普通高等教育"十三五"规划教材

经济数学应用教程

经济运筹方法

张从军　李　辉
鲍远圣　孙春燕　编

3

科 学 出 版 社

普通高等教育“十三五”规划教材
经济数学应用教程

经济运筹方法

张从军　李　辉
鲍远圣　孙春燕　编

科学出版社
北京

内 容 简 介

本书是“经济数学应用教程”之一. 主要内容包括线性规划方法、目标规划方法、整数规划方法、动态规划方法、非线性规划方法、网络分析方法、存储优化方法、排队优化方法、决策方法、博弈方法等各章, 并配有适量习题.

本书贯彻问题教学法的基本思想, 对许多数学概念, 先从提出经济问题入手, 再引入数学概念, 介绍数学工具, 最后解决所提出的问题, 从而使学生了解应用背景, 提高学习的积极性; 书中详细介绍相应的数学软件, 为学生将来的研究工作和就业奠定基础; 穿插于全书的数学建模的基本思想和方法, 引导学生学以致用, 学用结合.

本书可作为普通高等学校财经类各专业运筹学课程的教材, 最大限度地适应财经类各专业学习该课程和后续课程的需要, 以及报考研究生的需要和将来从事与财经有关的实际工作的需要.

图书在版编目(CIP)数据

经济运筹方法/张从军等编. —北京: 科学出版社, 2016.8
普通高等教育“十三五”规划教材·经济数学应用教程
ISBN 978-7-03-048042-2

Ⅰ. ①经… Ⅱ. ①张… Ⅲ. ①经济数学-高等学校-教材 ②运筹学-应用-经济管理-高等学校-教材 Ⅳ. ①F224.0 ②F224.3

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2016) 第 077648 号

责任编辑: 姚莉丽 张中兴 / 责任校对: 钟 洋
责任印制: 白 洋 / 封面设计: 陈 敬

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码: 100717
http://www.sciencep.com

文林印务有限公司 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2016 年 8 月第 一 版 开本: 720 × 1000 B5
2016 年 8 月第一次印刷 印张: 18 1/4
字数: 368 000

定价: 32.00 元
(如有印装质量问题, 我社负责调换)

前　言

经济学是一门研究人类经济行为和经济现象及人们如何进行权衡取舍的学问. 正是由于资源的稀缺性与人的欲望的无止境性这一对基本冲突才产生了经济学, 逼迫人们作出权衡取舍的选择, 尽可能有效地利用资源, 用有限的资源最大限度地满足人们的欲望. 现代经济学是按照科学方法系统探索人类经济行为和社会经济现象的一门学科. 本书介绍的运筹方法是现代经济学最常用的科学方法之一.

所谓经济运筹方法, 就是在经济管理领域, 运用数学工具, 对需要进行管理的问题统筹规划, 作出最优决策的方法. 它是 "管理系统的人为了获得关于系统运行的最优解而必须使用的一种科学方法". 经济运筹方法应用许多数学工具和逻辑推理, 研究系统中人、财、物的组织管理、筹划调度等问题, 以期发挥最大效益.

随着现代经济学的教育和研究在中国迅速发展和深入, 越来越多的人感到数学在经济学中的重要性. 但面对数学纷繁复杂的类目, 高等学校财经类各专业培养的人才, 数学应该学什么? 换句话说, 怎样使经济数学课程体系更趋符合财经专业培养的目标体系? 怎样兼顾经济数学课程的理论性与应用性、思想性与工具性? 怎样实现经济数学课程在经管类专业的作用? 作为我们主持承担的全国高等教育科学 "十五" 规划重点研究课题、中国高等教育学会 "十一五" 教育科学研究规划课题、教育部高等理工教育数学教学研究与改革课题、江苏省高等教育教改立项研究课题的研究内容之一, 结合一线教学实践, 多年来我们一直进行着探索, 现在的这本《经济运筹方法》就是我们所做的尝试.

配合我们的教学观念更新, 教学改革实践, 教学项目研究, 我们早年编写了经济数学基础教程 —— 微积分、线性代数、概率论与数理统计. 作为上述工作的继续和深入, 我们继而编写了经济数学应用教程, 本书就是其中之一, 并于 2009 年 3 月在复旦大学出版社出版了第一版.

该书自 2009 年出版以来, 得到了许多院系、教师和广大学生的充分肯定. 经过多年使用, 我们陆续收到了许多读者特别是一些一线任课教师的宝贵意见. 作为江苏省重点教材的系列教材, 根据江苏省重点教材的要求, 我们将修订后的教材交由科学出版社于 2016 年纳入普通高等教育 "十三五" 规划教材再版.

本书由张从军教授提出编写思想和编写提纲、列出章节目录、编写附录部分, 最后对全书进行修改补充、统稿、定稿. 李辉副教授编写了第 1~4 章, 鲍远圣副教授编写了第 5~7 章, 孙春燕副教授编写了第 8~10 章.

值此新版之际, 我们希望再次表达我们的谢意. 感谢使用本教材的教师和读者给我们提出的宝贵意见, 感谢相关院系对我们的支持和帮助, 感谢关心本教材不断完善的有关校领导和教务部门, 感谢审定本教材的相关专家, 感谢复旦大学出版社特别是范仁梅总监为本教材在复旦大学出版社出版的第一版所做的一切有益工作.

本书在编写过程中, 参考了大量的相关教材和资料, 选用了其中的有关内容和例题、习题, 在此谨向有关编者、作者一并表示我们的谢意.

最后, 我们还要特别感谢科学出版社对本教材出版给予的大力支持.

我们再次恳切期望有关专家、学者不吝赐教, 诚恳期望使用本教材的教师和同学们, 提出并反馈宝贵意见.

联系邮箱: yysxx@njue.edu.cn

编 者

2016 年 3 月

目　录

第 1 章　线性规划方法

线性规划 (简称为 (LP)) 问题是指目标函数和约束条件都是线性函数的数学规划问题, 它是运筹学的一个重要分支. 线性规划最早由旦茨格 (G.B.Dantzig) 在 1947 年提出, 1949 年旦茨格提出了求解线性规划问题的一个有效的方法 —— 单纯形方法, 它被列为 20 世纪 10 大算法之一. 借助线性规划软件在计算机上能处理成千上万个约束条件和决策变量的线性规划问题. 目前线性规划在工业、农业、商业、交通运输业、军事、管理决策等领域都发挥着重要作用. 本章主要介绍常见的线性规划方法及其经济应用, 最后介绍常用的解线性规划的计算机软件.

1.1　图　解　法

具有两个变量的线性规划问题可用图解法求解.

1.1.1　图解法的步骤

步骤 1: 在平面直角坐标系中, 画出可行解区域. 可行解区域是各约束条件所表示的半平面的公共部分.

步骤 2: 求最优解. 将目标函数中的 Z 看作参数, 作出等值线. 选取一条等值线, 使它与可行解区域有公共点, 并取得最大值或最小值.

例 1.1　用图解法求解下列线性规划问题, 并指出这些问题是具有唯一最优解、无穷多最优解、无界解还是无可行解?

(1) $\max Z = 3x_1 + 4x_2$;

$$\text{s.t.}\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leqslant 6, \\ 3x_1 + 2x_2 \leqslant 12, \\ x_2 \leqslant 2, \\ x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0. \end{cases}$$

(2) $\max Z = x_1 + 2x_2$;

$$\text{s.t.}\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leqslant 6, \\ 3x_1 + 2x_2 \leqslant 12, \\ x_2 \leqslant 2, \\ x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0. \end{cases}$$

(3) $\max Z = x_1 + x_2$;

$$\text{s.t.}\begin{cases} x_1 + 2x_2 \geqslant 2, \\ x_1 - x_2 \geqslant -1, \\ x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0. \end{cases}$$

(4) $\min Z = 3x_1 - 2x_2$;

$$\text{s.t.}\begin{cases} x_1 + x_2 \leqslant 1, \\ 2x_1 + 3x_2 \geqslant 6, \\ x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0. \end{cases}$$

解　(1) 图 1-1 中的阴影区域为可行域, 目标函数 $Z = 3x_1+4x_2$ 在点 $B\left(3, \dfrac{3}{2}\right)$

处达到最大. 该线性规划问题的最优解为 $x_1 = 3$, $x_2 = \dfrac{3}{2}$; 最优值为 $\max Z = 15$, 且最优解是唯一的.

(2) 图 1-2 中的阴影区域为可行域, 目标函数 $Z = x_1 + 2x_2$ 在点 $B\left(3, \dfrac{3}{2}\right)$ 与点 $C(2, 2)$ 连线上的任一点处达到最大值. 该线性规划问题的最优解为 $\boldsymbol{x} = \lambda \cdot \left(3, \dfrac{3}{2}\right) + (1-\lambda) \cdot (2, 2)$, $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$; 最优值 $\max Z = 6$, 且有无穷多个最优解.

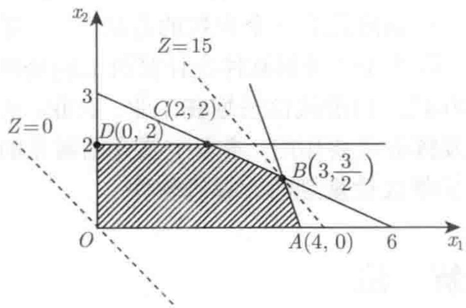

图 1-1

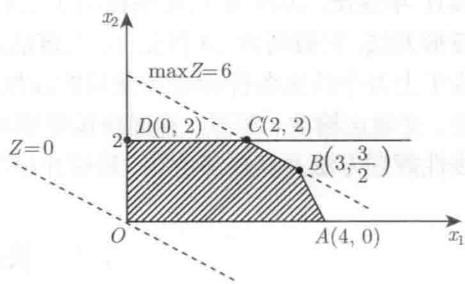

图 1-2

(3) 图 1-3 中的阴影区域为可行域, 可行域为无界域, 目标函数可以增加到无穷大. 此时该线性规划问题无最优解或为无界解. 如果将该问题的目标函数改为求最小值, 即 $\min Z = x_1 + x_2$, 则有唯一最优解 $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, 最优值为 $\min Z = 1$.

(4) 如图 1-4 所示, 该问题的可行域为空集, 即无可行解, 也不存在最优解.

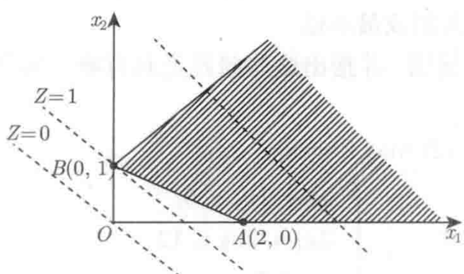

图 1-3

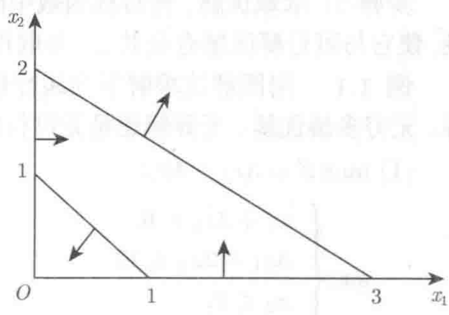

图 1-4

1.1.2　图解法评析

图解法简单直观, 有助于初学者了解线性规划问题的几何意义及求解的基本原理. 求解线性规划问题时不需将问题化为标准型, 可以直接在平面上作图, 但此法只适用于解两个变量的线性规划问题, 对于 3 个以上变量的线性规划问题, 图解法失效, 故该方法有一定的局限性.

1.2 单纯形法

考虑标准形式的线性规划问题:

$$\max Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n;$$
$$\text{s.t.} \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \qquad\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m, \\ x_j \geqslant 0\,(j = 1, 2, \cdots, n). \end{cases}$$

令

$$c = (c_1, c_2, \cdots, c_n), \quad \boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^{\mathrm{T}},$$
$$\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, \cdots, b_m)^{\mathrm{T}}, \quad A = (a_{ij})_{m\times n}.$$

于是标准形式的线性规划问题可表示为

$$\text{(LP)} \quad \begin{array}{l} \max Z = cx; \\ \text{s.t.} \begin{cases} A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \\ \boldsymbol{x} \geqslant 0. \end{cases} \end{array}$$

设矩阵 A 为满秩矩阵且 A 的秩为 m, 则称 A 的任一 m 阶可逆子阵为 (LP) 的一个基. 若变量 x_j 所对应的列 $\boldsymbol{p}_j$ 包含在基 B 中, 则称 x_j 为 B 的基变量, 否则称 x_j 为 B 的非基变量.

设 $B = (\boldsymbol{p}_{J_1}, \boldsymbol{p}_{J_2}, \cdots, \boldsymbol{p}_{J_m})$ 为 A 的一个基, 以及

$$\boldsymbol{x}_B = (x_{J_1}, x_{J_2}, \cdots, x_{J_m})^{\mathrm{T}}, \quad B^{-1}\boldsymbol{b} = (b_{10}, b_{20}, \cdots, b_{m0})^{\mathrm{T}},$$

称方程组 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ 的解: $x_{J_1} = b_{10}, x_{J_2} = b_{20}, \cdots, x_{J_m} = b_{m0}$, 其余的 $x_j = 0$ 为对应于 B 的基本解. 将满足 $B^{-1}\boldsymbol{b} \geqslant 0$ (即 $x_{J_i} \geqslant 0, i = 1, 2, \cdots, m$) 的基本解叫做 (LP) 的基本可行解, 而 B 称为 (LP) 的可行基.

1.2.1 单纯形法的基本思想

单纯形法的基本思想是从一个基本可行解出发, 寻找使目标函数上升的另一个基本可行解.

1.2.2　单纯形表

设 $B=(\boldsymbol{p}_{J_1},\boldsymbol{p}_{J_2},\cdots,\boldsymbol{p}_{J_m})$ 为可行基, $c_B=(c_{J_1},c_{J_2},\cdots,c_{J_m})$, 其中 $c_{J_i}(i=1,2,\cdots,m)$ 为目标函数中基变量的系数, 称

$$T(B)=\left(\begin{array}{c:c} B^{-1}\boldsymbol{b} & B^{-1}A \\ \hdashline c_B B^{-1}\boldsymbol{b} & c-c_B B^{-1}A \end{array}\right)$$

为对应于可行基 B 的单纯形表. $c-c_BB^{-1}A$ 称为检验数. 令

$$\begin{gathered}\boldsymbol{x}_B=(x_{J_1},x_{J_2},\cdots,x_{J_m})^{\mathrm{T}}, \quad B^{-1}\boldsymbol{b}=(b_{10},b_{20},\cdots,b_{m0})^{\mathrm{T}}, \\ B^{-1}A=(b_{ij})_{m\times n}, \quad c-c_BB^{-1}A=(\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_m),\end{gathered}$$

则单纯形表可以具体表示为表 1-1.

表 1-1

	$c_j \to$		c_1	c_2	$\cdots$	c_n
c_B	$\boldsymbol{x}_B$	$B^{-1}\boldsymbol{b}$	x_1	x_2	$\cdots$	x_n
c_{J_1}	x_{J_1}	b_{10}	b_{11}	b_{12}	$\cdots$	b_{1n}
c_{J_2}	x_{J_2}	b_{20}	b_{21}	b_{22}	$\cdots$	b_{2n}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$
c_{J_m}	x_{J_m}	b_{m0}	b_{m1}	b_{m2}	$\cdots$	b_{mn}
检验数 $\sigma_j{=}c_j-Z_j$			σ_1	σ_2	$\cdots$	σ_n

1.2.3　单纯形程序

假设已知 (LP) 的可行基 $B=(\boldsymbol{p}_{J_1},\boldsymbol{p}_{J_2},\cdots,\boldsymbol{p}_{J_m})$, 其单纯形表为表 1-1, 由 B 的可行性知:

$$b_{i0}\geqslant 0, \quad i=1,2,\cdots,m.$$

步骤 1: 若检验数 $\sigma_j\leqslant 0(j=1,2,\cdots,n)$, 则 (LP) 有基本最优解

$$x_{J_1}=b_{i0}, \quad i=1,2,\cdots,m; \quad x_j=0, \quad j\neq J_1,J_2,\cdots,J_m.$$

运算终止.

步骤 2: 若不满足 $\sigma_j\leqslant 0(j=1,2,\cdots,n)$, 则至少存在一个 j, 使 $\sigma_j>0$, 以及

$$\sigma_s=\max\{\sigma_j|\sigma_j>0,j\geqslant 1\}.$$

若 $b_{is}\leqslant 0(i=1,2,\cdots,m)$, 则 (LP) 无最优解. 运算终止.

步骤 3: 若不满足 $b_{is} \leqslant 0 (i=1,2,\cdots,m)$, 则至少存在一个 i, 使 $b_{is}>0$, 这时, 先求

$$\theta = \min\left\{ \frac{b_{i0}}{b_{is}} \middle| b_{is} > 0, 1 \leqslant i \leqslant m \right\}.$$

注意这样的正数 i 可能不唯一, 据此要求, 有

$$J_r = \min\left\{ J_i \middle| \theta = \frac{b_{i0}}{b_{is}}, b_{is} > 0 \right\}.$$

由此得到 r, 旋转元为 b_{rs}.

步骤 4: 作 (r,s) 旋转变换, 把 x_s 所对应的列变换为单位列向量 (旋转元 b_{rs} 变为 1). 旋转变换具体运算如下:

① 把旋转元 b_{rs} 所在的第 r 行都除以 b_{rs}, 得新表.

② 对于 $i \neq r$, 有

$$\text{新表的第}\, i\, \text{行} = \text{旧表的第}\, i\, \text{行} - b_{is} \times (\text{新表的第}\, r\, \text{行}).$$

③ 将 x_B 列中的 x_{J_r} 换为 x_s.

这样就得新基 $\overline{B}=\left(\boldsymbol{p}_{J_1},\cdots,\boldsymbol{p}_{J_{r-1}},\boldsymbol{p}_s,\boldsymbol{p}_{J_{r+1}},\cdots,\boldsymbol{p}_{J_m}\right)$ 的单纯形表 $T\left(\overline{B}\right)$, 转步骤 1, 并依次继续下去.

例 1.2 用单纯形法求解线性规划问题:

$$\max Z = 3x_1 + 4x_2;$$
$$\text{s.t.} \begin{cases} x_1 + 2x_2 \leqslant 6, \\ 3x_1 + 2x_2 \leqslant 12, \\ x_2 \leqslant 2, \\ x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0. \end{cases}$$

解 将原线性规划化为标准形式:

$$\max Z = 3x_1 + 4x_2;$$
$$\text{s.t.} \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 6, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_4 = 12, \\ x_2 + x_5 = 2, \\ x_i \geqslant 0\,(j=1,2,3,4,5). \end{cases}$$

约束条件的系数矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

可行基为

$$B=(\boldsymbol{p}_3,\boldsymbol{p}_4,\boldsymbol{p}_5)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

对应于基 B 的单纯形表 $T(B)$ 如表 1-2 所示.

表 1-2

$c_j \to$			3	4	0	0	0	θ_i
c_B	$\boldsymbol{x}_B$	$B^{-1}\boldsymbol{b}$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
0	x_3	6	1	2	1	0	0	3
0	x_4	12	3	2	0	1	0	6
0	x_5	2	0	[1]	0	0	1	2
检验数行			3	4	0	0	0	

于是

$$\max\{3,4\}=4,\quad \sigma_2=4,\quad \min\left\{\frac{6}{2},\frac{12}{2},\frac{2}{1}\right\}=\frac{2}{1}.$$

旋转元为 $b_{32}=1$, 将基变量 x_5 旋出, 将 x_2 旋入作为基变量, 得表 1-3.

表 1-3

$c_j \to$			3	4	0	0	0	θ_i
c_B	$\boldsymbol{x}_B$	$B^{-1}\boldsymbol{b}$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
0	x_3	2	[1]	0	1	0	−2	2
0	x_4	8	3	0	0	1	−2	$\frac{8}{3}$
4	x_2	2	0	1	0	0	1	—
检验数行			3	0	0	0	−4	

于是

$$\max\{3\}=3,\quad \sigma_1=3,\quad \min\left\{\frac{2}{1},\frac{8}{3}\right\}=\frac{2}{1}.$$

旋转元 $b_{11}=1$, 将基变量 x_3 旋出, 将 x_1 旋入作为基变量, 得表 1-4.

表 1-4

$c_j \to$			3	4	0	0	0	θ_i
c_B	$\boldsymbol{x}_B$	$B^{-1}\boldsymbol{b}$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
3	x_1	2	1	0	1	0	−2	—
0	x_4	2	0	0	−3	1	[4]	$\frac{1}{2}$
4	x_2	2	0	1	0	0	1	2
检验数行			0	0	−3	0	2	

于是

$$\max\{2\}=2,\quad \sigma_5=2,\quad \min\left\{\frac{2}{4},\frac{2}{1}\right\}=\frac{2}{4}.$$

旋转元 $b_{25}=4$, 将基变量 x_4 旋出, 将 x_5 旋入作为基变量, 得表 1-5.

表 1-5

$c_j \rightarrow$			3	4	0	0	0	θ_i
c_B	$\boldsymbol{x}_B$	$B^{-1}\boldsymbol{b}$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
3	x_1	3	1	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	
0	x_5	$\frac{1}{2}$	0	0	$-\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$	1	
4	x_2	$\frac{3}{2}$	0	1	$\frac{3}{4}$	$-\frac{1}{4}$	0	
检验数行			0	0	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	

从表 1-5 知, 所有检验数均小于等于零, 故最优解为 $x_1=3$, $x_2=\frac{3}{2}$, $x_3=0$, $x_4=0$, $x_5=\frac{1}{2}$; 目标函数的最大值为 $\max Z=15$.

例 1.3 用单纯形法求解线性规划问题:

$$\max Z=-5x_1+5x_2+13x_3;$$
$$\text{s.t.}\begin{cases}-x_1+x_2+3x_3\leqslant 20,\\ 12x_1+4x_2+10x_3\leqslant 90,\\ x_1,x_2,x_3\geqslant 0.\end{cases}$$

解 将原线性规划化为标准形式:

$$\max Z=-5x_1+5x_2+13x_3+0\cdot x_4+0\cdot x_5;$$
$$\text{s.t.}\begin{cases}-x_1+x_2+3x_3+x_4=20,\\ 12x_1+4x_2+10x_3+x_5=90,\\ x_1,x_2,x_3,x_4,x_5\geqslant 0.\end{cases}$$

约束条件系数矩阵为

$$A=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 3 & 1 & 0\\ 12 & 4 & 10 & 0 & 1\end{pmatrix},$$

可行基为

$$B=(\boldsymbol{p}_4,\boldsymbol{p}_5)=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}.$$

列出初始单纯形表 (见表 1-6), 并求解.

表 1-6

	$c_j \rightarrow$		-5	5	13	0	0	θ_i
c_B	$\boldsymbol{x}_B$	$B^{-1}\boldsymbol{b}$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
0	x_4	20	-1	1	[3]	1	0	$\frac{20}{9}$
0	x_5	90	12	4	10	0	1	9
	检验数行		-5	5	13	0	0	
13	x_3	$\frac{20}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\left[\frac{1}{3}\right]$	1	$\frac{1}{3}$	0	20
0	x_5	$\frac{70}{3}$	$\frac{46}{3}$	$\frac{2}{3}$	0	$-\frac{10}{3}$	1	35
	检验数行		$-\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	0	$-\frac{13}{3}$	0	
5	x_2	20	-1	1	3	1	0	
0	x_5	10	16	0	-2	-4	1	
	检验数行		0	0	-2	-5	0	

于是该线性规划问题的最优解为 $x_1 = 0, x_2 = 20, x_3 = 0, x_4 = 0, x_5 = 10$, 最优值 $\max Z = 100$.

例 1.4 用单纯形法求解线性规划问题:

$$\max Z = -x_1 + 3x_2 + 2x_3;$$
$$\text{s.t.} \begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 \leqslant 2, \\ 3x_1 - x_2 - x_3 \leqslant 3, \\ x_1 + x_2 - x_3 \leqslant 1, \\ x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0, x_3 \geqslant 0. \end{cases}$$

解 将原线性规划化为标准形式:

$$\max Z = -x_1 + 3x_2 + 2x_3;$$
$$\text{s.t.} \begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 = 2, \\ 3x_1 - x_2 - x_3 + x_5 = 3, \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_6 = 1, \\ x_i \geqslant 0\,(j = 1, 2, 3, 4, 5, 6). \end{cases}$$

约束条件的系数矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

可行基为

$$B=(\boldsymbol{p}_4,\boldsymbol{p}_5,\boldsymbol{p}_6)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

对应于可行基 B 的单纯形表如表 1-7 所示.

表 1-7

	$c_j \rightarrow$		-1	3	2	0	0	0
c_B	$\boldsymbol{x}_B$	$B^{-1}\boldsymbol{b}$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
0	x_4	2	1	2	-2	1	0	0
0	x_5	3	3	-1	-1	0	1	0
0	x_6	1	1	1	-1	0	0	1
	检验数行		-1	3	2	0	0	0

由表 1-7 可知, 检验数 $\sigma_3=2>0$, 但所在列的元素

$$b_{13}=-2<0,\quad b_{23}=-1<0,\quad b_{33}=-1<0,$$

故原线性规划问题无最优解.

1.2.4 单纯形法评析

(1) 单纯形法是求解一般线性规划问题的有效方法, 该方法简单明了, 便于掌握, 是目前最常使用的解线性规划的方法.

(2) 利用单纯形法求解线性规划问题有时会出现循环现象, 导致永远求不出最优解, 1974 年勃兰特 (Bland) 提出了解决循环的方案, 即只要在单纯形程序的步骤 2 中, 将

$$\sigma_s=\max\{\sigma_j|\sigma_j>0,j\geqslant 1\}$$

改为

$$s=\min\{j|\sigma_j>0,j\geqslant 1\},$$

就可避免出现循环现象. 由于在实际中极少碰到利用单纯形程序求解线性规划问题会出现循环的现象, 且勃兰特法计算速度较慢, 故在实际中仍用单纯形程序求解线性规划问题.

下面是数学家索洛 (Solow) 给出的利用单纯形程序而导致循环的例子:

$$\min Z=-2x_3-2x_4+8x_5+2x_6;$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}x_1-7x_3-3x_4+7x_5+2x_6=0,\\x_2+2x_3+x_4-3x_5-x_6=0,\\x_i\geqslant 0\,(i=1,2,\cdots,6).\end{cases}$$