游 编著
- 76 传染病动力学的数学建模与研究 2004.8 马知恩 周义仓 王稳地 靳 祯 著
- 77 模李超代数 2004.9 张永正 刘文德 著
- 78 巴拿赫空间中算子广义逆理论及其应用 2005.1 王玉文 著
- 79 巴拿赫空间结构和算子理想 2005.3 钟怀杰 著
- 80 脉冲微分系统引论 2005.3 傅希林 闫宝强 刘衍胜 著
- 81 代数学中的 Frobenius 结构 2005.7 汪明义 著
- 82 生存数据统计分析 2005.12 王启华 著
- 83 数理逻辑引论与归结原理(第二版) 2006.3 王国俊 著
- 84 数据包络分析 2006.3 魏权龄 著
- 85 代数群引论 2006.9 黎景辉 陈志杰 赵春来 著
- 86 矩阵结合方案 2006.9 王仰贤 霍元极 麻常利 著
- 87 椭圆曲线公钥密码导引 2006.10 祝跃飞 张亚娟 著
- 88 椭圆与超椭圆曲线公钥密码的理论的实现 2006.12 王学理 裴定一 著
- 89 散乱数据拟合的模型、方法和理论 2007.1 吴宗敏 著
- 90 非线性演化方程的稳定性和分歧 2007.4 马 天 汪宁宏 著
- 91 正规族理论及其应用 2007.4 顾永兴 庞学诚 方明亮 著
- 92 组合网络理论 2007.5 徐俊明 著
- 93 矩阵的半张量积:理论与应用 2007.5 程代展 齐洪胜 著
- 94 鞅与 Banach 空间几何学 2007.5 刘培德 著
- 95 非线性常微分方程边值问题 2007.6 葛渭高 著
- 96 戴维-斯特瓦尔松方程 2007.5 戴正德 蒋慕蓉 李栋龙 著
- 97 广义哈密顿系统理论及其应用 2007.7 李继彬 赵晓华 刘正荣 著
- 98 Adams 谱序列和球面稳定同伦群 2007.7 林金坤 著

- 99 矩阵理论及其应用 2007.8 陈公宁 编著
- 100 集值随机过程引论 2007.8 张文修 李寿梅 汪振鹏 高勇 著
- 101 偏微分方程的调和分析方法 2008.1 苗长兴 张波 著
- 102 拓扑动力系统概论 2008.1 叶向东 黄文 邵松 著
- 103 线性微分方程的非线性扰动(第二版) 2008.3 徐登洲 马如云 著
- 104 数组组合地图论(第二版) 2008.3 刘彦佩 著
- 105 半群的 S -系理论(第二版) 2008.3 刘仲奎 乔虎生 著
- 106 巴拿赫空间引论(第二版) 2008.4 定光桂 著
- 107 拓扑空间论(第二版) 2008.4 高国士 著
- 108 非经典数理逻辑与近似推理(第二版) 2008.5 王国俊 著
- 109 非参数蒙特卡罗检验及其应用 2008.8 朱力行 许王莉 著
- 110 Camassa-Holm 方程 2008.8 郭柏灵 田立新 杨灵娥 殷朝阳 著
- 111 环与代数(第二版) 2009.1 刘绍学 郭晋云 朱彬 韩阳 著
- 112 泛函微分方程的相空间理论及应用 2009.4 王克 范猛 著
- 113 概率论基础(第二版) 2009.8 严士健 王隼骧 刘秀芳 著
- 114 自相似集的结构 2010.1 周作领 瞿成勤 朱智伟 著
- 115 现代统计研究基础 2010.3 王启华 史宁中 耿直 主编
- 116 图的可嵌入性理论(第二版) 2010.3 刘彦佩 著
- 117 非线性波动方程的现代方法(第二版) 2010.4 苗长兴 著
- 118 算子代数与非交换 L_p 空间引论 2010.5 许全华 吐尔德别克 陈泽乾 著
- 119 非线性椭圆型方程 2010.7 王明新 著
- 120 流形拓扑学 2010.8 马天 著
- 121 局部域上的调和分析与分形分析及其应用 2011.4 苏维宜 著
- 122 Zakharov 方程及其孤立波解 2011.6 郭柏灵 甘在会 张景军 著
- 123 反应扩散方程引论(第二版) 2011.9 叶其孝 李正元 王明新 吴雅萍 著
- 124 代数模型论引论 2011.10 史念东 著
- 125 拓扑动力系统——从拓扑方法到遍历理论方法 2011.12 周作领 尹建东 许绍元 著
- 126 Littlewood-Paley 理论及其在流体动力学方程中的应用 2012.3 苗长兴 吴家宏 章志飞 著
- 127 有约束条件的统计推断及其应用 2012.3 王金德 著
- 128 混沌、Mel'nikov 方法及新发展 2012.6 李继彬 陈凤娟 著
- 129 现代统计模型 2012.6 薛留根 著
- 130 金融数学引论 2012.7 严加安 著
- 131 零过多数据的统计分析及其应用 2013.1 解锋昌 韦博成 林金官 著

- 132 分形分析引论 2013.6 胡家信 著
- 133 索伯列夫空间导论 2013.8 陈国旺 编著
- 134 广义估计方程估计方程 2013.8 周 勇 著
- 135 统计质量控制图理论与方法 2013.8 王兆军 邹长亮 李忠华 著
- 136 有限群初步 2014.1 徐明曜 著
- 137 拓扑群引论(第二版) 2014.3 黎景辉 冯绪宁 著
- 138 现代非参数统计 2015.1 薛留根 著

目 录

第一章 基本定理	1
§ 1. 解的存在性、唯一性及对初值(或参数)的依赖性	1
§ 2. 解的延拓	11
§ 3. 动力系统的一般概念	16
§ 4. 平面上的动力系统	23
习题一	35
参考文献	38
第二章 平面奇点	39
§ 1. 奇点和常点	39
§ 2. 常系数线性方程组的奇点	41
§ 3. 非线性方程组的奇点	47
§ 4. 特征根实部不为 0 时附加非线性项的情形	71
§ 5. 特征根是一对纯虚根时附加非线性项的情形(中心和焦点判别)	79
§ 6. * 奇点的几何分类	93
§ 7. * 有零特征根时附加非线性项的情形	101
习题二	123
参考文献	125
第三章 平面奇点指数	127
§ 1. 连续向量场的旋转数	127
§ 2. 平面奇点指数	132
§ 3. Cauchy 指标	138
§ 4. 齐次方程孤立奇点指数的有理计算	143
§ 5. * 临界奇点指数的有理计算	145
§ 6. * Bendixson 公式	150
习题三	152
参考文献	154
第四章 极限环	155
§ 1. 极限环的存在性	156
§ 2. 后继函数和极限环的重次及稳定性	182
§ 3. 旋转向量场	186

§ 4. 极限环的唯一性	200
§ 5. 极限环的唯一性	231
§ 6. * 二次系统极限环的个数	247
§ 7. * 极限环的唯一 n 性	265
习题四	287
参考文献	291
第五章 无穷远奇点	296
§ 1. Poincaré 变换	296
§ 2. 平面系统的全局结构	306
§ 3. 用无穷远奇点研究极限环的存在性	319
§ 4. 二维紧致曲面 S^2 , P_2 和 T^2 上连续向量场的奇点指数和	322
习题五	326
参考文献	328
第六章 二维周期系统的调和解	329
§ 1. 预备知识	329
§ 2. 具有周期性强迫力的常系数线性系统	332
§ 3. 拟线性系统	335
§ 4. 平均方法	341
§ 5. Duffing 方程的小摄动	345
§ 6. 高频强迫振动的小振幅调和解	348
§ 7. 高频强迫振动的大振幅调和解	351
§ 8. 耗散系统	358
§ 9. 无阻尼的 Duffing 型方程	365
习题六	369
参考文献	371
第七章 环面上的常微系统	372
§ 1. 引言	372
§ 2. 旋转数	374
§ 3. 极限点集	378
§ 4. 各态经历	380
§ 5. 奇异情况举例	384
§ 6. 介绍 Schweitzer 之例	387
习题七	389
参考文献	390

第八章 结构稳定性	391
§ 1. 平面圆盘上常微系统的结构稳定性	391
§ 2. n 维流形上常微系统的结构稳定性	403
习题八	417
参考文献	418

第一章 基本定理

本章介绍关于微分方程的解的一些基本定理,这是常微分方程一般理论的基础.

§ 1. 解的存在性、唯一性及对初值(或参数)的依赖性

定理 1.1 考虑 Cauchy 问题(E):

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(t, x), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \quad (1.1)$$

其中 x 是 \mathbf{R}^n 中的向量, $f(t, x)$ 是实变量 t 和 n 维向量 x 的 n 维向量值函数; 又设 $f(t, x)$ 在闭区域 G :

$$|t - t_0| \leq a, \quad \|x - x_0\| \leq b,$$

上连续, 并且对 x 适合 Lipschitz 条件:

$$\begin{aligned} \|f(t, x_1) - f(t, x_2)\| &\leq L \|x_1 - x_2\|, \\ (t, x_i) &\in G, \quad i = 1, 2, \end{aligned} \quad (1.2)$$

其中 Lipschitz 常数 $L > 0$. 令

$$M = \max_G \|f(t, x)\|, \quad h = \min\left(a, \frac{b}{M}\right). \quad (1.3)$$

那么 Cauchy 问题(E)在区间 $|t - t_0| \leq h$ 上有一个解 $x = \varphi(t)$, 并且它是唯一的.

证明 我们分以下五个步骤证明之.

(一) Cauchy 问题(E)等价于积分方程

$$x = x_0 + \int_{t_0}^t f(t, x) dt. \quad (1.4)$$

事实上, 令 $x = \varphi(t)$ 是 Cauchy 问题(E)的解, 于是由(1.1)对 t 积分便有

$$\varphi(t) = C + \int_{t_0}^t f(t, \varphi(t)) dt,$$

再由初值条件(1.2)确定 $C = x_0$, 因此 $x = \varphi(t)$ 是(E)的解.

反之, 设 $x = \varphi(t)$ 是积分方程(1.4)的解, 从(1.4)可知 $\varphi(t)$ 是连续的, 从而 $f(t, \varphi(t))$ 也是连续的, 因此, $\varphi(t)$ 是可微的; 于是, 对积分方程(1.4)的两侧对 t 求导数, 便得到

$$\varphi'(t) = f(t, \varphi(t)).$$

并且由(1.4)可见 $x = \varphi(t)$ 满足初值条件

$$\varphi(t_0) = x_0,$$

即 $\varphi(t)$ 是 Cauchy 问题(E)的解.

(二) 作(1.4)的 Picard 近似解序列 $\{\varphi_n(t)\}$

令 $\varphi_0(t) \equiv x_0$,

$$\varphi_1(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(t, x_0) dt, \quad |t - t_0| \leq h. \quad (1.5)$$

则

$$\|\varphi_1(t) - \varphi_0(t)\| \leq \left| \int_{t_0}^t \|f(t, x_0)\| dt \right| \leq M \cdot |t - t_0| \leq b. \quad (1.6)$$

当 x 是一维时, 图形如图 1.1:

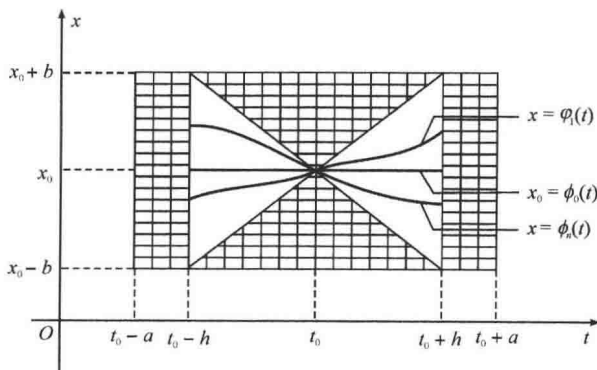


图 1.1

我们可以采用归纳的程序: 设已得第 n 次近似解为

$$\varphi_n(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(t, \varphi_{n-1}(t)) dt, \quad (1.7)$$

而且当 $|t - t_0| \leq h$ 时, 我们有

$$\|\varphi_n(t) - x_0\| \leq b.$$

令第 $n+1$ 次近似解为

$$\varphi_{n+1}(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(t, \varphi_n(t)) dt, \quad (1.8)$$

则当 $|t - t_0| \leq h$ 时, 我们有

$$\begin{aligned} \|\varphi_{n+1}(t) - x_0\| &\leq \left\| \int_{t_0}^t f(t, \varphi_n(t)) dt \right\| \\ &\leq M \cdot |t - t_0| \leq Mh \leq b, \quad n = 1, 2, 3, \dots \end{aligned}$$

(三) 序列 $\{\varphi_n(t)\}$ 的一致收敛性

由于 $\{\varphi_n(t)\}$ 的收敛问题等价于级数

$$\begin{aligned} & \varphi_0(t) + [\varphi_1(t) - \varphi_0(t)] + [\varphi_2(t) - \varphi_1(t)] \\ & + \cdots + [\varphi_n(t) - \varphi_{n-1}(t)] + \cdots \end{aligned} \quad (1.9)$$

的收敛问题,我们只要证明(1.9)的一致收敛性即可.

首先证明(1.9)的一般项满足

$$\begin{aligned} \|\varphi_n(t) - \varphi_{n-1}(t)\| & \leq \frac{M}{L} \frac{(L|t-t_0|)^n}{n!}, \\ n & = 1, 2, 3, \cdots. \end{aligned} \quad (1.10)$$

由(1.6)可知(1.10)对 $n=1$ 成立. 现设不等式(1.10)对 $n=m$ 成立, 则我们有下述不等式:

$$\begin{aligned} & \|\varphi_{m+1}(t) - \varphi_m(t)\| \\ & = \left\| \int_{t_0}^t (f(t, \varphi_m(t)) - f(t, \varphi_{m-1}(t))) dt \right\| \\ & \leq L \cdot \left| \int_{t_0}^t \|\varphi_m(t) - \varphi_{m-1}(t)\| dt \right| \\ & \leq \frac{M}{L} \frac{(L|t-t_0|)^{m+1}}{(m+1)!}. \end{aligned}$$

由此可知不等式(1.10)对所有正整数 n 都成立. 所以当 $|t-t_0| \leq h$ 时, 我们得到

$$\|\varphi_n(t) - \varphi_{n-1}(t)\| \leq \frac{M}{L} \frac{(Lh)^n}{n!}. \quad (1.11)$$

由 Weierstrass 判别法推出级数(1.9)是一致收敛的, 从而序列 $\{\varphi_n(t)\}$ 一致收敛. 令 $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(t) = \varphi(t)$, 则 $x = \varphi(t)$ 连续, 且 $\|\varphi(t) - x_0\| \leq b$ ($|t-t_0| \leq h$).

(四) 证明 $x = \varphi(t)$ 是积分方程(1.4)的解

令 $n \rightarrow +\infty$, 由(1.8)得

$$\varphi(t) = x_0 + \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{t_0}^t f(t, \varphi_n(t)) dt. \quad (1.12)$$

因此, 归结于证明

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{t_0}^t f(t, \varphi_n(t)) dt = \int_{t_0}^t f(t, \varphi(t)) dt. \quad (1.13)$$

任给定 $\varepsilon > 0$, 可找到 $N = N(\varepsilon) > 0$, 使得当 $|t-t_0| \leq h$, 便有不等式

$$\|\varphi_n(t) - \varphi(t)\| \leq \frac{\varepsilon}{Lh}, \quad \text{只要 } n \geq N.$$

因此, 当 $n \geq N$ 时, 对 $|t-t_0| \leq h$, 我们有

$$\left\| \int_{t_0}^t f(t, \varphi_n(t)) dt - \int_{t_0}^t f(t, \varphi(t)) dt \right\|$$