数学文化

曹媛 侯顺利 王强 翟维红 梁忠先 编著

南開大學出版社

数学文化

曹媛　侯顺利　王强　翟维红　梁忠光　编著

南开大学出版社

天　津

图书在版编目(CIP)数据

数学文化 / 曹媛等编著. 一天津：南开大学出版社，2016.10
ISBN 978-7-310-05196-0

Ⅰ. ①数… Ⅱ. ①曹… Ⅲ. ①数学一文化研究 Ⅳ. ①O1－05

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2016)第 207163 号

南开大学出版社出版发行
出版人:刘立松
地址:天津市南开区卫津路 94 号　邮政编码:300071
营销部电话:(022)23508339　23500755
营销部传真:(022)23508542　邮购部电话:(022)23502200
*
天津市蓟县宏图印务有限公司印刷
全国各地新华书店经销
*
2016 年 10 月第 1 版　2016 年 10 月第 1 次印刷
260×185 毫米　16 开本　18.25 印张　460 千字
定价:34.00 元

如遇图书印装质量问题,请与本社营销部联系调换,电话:(022)23507125

编者的话

数学的应用曾经局限在一些特殊的人群。对于多数人来说，数学仅仅是作为考试及格的必要科目，而在毕业以后则嫌其无用很快就全部忘光了。

可是，随着信息社会的到来，人类社会数量化的程度正在加深，不用说自然科学或技术方面离不开数学，在社会、生活的各个方面数学所起的作用也越来越明显，数学的活跃时代到来了。

近年来，数学文化以其独特的教育价值日益受到我国数学界的重视：数学文化课程的设置，有关数学文化书籍的出版，全国性学术会议的增多。由此，数学文化已经深入数学教学的各个领域之中。

数学文化主要讲述数学的历史、思想、方法、精神，以及数学与人类其他知识领域之间的关联，如：数学与哲学，数学与美术，数学与建筑，数学与音乐，数学与航海、天文、历法，数学与诗歌、文学，数学与游戏，等等。

本书力图通过数学文化的宣扬来改变大学生的数学观，激发他们对数学的兴趣，提高他们的数学素养和数学鉴赏力，提升他们数理逻辑分析的能力，让他们感受到数学文化的魅力。

本书有如下特点：

通俗性。让不开设高等数学课程的学生能看懂书中的数学内容，并感受到数学的魅力。

趣味性。尽量贴近生活，使用与生活相关的材料。

广博性。通过数学与哲学、数学与美术、数学与建筑、数学与音乐等具体专题来呈现数学与其他知识领域的关联，显现出数学与生活的息息相关，显示出数学是生活中无处不在的。

相信本书的出版对于数学文化的传播、高职数学文化课程的建设，以及数学文化与数学教育关系的研究都起到积极的作用。特此为序。

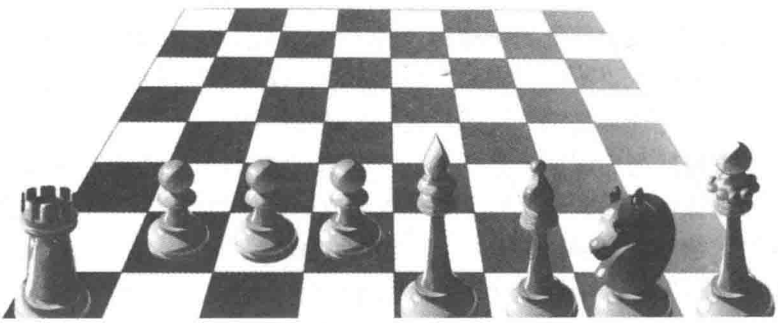
编　者

2016 年 7 月

代序：无穷之旅

一、大数

传说，古印度舍罕王打算重赏国际象棋的发明人和进贡者——宰相西萨·班·达依尔。这位聪明宰相跪在国王面前说："陛下，请您在这张棋盘的第一个小格内，赏给微臣一粒麦子，在第二个小格内赏两粒，第三格内赏四粒，照这样每一小格内都比前一小格加一倍。陛下啊，把这样摆满棋盘上所有 64 格的麦粒，都赏给您的仆人罢！"



"你当然会如愿以偿的。"国王为自己所许下的慷慨赏诺不致破费太多而心中暗喜。计数麦粒的工作开始了。第一格内放一粒，第二格内放两粒，第三格内放四粒，……，还没到第二十格，一袋麦子已经空了。一袋又一袋的麦子被扛到国王面前来。但是，麦粒数一格接一格地增长得那样迅速，很快就可以看出，即便拿来全印度的粮食，国王也兑现不了他对西萨·班·达依尔许下的诺言了，因为这位宰相要求的赏赐小麦数是公比为 2 的等比数列前 64 项之和。

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{63}2^n &= 2^0+2^1+2^2+2^3+\cdots+2^{63}\\ &=\frac{2^{64}-1}{2-1}\\ &=18446744073709551615\end{aligned}$$

18446744073709551615 粒小麦，竟是全世界在 2000 年内所生产的全部小麦！这么一来，舍罕王发觉自己欠了宰相好大一笔债。怎么办？要么忍受西萨·班·达依尔没完没了的讨债，要么干脆砍掉他的脑袋。国王大概会选择后面这个办法。

在西方，为大数起了一个名字——谷歌（google），一谷歌等于 10 的 100 次幂（10^{100}），这是一个非常大的数，要知道，宇宙中所有的原子也不超过10^{85}个。美国搜索引擎的巨无霸将其作为公司的名称——Google，即"谷歌"公司，用其引申可通过 Google 搜索引擎获得海量信息。

上面谈到的一些数字是毫不含糊的大数。但是这些巨大的数字，不论是西萨·班·达

依尔所要求的麦子粒数，还是 10^{100}，虽然大得令人难以置信，但毕竟还是有限的，只要有足够的时间，人们总能把它们从头到尾写出来。然而，确实存在着一些无穷大的数（如果能把无穷大称作数的话），例如，“所有整数的个数”和“一条线上所有几何点的个数”，它们比我们所能写出的无论多长的数都要大。10^{100} 甚至更大与无穷大的距离和 1 与无穷大的距离一样遥不可及。

二、无穷和数学危机

数学常常被认为是自然科学中逻辑性最强、体系最严密、发展最完善的一门学科，但在数学的发展史中，却经历了三次动摇数学大厦基础的危机。其中，前两次数学危机都与无穷有直接关联。

第一次危机发生在公元前 580～568 年之间的古希腊。毕达哥拉斯学派认为“一切数均可表示成整数或整数之比”，然而该学派的希伯索斯发现边长为1的正方形对角线长度既不能用整数，也不能用两个整数 p 和 q 之比 q/p 表示，希伯索斯的发现在当时数学界掀起了一场巨大风暴，整数的尊崇地位受到挑战。之后，用几何的方法去处理不可公度比，使几何学脱颖而出，希腊人开始从“不证自明的”公理出发，建立了演绎推理几何学体系。这是数学思想上的一次革命，无理数是第一次数学危机的自然产物。

第一次数学危机的彻底解决，是在危机产生 2000 年后的 19 世纪，建立了极限理论和实数理论之后，无理数可以看成是无穷个有理数组成的数列的极限。所以，它差不多是与第二次数学危机同时，才被彻底解决的。

第二次数学危机发生在牛顿创立微积分的 17 世纪，由贝克莱大主教对牛顿“无穷小量”说法的质疑引起的。数学分析的发展必然涉及无穷过程，由于无穷小、无穷大、极限、无穷级数这些无穷概念没有精确的定义，使微积分理论遇到严重的逻辑困难。数学家们从更高的视角严格地审查微积分时，得到了一些非常奇特和令人不安的发现。例如，不论有理数还是无理数，在实数轴上是处处稠密的，即：在任意两个有理数之间，分布着无穷多个无理数；反之亦然，在任何两个无理数之间也分布着无穷多个有理数。自然而然，我们会放心地推断，实数轴上一定均匀地分布着两个基本相等的巨大的有理数族与无理数族。然而，19 世纪，随着时间的推移，越来越多的数学发现表明，与上述认识相反，这两个数族并不相等。从某种根本意义上说，有理数与无理数是不可交换的数族，但当时的数学家对这两个数族的根本性质，尚不十分明了。

第二次数学危机的实质是微积分理论缺乏逻辑基础。虽然柯西、维尔斯特拉斯及其同事们成功地用“极限”概念建立了微积分大厦，但数学家们越来越清楚地认识到，为寻求微积分彻底严密的算术化，最重要、最基本的问题是将微积分最终置于集合的严格基础之上。

探索这个问题，并单枪匹马地创立了奇妙的集合论的是一位时而被人恶意中伤，又曾一度精神崩溃的天才，他的名字叫乔治·费迪南德·路德维希·菲利普·康托。

三、康托

康托（Cantor，Georg Ferdinand Ludwig Philip，1845—1918）德国数学家。生于俄国圣彼得堡，卒于哈雷。1863 年入柏林大学攻读数学和神学，受教于数学家库默尔（Eduard Kummer）、维尔斯特拉斯（Karl Weierstrass）和克罗内克（Leopold Kronecker）等人。1867 年获博士学位。以后在哈雷大学（University of Halle）任教，1879 年成为终身教授。

康托是集合论（Set Theory）的创始人。创立了现代集合论作为实数理论以至整个微积分理论体系的基础。他还提出了集合的势、基数（Cardinal Numbers）和序数（Ordinal Numbers）等概念，并建立了相关的运算法则。1878 年他提出了著名的连续统假设（Continuum Hypothesis）。康托的代表作为《关于超限数理论的基础》（1895—1897）。

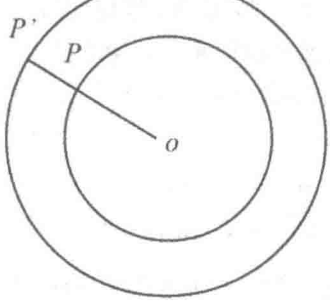
康托的工作给数学发展带来一场革命，其理论很难被立即接受。他的首要反对者是他在柏林大学的导师克罗内克。克莱因（Felix Klein）也不赞成康托的新观点。由于他的工作长期遭到反对，使他从长期的精神抑郁状态而导致精神分裂，最终死在精神病院里。然而，历史终究公正地评价了他的日工作，当代数学家绝大多数接受康托的理论，并认为这是数学史上一次重要的变革。集合论在 20 世纪初已逐渐渗透到各数学分支，成为分析理论、测度论、拓扑学及数理科学中必不可少的工具。大卫·希尔伯特说："没有人能够把我们从康托建立的乐园中赶出去。"

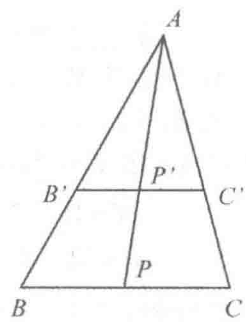
四、无穷大比较

当我们要比较几个无穷大的数的大小时，就会面临这样一个问题：这些数既不能读出来，也无法写出来，该怎样比较呢？

早在中世纪，人们已经注意到这样的事实：如果从两个同心圆出发画射线，那么射线就在这两个圆的点与点之间建立了一一对应，然而两圆的周长是不一样的。

16 世纪，伽俐略注意到，可以在两个不同长的线段与之间建立一一对应，从而想象出它们具有同样多的点。伽俐略还注意到自然数可以和它们的平方构成一一对应。





上左图中外圆周长大于内圆周长，但内圆圆周上任意一点 P 与外圆圆周的 P' 建立了一一对应关系。上右图中线段 BC 长于 $B'C'$，然而，对于线段 BC 上任意一点 P，线段 $B'C'$ 上都有且仅有唯一的点 P'与之对应，线段 BC 与上 $B'C'$ 的点一样多。

但这导致无穷大的不同的"数量级"，伽俐略以为这是不可能的。因为所有无穷大都一样大。不仅是伽俐略，在康托之前的数学家大多只是把无限看作永远延伸着的，一种变化着成长着的东西来解释。无限永远处在构造中，永远完成不了，是潜在的，而不是实在的。这种关于无穷的观念在数学上被称为潜无限。18 世纪数学王子高斯就持这种观点，用他的话说，就是"……我反对将无穷量作为一个实体，这在数学中是从来不允许的。所谓无穷，只是一种说话的方式……"。柯西也不承认无穷集合的存在。

康托对数学分析的深入研究使他越来越多地考虑各种数集之间的本质区别。特别是，他开始认识到，创立一种比较数集大小的方法是十分重要的。

表面看来，比较数集大小似乎轻而易举：只要会数数，就会比较。如果有人问你，“你左手与右手的手指一样多吗？”你只要分别数一数每只手的手指，确认每只手都有 5 个手指，然后，就可以作出肯定的回答。看来，原始的“数数”方法似乎对于确定更复杂的“同样大小”或“相同基数”概念也是必要的。然而，乔治·康托以一种貌似天真的方法，颠倒了前人传统的观念。

我们来看一看他是如何论证的。首先假设我们生活在一种数学知识非常有限的文化中，人们最多只能数到“3”。这样，我们就无法用数数的方法来比较左手与右手的手指数目，因为我们的数系不能使我们数到“5”。在超出我们计数能力的情况下，是否就无法确定“相同基数”了呢？完全不是。实际上，我们不必去数手指，而只需将两手合拢，使左手拇指与右手拇指，左手食指与右手食指……一一对齐，就能够回答这个问题了。这种方法展示了一种纯粹的一一对应关系，然后，我们可以回答，“是的，我们左手与右手的手指一样多”。

上面的例子阐明了一个关键的论据，我们无须去数集合中元素的个数，以确定这些集合是否具有同样多的元素。

五、康托的无穷世界

康托依据两个基本的前提开始探讨无穷。这两个前提是：

1. 通过一一对应的方法可以确定集合的基数是否相同；

2. 承认“实无穷”确实存在。

康托对这一概念作出了如下定义：

如果能够根据某一法则，使集合 M 与集合 N 中的元素建立一一对应的关系，那么，集合 M 与集合 N 等价。

如果集合 M 与集合 N 符合上述康托的等价定义，那么，按现代数学家的语言，集合 M 与集合 N “等势”或具有“相同基数”。这一定义之所以重要，就在于它并未限定集合 M 与集合 N 必须包含有限个元素；因此它同样适用于那些包含无限多个元素的集合。

康托首先比较了自然数集 N 和偶数集 E 。

$$N=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \cdots,\ n,\ \cdots\}$$
$$E=\{2,\ 4,\ 6,\ 8,\ \cdots,\ 2n,\ \cdots\}$$

依照常识，偶数想当然应是自然数的一半。然而，根据康托的定义，我们发现这两个无穷集合具有相同基数。下面列出了 N 和 E 这两个完全集之间明确的一一对应关系。

$$\begin{array}{llllllllll}
N: & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & \cdots & n & \cdots \\
 & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \cdots & \updownarrow & \cdots \\
E: & 2 & 4 & 6 & 8 & 10 & 12 & 14 & \cdots & 2n & \cdots
\end{array}$$

我们可以清晰地看到偶数集 E 中每一个元素都被一个，且只被一个自然数集 N 中的元素所指定，反之亦然。无疑，这两个无穷数集是等价的，也就是说偶数和自然数同样多。这看起来是荒谬的，违背常理的。然而，如果拒绝这一结论，我们只能否认相同基数的定义，或者抛弃“实无穷”的概念。

同样，我们会看到整数集合 $Z=\{\cdots,-n,\cdots,-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4,\cdots,n,\cdots\}$ 与自然数集合

$N=\{1,2,3,4,\cdots,n,\cdots\}$也具有相同的基数。$Z$ 和 N 之间构成如下的一一对应关系。

$$\begin{array}{cccccccccccc} N: & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & \cdots & n & \cdots \\ & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \cdots & \updownarrow & \cdots \\ Z: & 0 & 1 & -1 & 2 & -2 & 3 & -3 & 4 & -4 & \cdots & [1+(-1)^n(2n-1)]/4 & \cdots \end{array}$$

我们发现，在无穷集合中局部居然和整体之间划了等号。

据此，康托迈出勇敢的一步。他说，任何能够与自然数集合 N 构成一一对应关系的集合都是可列或可数无穷集。康托引入“超限”基数的新概念，用以表示可数无穷集中元素的个数。他选用希伯来文的第一个字母 $\aleph$（读作“阿列夫”）来表示超限基数。

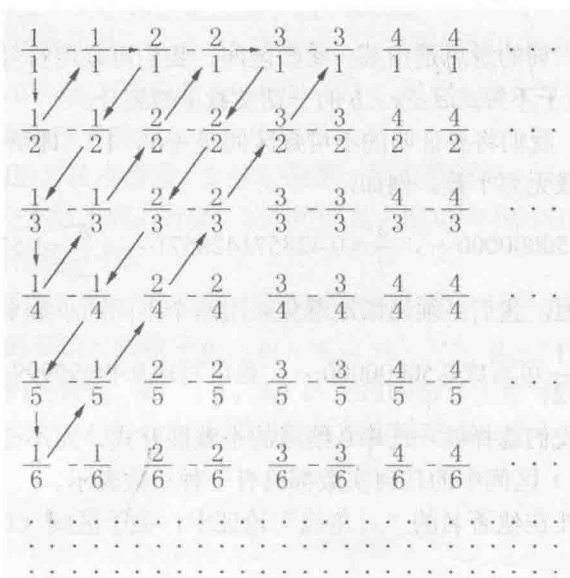
康托通过对无穷集的研究，创造了一种新的数字和一种新的数字类型。康托采用自然数集合 N 作为扩大我们数系的基准。对于他来说，N 是基数为 $\aleph_0$ 的原型集合。

引入符号 $\bar{M}$，用以表示“集合 M 的基数”，我们看到全体自然数 N 与全体偶数 E 以及全体整数 Z 具有相同的基数，即：$\bar{N}=\bar{E}=\bar{Z}=\aleph_0$。

如果我们接下来讨论有理数集合 Q，情形又会怎样呢？如前所述，有理数是处处稠密的。在这个意义上说，有理数与整数有所不同，整数是一个紧跟一个，循规蹈矩地分布在数轴上的，其中的每一个数字都与前一个数字保持相同的距离。实际上，在任何两个整数之间都有无限多的有理数（比如在 0 与 1 之间，1/1000 与 1/10000 之间，。因此，任何人都会猜想，有理数的个数要远远超过自然数。

但是，康托证明有理数集是可列的，也就是说全体有理数 Q 与全体自然数 N 具有相同的基数，即 $\bar{Q}=\aleph_0$。他的证明方法是在有理数集与自然数集之间构成一一对应的关系。

康托把有理数排列成如下形式：



注意到第 1 列所有数字分子为1，第 2 列所有数字分子为 −1，第 n 列所有数字分子为 $\frac{1+(-1)^{n+1}(2n+1)}{4}$。且 n 为奇数时，第 n 列所有数字分子为正；n 为偶数时，第 n 列所有数字分子为负。

而第一行所有数字分母为1，第二行所有数字分母为 2，第 m 列所有数字分母为 m 。于是，任何分数都能在左图的排列中找到他固定的归宿。例如，$-\dfrac{3}{5}$ 在第6列，第5行；$\dfrac{177}{365}$ 在第353列，第365行。显然，这一排列包含了集合 Q 中的所有元素。

现在，让1对应0，2对应1，……，按照有理数排列中箭头所示的顺序，列出自然数集合 N 中元素与有理数集合 Q 中元素的一一对应关系。

$$\begin{array}{cccccccccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & \cdots \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \cdots \\ 0 & 1 & 1/2 & -1 & 2 & -1/2 & 1/3 & 1/4 & -1/3 & -2 & 3 & 2/3 & -1/4 & 1/5 & 1/6 & \cdots \end{array}$$

在上面方案中，我们需要去掉重复的分数，例如 $1=\dfrac{2}{2}=\dfrac{5}{5}=\cdots$ 。这样，每一个自然数都与一个且仅与一个有理数相对应，而每一个有理数都被一个且仅被一个自然数所指定。康托得出令人瞠目结舌的结果：有理数和自然数一样多！

至此，似乎每一个无穷集合都是可数的，都能与正整数构成一一对应的关系。但是，在康托于 1874 年发表了题为《论所有代数数集合的性质》的论文后，数学界彻底放弃了这个一相情愿的念头。在这篇论文中，康托明确地提出有一些集合非常稠密以致于无法数。

康托发现的不可数集是一条无穷直线上的点的集合，这些点又对应于我们的实数系统。

实际上，他 1874 年的论文指出，没有任何实数区间（不论其长度多么小）能够与自然数集构成一一对应的关系。1891 年，康托再次回到这个问题上来，提出了一个非常简单的证明。我们下面将讨论这个证明。

六、连续统的不可数性

这里“连续统”一词的意思是指某一实数区间，我们可以用符号 $(a，b)$ 来表示。

$(a，b)$ 表示满足于不等式 $a<x<b$ 的一切实数 x 的集合。

在以下的证明中，我们将要证明的不可数区间是（0，1），即所谓“单位区间”。在这一区间的实数都可以写成无穷小数。例如，

$$0.5=0.50000000\cdots，\quad \frac{3}{7}=0.428571428571\cdots，\quad \frac{\pi}{2}=1.5707963\cdots$$

出于技术上的原因，我们必须谨慎地避免采用两个不同的小数来表示同一数字。例如：

$$\frac{1}{2}\text{可写成}0.50000000\cdots，\text{也可写成}0.49999999\cdots$$

在这种情况下，我们选择以一连串0结尾的小数展开式，而不选择以一连串9结尾的小数，这样，在（0，1）区间中的任何实数都只有一种小数表示。

我们现在来看康托在他著名的“对角线”论证中，关于区间（0，1）不可数的漂亮的证明。

康托的证明采用了反证法，他首先假定区间（0，1）内的实数与自然数集合 N 存在一一对应关系，即（0，1）内实数是可数的。这意味着我们可以一个不漏地列出0和1之间的所有小数。然后，从这一假定出发最终推出逻辑矛盾。

为了讲清楚康托的论证，我们将0与1之间的每个实数编号：

N						(0，1)内的实数						
1	$\leftrightarrow$	a_1	=	0	.	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}	x_{15}	x_{16}	$\cdots$
2	$\leftrightarrow$	a_2	=	0	.	x_{21}	x_{22}	x_{23}	x_{24}	x_{25}	x_{26}	$\cdots$
3	$\leftrightarrow$	a_3	=	0	.	x_{31}	x_{32}	x_{33}	x_{34}	x_{35}	x_{36}	$\cdots$
4	$\leftrightarrow$	a_4	=	0	.	x_{41}	x_{42}	x_{43}	x_{44}	x_{45}	x_{46}	$\cdots$
5	$\leftrightarrow$	a_5	=	0	.	x_{51}	x_{52}	x_{53}	x_{54}	x_{55}	x_{56}	$\cdots$
6	$\leftrightarrow$	a_6	=	0	.	x_{61}	x_{62}	x_{63}	x_{64}	x_{65}	x_{66}	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	
n	$\leftrightarrow$	a_n	=	0	.	x_{n1}	x_{n2}	x_{n3}	x_{n4}	x_{n5}	x_{n6}	$\cdots$

如果这是真正的一一对应关系，那么，右边一列区间（0，1）内的每一个实数都应该唯一地与左边一列中的一个自然数相对应。康托定义了一个区间（0，1）内的实数b。

$$b=0.b_1b_2b_3b_4b_5b_6\cdots b_n\cdots$$

其中：在构造b时，b_1，b_2，b_3，…，b_n，…可选择2到8内任何数字，禁止选用0或9。

选择b_1与a_1的第一位小数不同，$b_1\neq x_{11}$；

选择b_2与a_2的第二位小数不同，$b_2\neq x_{22}$；

选择b_3与a_3的第三位小数不同，$b_3\neq x_{33}$；

……

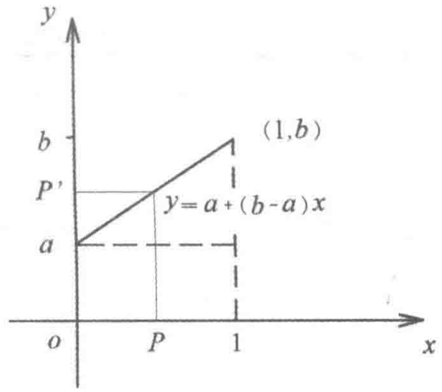
选择b_n与a_n的第n位小数不同，$b_n\neq x_{nn}$；

以此类推，“对角线”的名称正是来源于这一模式。

① 由于b是一个无穷小数，所以，b是实数。由于我们禁止选择0或9，因而，数字b既不可能是$0.00000\cdots=0$，也不可能是$0.99999\cdots=1$。显然b是0与1之间的一个无穷小数。所以，b一定会在上面对应表的右边一列中出现。

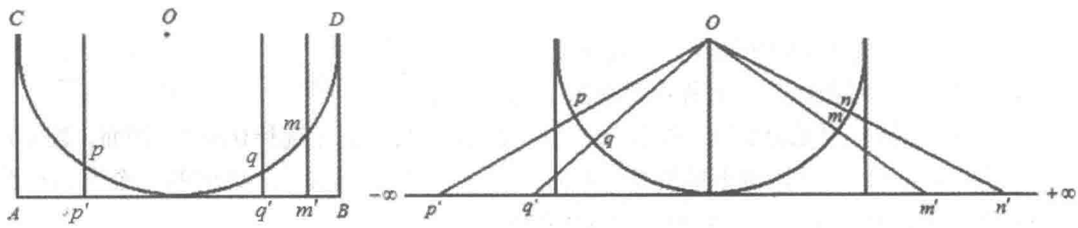
② 然而从b的构造方法本身看，b与a_1的第一位小数不同；与a_2的第二位小数不同；…总之，b与a_n的第n位小数不同。所以，b不可能是上面对应表的右边一列数字a_1，a_2，a_3，a_4，…，a_n，…中的任何一个。

我们看到，①告诉我们“b一定会在上面对应表的右边一列中出现”，而②又告诉我们“b不可能是上面对应表的右边一列数字a_1，a_2，a_3，a_4，…，a_n，…中的任何一个”。这一逻辑矛盾说明，我们最初的假定，即“（0，1）区间内的所有实数与自然数N之间存在一一对应关系”是错误的。因此，（0，1）区间内的所有实数形成一个不可数集。



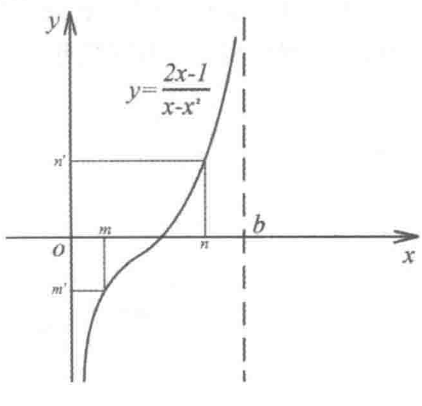
在这一意义上，单位区间（0，1）不失一般性。对于任意给出的有限区间（a，b），我们可以引入函数 $y=a+(b-a)x$，使 x 轴上区间（0，1）内的点与 y 轴上区间（a，b）内的点之间建立起一一对应的关系。这种一一对应的关系保证了区间（0，1）与（a，b）具有相同的（不可数）基数。也许会令人感到吃惊的是，区间的基数与其长度并无关系。0与1之间的所有实数并不比3与10000之间的所有实数少，在这种情况下，函数 $y=9997x+3$ 提供了必要的一一对应关系。初一看，这似乎是违反直觉的，但当人们熟悉了无穷集合的性质，便不再相信幼稚的直觉。

在此基础上，再向前迈一小步便可以证明所有实数的集合与区间（0，1）具有相同的基数。



上面左图中线段 AB 上的点与半圆 CD 上的点一一对应，从右图可以看到这个半圆上的点与无限长直线上的点一一对应。事实上，一条无限长直线上的点与该直线上一个有限线段上的点一样多。等价的说法是区间（0，1）、（a，b）与全体实数具有相同的（不可数)基数。

我们也可以通过函数 $y=\dfrac{2x-1}{x-x^2}$ 确定上述结论。



线段（0，b）上的点与y轴上的点（$-\infty$，$+\infty$）通过曲线$y=\dfrac{2x-1}{x-x^2}$建立了一一对应关系。

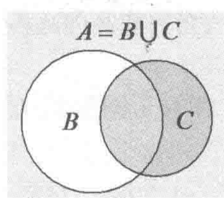
至此，全体实数形成了一个不可数集，一个数字连续统。

现在，我们可以跟随康托再向前迈出勇敢的一步。正像我们曾把全体自然数N作为可数集而引入了第一个超限基数$\aleph_0$一样，区间（0，1）也将作为定义一个新的、更大的超限基数的标准。康托使用字母C（英文“连续统”一词的第一个字母）表示他的基数。

之后，康托思考一条直线上的点与R^2（二维平面）或R^3（三维立体）中的点的对应关系，并试图证明这两者不可能存在一一对应关系。当康托证明一条直线上的点与R^2或R^3，直至R^n（n维空间）中的点存在一一对应关系时，这一违背直觉的发现给康托留下的印象如此之深，以致于他惊呼：“我看到了它，但是我简直不能相信它！”

所有这些讨论在认识有理数集与无理数集的内在区别方面开始显示出它的重要意义。有理数集与无理数集的区别绝不仅仅是前者可以写成有限小数或无限循环小数而后者则不能的问题。为了更清楚地说明这一点，康托只需要再增加一个结果。

康托证明了如果集合B与集合C是可数的，而集合A的所有元素属于B或者属于C（或者属于两者），那么，集合A是可数的。（在这种情况下，我们说A是B与C的并集，记作$A=B\cup C$）



康托证明的前提是所设的集合B与集合C是可数的，以保证它们各自与自然数的一一对应关系：

$$\begin{array}{ccccccccc} N & : & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \cdots \\ & & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \\ B & : & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 & b_6 & \cdots \end{array} \qquad \begin{array}{ccccccccc} N & : & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \cdots \\ & & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \\ C & : & c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & c_5 & c_6 & \cdots \end{array}$$

在集合B的元素中均匀地插入集合C的元素，我们可以在N与$A=B\cup C$之间建立起一一对应的关系：

$$\begin{array}{ccccccccccccccc} N & : & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \cdots\cdots \\ & & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \\ B & : & b_1 & c_1 & b_2 & c_2 & b_3 & c_3 & b_4 & c_4 & b_5 & c_5 & b_6 & c_6 & \cdots\cdots \end{array}$$

所有集合A也是可数的，即两个可数集合的并集也是可数的。

前面我们已经证明有理数集是可数的，假设无理数集也是可数集，那么，有理数集与无理数集的并集也应该同样是可数集。但是，有理数集与无理数集的并集恰恰是全部实数的集合，是一个不可数集。由此，可以断定无理数集是不可数的。

不太正规地说，这意味着无理数在数量上大大超过有理数。实数远比有理数多的原因恐怕只能解释为实数轴几乎被漫无边际的无理数所淹没。数学家有时说“大部分”实数，常常是对无理数而言；至于有理数集，公认是一个非常重要的无穷集，尽管有理数在数轴上处处稠密，然而与无理数相比不过是沧海一粟。对于康托来说，从基数的意义上讲，实数轴上有理数的确非常稀少，而无理数则占据着统治地位。

所有这一切已足以震古烁今，但康托 1874 年的论文中还包含着一个更加令人震惊的结果。康托不但证明了实数的不可数性，而且还把这一性质应用于一个长期困扰数学家的难题—超越数的存在。

七、超越数的不可数性

在 19 世纪，数学家们已经注意到所有实数的集合除了可以分为有理数集和相对稀有的比较丰富的无理数集之外，还可以详尽无遗地分为两个相互排斥的数系—代数数和超越数。

如果一个实数，满足下述代数方程

$$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$$

那么，这个实数是“代数数”。其中，方程中所有系数 a_n，a_{n-1}，…，a_1，a_0 均为整数。所有有理数和大量无理数都是代数数，例如 $\sqrt{2}$，3/7，$\sqrt[3]{1+\sqrt{5}}$ 都是代数数，因为它们分别是多项式方程 $x^2-2=0$，$7x-3=0$ 和 $x^6-2x^3-4=0$ 的根。

实 数 集

代数数	超 越 数
$\sqrt{2}$　$\frac{3}{7}$	刘维尔数 $L = 0.110001000000000000000001000\cdots$
$\sqrt[3]{1+\sqrt{5}}$	圆周率 $\pi = 3.1415926\cdots$
	自然对数的底 $e = 2.7182818\cdots$

相比之下，不能成为任何代数方程根的超越数就极难发现。虽然欧拉最早猜测超越数的存在，但第一个超越数 L 却是由法国数学家约瑟夫·刘维尔于1851年给出的。它是一个无限小数，其中的1分布在小数点后第1，2，6，24，120，720，5040 等处。

$$L = 0.110001000000000000000001000\cdots$$

继刘维尔之后，数学家们为了证明某些具体的数的超越性付出了种种努力：1873 年，法国数学家埃尔米特证明了自然对数的底 $e = 2.7182818\cdots$ 是超越数。

证明某些数是超越数有着重大的意义，比如说 π 的超越性的证明就彻底地解决了古希腊三大作图问题中的化圆为方问题，即化圆为方是不可能的。判断某些给定的数是否超越数实在是太困难了，一个多世纪以来，数学家们付出了艰苦的劳动。即便如此，这个领域仍旧迷雾重重。

1874 年，当康托开始研究超越数的时候，林德曼关于 π 是超越数的证明还没有出台。也就是说，在康托发展他的无穷论时，人们还只是发现了极少的超越数。或许，超越数只是实数中的一种例外。

然而，乔治·康托已习惯于将例外转变为常规，在超越数问题上，他又一次成功地实现了这种转变。他首先证明了全部代数数的集合是可数的。基于这一事实，康托开始探索看似稀有的超越数问题。

首先设任意区间（a，b）。他已证明在这一区间中的代数数构成了一个可数集；如果超越数也同样可数，那么代数数和超越数的并集（a，b）本身也应该可数。但是，他已经证

明，区间是不可数的。这就表明，无论在任何区间，超越数在数量上都一定大大超过代数数！

这是关于超越数的存在性的第一个非构造性的证明，换句话说，康托并没有构造出一个具体的超越数，只是“数”区间中的点，就证明了它们的存在！并由此认为，区间中的代数数只占很小一部分。这种证明超越数存在的间接方法真是令人吃惊。一位受人欢迎的数学史作家埃里克·坦普尔·贝尔以充满诗意的语言概述了这种情况：

“点缀在平面上的代数数犹如夜空中的数也不清的繁星；而沉沉的夜空却是由超越数构成。”

八、超限基数的序列

康托证明了一个正方形，甚至整个平面中的全部点，都具有与单位区间（0，1）相同的基数。三维空间中也相同，事实上R （n维空间）的情况也一样，连续统C似乎是最高一级的基数了。

但是，事实却证明并非如此。1891年，康托成功地证明了更高一级超限基数的存在，而且，是以令人难以置信数量存在。他的研究结果，我们今天通常称之为康托定理。如果

说他一生中证明了许多重要定理，那么，这个定理的名称就表明了它所得到的高度评价。这个定理像集合论的任何定理一样辉煌。

康托将任意集合A的所有子集的集合称作A的幂集，记作$P[A]$。康托定理证明了A的幂集$P[A]$比A具有更多的元素。

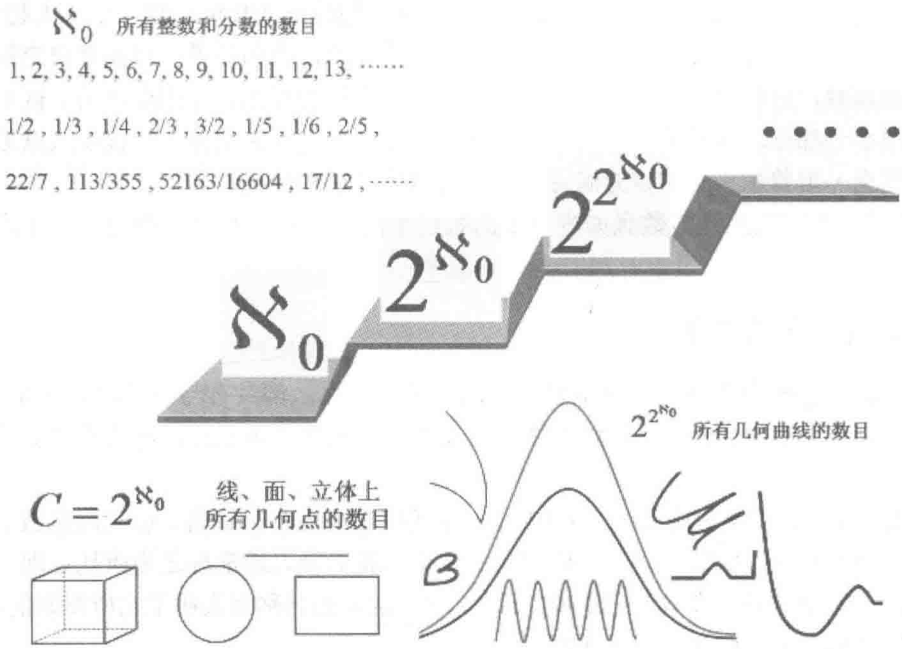
对于有限集合这一结论是显而易见。例如集合$\{a，b，c\}$的子集有$\{a\}$、$\{b\}$、$\{c\}$、$\{a，b\}$、$\{a，c\}$，我们还需加上空集$\{\varphi\}$和该集合$\{a，b，c\}$自身。请注意，空集$\{\varphi\}$和集合A本身是$P[A]$（A的幂集）的两个元素，无论我们采用什么样的集合A，这都是正确的。我们由三个元素组成的集合中导出了由八（$2^3=8$）个元素组成的新集合。

我们不难证明，一个包含4个元素的集合有$2^4=16$个子集；一个包含5个元素的集合有$2^5=32$；对任一有限集，若集合有n个元素，那么它的所有子集（包括空集及其自身）的集合有2^n个元素。2^n总是大于n的。

康托将这些结果推广到无限集，即可以由任何无限集的所有子集建立一个比该无限集

有更多元素的新集合。也就是说新集合的基数大于原无限集的基数。这一过程可以不断重复下去，直至无穷，我们可以构造$P[(0,1)]$，即构造（0，1）的所有子集的集合。尽管（0，1）已经是一个非常惊人的集合。这个妖怪一旦逃出魔瓶，就再没有什么能够阻止康托了。因为我们显然能够无限地重复这个过程，并由此生成更大超限基数的永无尽头的不等式链。这是一个没有结尾的故事。

康托用$2^{\aleph_0}$，$2^{2^{\aleph_0}}$，…表示新生成集合的基数，并称为超限基数。



这样，康托实际上建立了无穷大的谱系，自然数集合的基数$\aleph_0$是最小的无穷集合的基数，不存在基数小于$\aleph_0$的无穷集合。连续统（实数集）的基数等于自然数的幂集，即$C=2^{\aleph_0}$。具有基数C的集合大于具有基数$\aleph_0$的可数集。

$$\aleph_0 < C = 2^{\aleph_0} < 2^{2^{\aleph_0}} < \cdots$$

九、连续统假设

1874年康托猜测在可数集基数$\aleph_0$和连续统基数C之间不存在别的超限基数，这就是著名的连续统假设。在这一意义上，基数$\aleph_0$与C之间的关系很像整数0与1。在0与1之间不可能插入任何其他整数，康托猜测，$\aleph_0$与C这两个超限基数之间也有相似的性质。从另一个角度讲，连续统假设表明，实数集的任何无穷子集或者可数（在这种情况下，它具有基数$\aleph_0$）；或者能够与（0，1）构成一一对应的关系（在这种情况下，它有基数C），没有中间的可能性。

康托在他的数学生涯中，用了很多时间来钻研这个问题。1884年，他的精神病第一次发作，那一年他作出了一次重大努力，并认为他的努力已获成功，便写信给他的同事古斯塔夫•米塔格—列夫勒，宣称他对这个问题已作出了证明。但是，三个月以后，他在随后的信中不仅收回了他8月份的证明，而且还声称他现在已证明出连续统假设是错误的。这种观点的根本改变仅仅持续了短短的一天，之后，他又再次写信给米塔格—列夫勒，承认他的两个证明都有错误。康托不是一次，而是两次承认他所犯的数学错误，却仍然搞不清他的连续统假设究竟是否正确。

实际上，并非只有乔治•康托一人在形单影只地探索这个问题的答案。1900年第二届国际数学家大会上，大卫•希尔伯特审视了19世纪大量未解决的数学问题，并从中选出23个问题作为对20世纪数学家的重大挑战。康托的连续统假设列入20世纪有待解决的23个重要数学问题中的第一个。希耳伯特称连续统假设是一个“……似乎非常有理的猜想，然而，尽管人们竭尽全力，却没人能够作出证明。”

在对集合论这一貌似简单的猜想作出某些突破之前，数学家们还需要殚精竭虑，努力一番。进入 1940 年，一个重大的突破在 20 世纪非凡的数学家库特·哥德尔的笔下产生。哥德尔证明连续统假设在逻辑上与世界公认的 ZFC 公理系统并不矛盾。如果康托还活着的话，他一定会对这一发现感到无比振奋，因为这似乎证明他的猜想是正确的。果真如此吗？哥德尔的结果无疑并没有证明这一假设，这一问题依然悬而未决。1963 年，美国斯坦福大学的数学家保罗·科恩证明连续统假设和 ZFC 公理系统是彼此独立的，我们同样不能用 *ZFC* 公理系统证明连续统假设成立。

综合哥德尔和科恩的工作，连续统假设以一种最奇特的方式得到了解决：这一假设不能用集合论公理系统判定其真伪。

至此，我们的无穷之旅迈出了坚实的第一步！

十、缘起

数学并不是我的专业方向，但对数学文化颇感兴趣，对有关书籍也常有涉猎。学院侯顺利和曹媛两位青年教师在王强主任带领下，集整个数学教研室的智慧，利用业余时间编写了一本《数学文化》教材，嘱我作序，推脱不过，就以上面旧作做为引玉之砖，权当作序，希望能引起大家对数学文化的兴趣。

数学作为一种文化现象，早已是人们的常识。从历史上看，古希腊和文艺复兴时期的文化名人柏拉图、泰勒斯和达·芬奇等本身就是数学家。近世的爱因斯坦、希尔伯特、罗素、冯·诺依曼等文化名人也都是 20 世纪数学文明的缔造者。

数学文化一般指数学的思想、精神、方法、观点、语言，以及它们的形成和发展；除上述内涵以外，还包含数学家、数学史、数学美、数学教育、数学与各种文化的联系等等。

进入 21 世纪之后，数学文化的研究更加深入。一个重要的标志是数学文化走进课堂，数学文化作为一个单独的教学板块，得到了特别的重视。当数学文化的魅力真正渗入教材、溶入教学时，数学就会更加平易近人，数学教学就会通过文化层面让学生进一步理解数学、喜欢数学、热爱数学。

这本教材从“数学是什么？”开篇，内容包括数学与哲学、数学与美术、数学与建筑、数学与音乐、数学与航海天文、数学与诗歌、数学与游戏等，视角新颖，内容充实。

一本好的数学文化教材应符合两个条件，一是通俗性，让非专业人士也能读懂；二是可读性，能让读者兴趣盎然，爱不释手。这本书做到了吗？让读者评判吧！相信你静下心来阅读这本书，积小流以成江河，积跬步以至千里，它会助你品味到数学的奥秘，领略到数学的智慧。

馬魁君

2016 年 7 月