·河南省高等院校公共数学统编教材·

高等数学

（理工类） 上册

冯淑霞 王 波 主编

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$d(\ln x) = \frac{1}{x} dx$$

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx = [\arctan x]_0^1 = \frac{\pi}{4}$$

河南大学出版社
HENAN UNIVERSITY PRESS

河南省高等院校公共数学统

GAODENG SHUXUE

高等数学

理工类·上册

主　编　冯淑霞　王　波
副主编　王中华　王　琪　尹彦彬

河南大学出版社
HENAN UNIVERSITY PRESS
·郑州·

图书在版编目(CIP)数据

高等数学:理工类.上册/冯淑霞,王波主编.—郑州:河南大学出版社,2016.6
ISBN 978-7-5649-2425-6

Ⅰ.①高… Ⅱ.①冯… ②王… Ⅲ.①高等数学-高等学校-教材 Ⅳ.①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2016)第 149143 号

责任编辑 张雪彩
责任校对 王 贝
装帧设计 郭 灿

出版发行 河南大学出版社
地址:郑州市郑东新区商务外环中华大厦 2401 号 邮编:450046
电话:0371-86059701(营销部) 网址:www.hupress.com
排 版 河南金河印务有限公司
印 刷 辉县市文教印务有限公司
版 次 2016 年 9 月第 1 版
印 次 2016 年 9 月第 1 次印刷
开 本 787mm×1092mm 1/16
印 张 12.75
字 数 302 千字
定 价 29.00 元

前 言

高等数学,作为高等院校相关专业学生必修的一门重要的公共基础课程,不仅是其后续专业课的先行课程,而且作为一种思维模式,在培养学生的理性思维、计算能力、创新意识等方面具有不可替代的作用.

以“信息时代”为标志的21世纪本质上是数学时代,信息技术本质上是数字技术,使用数学的程度已经成为衡量国家科学进步的主要标志.而伴随着科技进步和高等教育的发展,特别是高等教育大众化阶段的到来,高等数学的教学内容、方式和手段也在不断发生着变化.著名数学家和数学教育家项武义先生说,教数学,要教学生“运用之妙,存乎一心”,以不变应万变,不讲或少讲只能对付几个题目的“小巧”,要教给学生“大巧”,这个板块就是启发联想,夯实数学基本功,使学生通过引导探究渐入“无招胜有招”的境界,为学生继续深造奠定坚实的数学基础.

为响应高等数学教学的需要,根据国家教育部非数学专业数学基础课教学指导分委员会制定的工科类本科数学基础课程教学基本要求,我们组织多年从事高等数学教学的一线教师编写了本书,作为本科院校理工类专业的高等数学教材,为社会发展培养具有较强的实践能力和创新能力的应用型高级人才.

本书分上、下两册,上册内容包括函数与极限、导数和微分、微分中值定理与导数的应用、不定积分、定积分、定积分的应用、向量代数与空间解析几何共七章.在编写过程中,本书吸取了国内外相关教材的优点,以参编人员丰富的教学经验为基础,注重知识的系统性、思想性与通用性,力求全面准确又通俗易懂.例题和习题的选择兼顾不同的难度水平,展示常用的解题技巧,帮助学生理解知识点,以适应不同层次学生的需求;在知识点、新概念的引入上,尽可能给出丰富形象的例子,帮助学生理解抽象概念,如函数的极限、连续、定积分等;对公式、运算法则等都给出了比较完整的推导,淡化严格证明部分,便于学生接受和应用.

本书由冯淑霞、王波担任主编,由王中华、王琪、尹彦彬担任副主编,具体编写分工如下:罗英勇和张建国编写第1章,郑轩辕编写第2章,王琪编写第3章,王中华编写第4章和第5章,杨利军编写第6章,尹彦彬编写第7章.本书最后由冯淑霞、王波统稿.

鉴于编者水平有限,书中疏漏之处难免,恳请读者批评指正.

编 者

2016年7月

目　　录

第 1 章　函数与极限

高等数学的主要内容是微积分,研究对象是函数,理论基础是极限,所以学习高等数学先要弄清楚函数和极限的基本知识. 本章讨论函数和极限理论.

§1.1　函　　数

一、邻域

邻域是高等数学的一个常用的概念. 顾名思义,邻域就是周围的某个范围. 这个概念在不同的对象上有不同的表现形式, 这里我们仅讨论一维实数空间.

定义 1.1　包含点 a 的开区间称为点 a 的一个**邻域**, 记为 $U(a)$.

比如开区间$(1,3)$是 2 的一个邻域. 我们也可以说$(1,3)$是$\sqrt{2}$的一个邻域,$(1,3)$是$\sqrt{3}$的一个邻域,等等. 凡是包含点 a 的开区间都是点 a 的邻域. 显然点 a 有无穷多邻域,甚至整个实数轴都可以说成是点 a 的邻域.

点 a 的 δ 邻域是指到点 a 的距离小于 δ 的所有点的集合,记为 $U(a,\delta)$,即 $U(a,\delta)=(a-\delta,a+\delta)$,其中 δ 为邻域的半径,a 为邻域的中心,如图 1.1 所示.

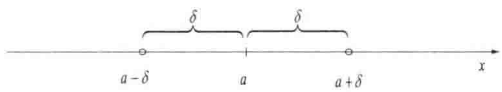

图 1.1

比如$(1,3)$是 2 的 1 邻域,记为 $U(2,1)$,即 $U(2,1)=(1,3)$. 显然, $U(a,\delta)$中的点到点 a 的距离都小于 δ,即有

$$U(a,\delta)=\{x \mid |x-a|<\delta\}.$$

把邻域的中心点 a 去掉后称为去心邻域,记为 $\mathring{U}(a)$,即 $\mathring{U}(a)=U(a)\setminus\{a\}$. 若是在 δ 邻域中把中心点去掉,则称为去心 δ 邻域,即 $\mathring{U}(a,\delta)=\{x \mid 0<|x-a|<\delta\}=(a-\delta,a)\cup(a,a+\delta)$. 显然, 去心邻域不再是区间. 为了方便,有些时候我们也称$(a-\delta,a)$为左 δ 邻域,$(a,a+\delta)$为右 δ 邻域.

二、函数

世间万物无时不在运动、发展和变化. 自然现象如此,社会现象也如此. 总之,物质的运动、发展和变化是普遍的、绝对的,而静止、稳定是暂时的、相对的. 因此,在我们对某个特定的自然现象、社会现象或某个技术过程进行观察时,其中出现的各种量,一般来说也在不断变化. 比如飞行中的飞行器的高度和速度,各个地区的气温和湿度,一个电路中某个电容器两端的电压与电流等都在不断变化着,这些不断变化的量称为变量. 函数是变量间的一种对应关系,具体来说,函数是从实数集的子集到实数集上的一种映射. 高等数学与初等数学的研究对象都是函数,它们的区别在于高等数学是从动态的角度研究函数,而初等数学是从静态的角度研究函数.

从历史上看,人们首先使用了很多具体函数的表达式,但既没有函数这个词,也没有给出函数的定义. 1692 年德国数学家莱布尼茨首先使用函数这个词,其后从约翰 · 伯努利、欧拉、拉格朗日、柯西、狄利克雷、黎曼一直到康托尔及戴德金,经历了 200 多年才得出现代一般的函数概念.

定义 1.2 设 $D\subset\mathbf{R}$,若 $\forall x\in D$,存在唯一的 $y\in\mathbf{R}$ 与之对应,则称 $f:D\to\mathbf{R}$ 为 D 上的**函数**. 其中 x 称为**自变量**,y 称为**因变量**,D 称为函数 f 的**定义域**,$f(D)=\{f(x)\mid x\in D\}$ 称为函数 f 的**值域**.

对于给定的函数 f,我们也可以用 D_f 表示其定义域,用 R_f 表示其值域. 中学时所学过的数列 $\{a_n\}$ 就可以理解为自然数集上的函数

$$f:\mathbf{N}\to\mathbf{R},n\mapsto a_n$$

或者写为 $a_n=f(n),n\in\mathbf{N}$.

设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D. 如果对于任意两点 $x_1,x_2(x_1\neq x_2)\in D$ 都有 $f(x_1)\neq f(x_2)$,那么称 $y=f(x)$ 是一个一对一的函数. 如果 $y=f(x)$ 是一个一对一的函数, 那么可以定义一个新函数 $g:R_f\to D$,对于任意 $y\in R_f$,定义 $g(y)=x$,这里 x 满足 $f(x)=y$, 则称函数 g 为 f 的**反函数**,通常记为 f^{-1}. 从定义可以看出反函数的定义域是原来函数的值域, 反函数的值域是原来函数的定义域.

如何求反函数呢? 首先要给出函数的值域, 确定函数是哪两个集合之间的对应关系,然后从函数表达式中将自变量 x 解出, 给出元素之间的对应. 比如 $y=f(x)=e^x+1$, 该函数是一对一函数, 定义域 $D=\mathbf{R}$,值域 $R_f=(1,+\infty)$. 所以 $f^{-1}(y):(1,+\infty)\to\mathbf{R}$,从表达式中将 x 解出即 $x=\ln(y-1)$. 所以 $f(x)$ 的反函数为

$$f^{-1}(y):(1,+\infty)\to\mathbf{R},y\mapsto\ln(y-1)$$

或者写为 $x=f^{-1}(y)=\ln(y-1),y\in(1,+\infty)$.

由于习惯上自变量用 x 表示,因变量用 y 表示,因此上述表达式也常被写为

$$f^{-1}(x)=\ln(x-1),x\in(1,+\infty).$$

正因为如此, 我们才有"函数和其反函数图像关于直线 $y=x$ 对称"的结论. 在实际运用中我们要根据题目的具体要求来决定是否将 x,y 互换.

设有两个函数 $y=f(u):D_f\to R_f$ 和 $u=g(x):D_g\to R_g$,若 $R_g\subset D_f$,则可以定义一个新的函

数 $y=f[g(x)]:D_g \to R_f$，称此函数为 f 和 g 的复合函数，记为 $f\circ g$，即 $f\circ g(x)=f[g(x)]$.

例 1　已知 $f(x)=\sqrt[3]{x}$，$g(x)=\sin x$，求 $f\circ g$ 和 $g\circ f$.

解

$$f\circ g(x)=f[g(x)]=\sqrt[3]{g(x)}=\sqrt[3]{\sin x},$$

$$g\circ f(x)=g[f(x)]=\sin f(x)=\sin\sqrt[3]{x}.$$

值得一提的是，现代意义上的函数概念是由德国数学家狄利克雷给出的，而记号 $y=f(x)$，$x\in D$ 则是由瑞士数学家欧拉首先使用的.

下面举几个常见函数的例子.

例 2　绝对值函数

$$y=|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant 0;\\ -x, & x<0.\end{cases}$$

定义域是全体实数 $\mathbf{R}$，值域是 $[0,+\infty)$，如图 1.2 所示.

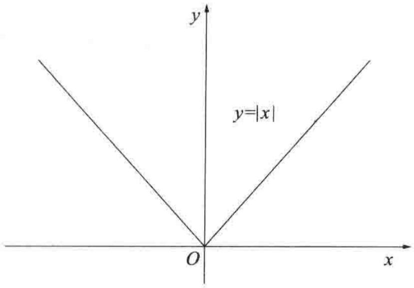

图 1.2

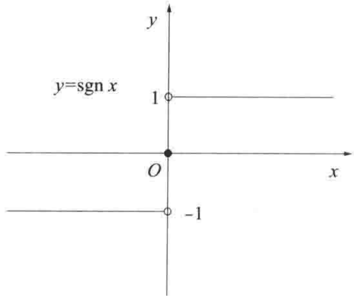

图 1.3

例 3　符号函数

$$y=\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1, & x>0;\\ 0, & x=0;\\ -1, & x<0.\end{cases}$$

定义域是全体实数 $\mathbf{R}$，值域是 $\{-1,1,0\}$，如图 1.3 所示.

例 4　取整函数 $y=[x]$. 设 x 是任意实数，$[x]$ 表示不超过 x 的最大整数. 例如，$[0.3]=0$，$[1.5]=1$，$[-2.1]=-3$，$[5]=5$. 这个函数的定义域是全体实数 $\mathbf{R}$，值域是全体整数 $\mathbf{Z}$，如图 1.4 所示.

例 5　狄利克雷函数

$$D(x)=\begin{cases}1, & x\text{ 为有理数};\\ 0, & x\text{ 为无理数}.\end{cases}$$

定义域是全体实数 $\mathbf{R}$，值域是 $\{0,1\}$，图像已经不能准确地画出来了.

例 6　反正弦函数 $y=\arcsin x$ 的定义域是 $[-1,1]$，值域是 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$，如图 1.5 所示. 反正弦函数 $y=\arcsin x$，$x\in[-1,1]$ 是正弦函数 $y=\sin x$，$x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 的反函数.

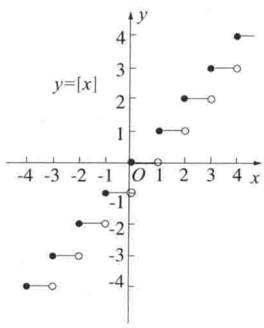

图 1.4

值得注意：正弦函数 $y=\sin x, x\in\mathbf{R}$ 不存在反函数，因为它不是一对一函数. 反余弦、反正切、反余切函数也一样.

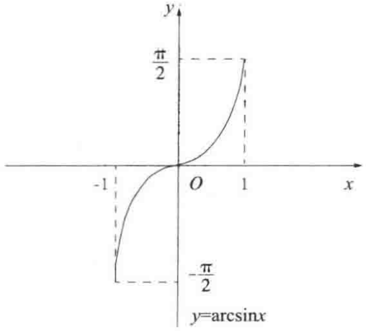

图 1.5

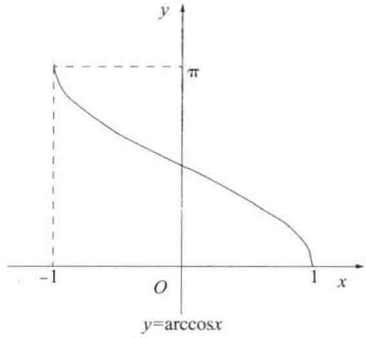

图 1.6

例 7 反余弦函数 $y=\arccos x$ 的定义域是 $[-1,1]$，值域是 $[0,\pi]$，如图 1.6 所示. 它是余弦函数 $y=\cos x, x\in[0,\pi]$ 的反函数.

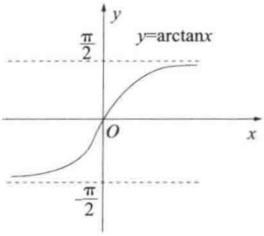

图 1.7

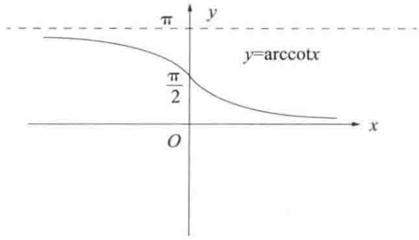

图 1.8

例 8 反正切函数 $y=\arctan x$ 的定义域是 $\mathbf{R}$，值域是 $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$，如图 1.7 所示. 它是正切函数 $y=\tan x, x\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ 的反函数.

例 9 反余切函数 $y=\operatorname{arccot} x$ 的定义域是 $\mathbf{R}$，值域是 $[0,\pi]$，如图 1.8 所示. 它是余切函数 $y=\cot x, x\in[0,\pi]$ 的反函数.

三、函数的几种特性

1. 函数的有界性

设集合 $A\subset\mathbf{R}$. 若存在常数 $K_1\in\mathbf{R}$，使得对于任意 $x\in A$，都有 $x\leqslant K_1$，则称集合 A 有上界，K_1 称为集合 A 的一个上界；若存在常数 $K_2\in\mathbf{R}$，使得对于任意 $x\in A$，都有 $x\geqslant K_2$，则称集合 A 有下界，K_2 为集合 A 的一个下界；若集合 A 既有上界又有下界，则称集合 A 有界.

根据定义，容易证明集合 A 有界等价于：存在常数 $K>0$，使得对于任意 $x\in A$，都有 $|x|\leqslant K$.

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D. 如果函数 $f(x)$ 的值域 $f(D)$ 有上界(下界、界)，那么称函

数$f(x)$有上界(下界、界). 若集合$X\subset D$,$f(X)$有上界(下界、界),则称函数$f(x)$在集合X上有上界(下界、界). 显然,函数$f(x)$在X上有界的充分必要条件是它在X上既有上界又有下界.

例如,我们知道$y=\sin x$的值域为$[-1,1]$,所以函数$y=\sin x$是有界的. 又如$f(x)=\frac{1}{x}$在开区间$(0,+\infty)$上没有上界,但有下界0.

类似地,若数列$\{x_n\}$作为一个集合有上界(下界、界),则称该数列有上界(下界、界).

2. 函数的单调性

设函数$f(x)$的定义域为D,区间$I\subset D$. 若对于区间I上任意两点x_1及x_2,当$x_1<x_2$时,恒有

$$f(x_1)\leqslant f(x_2)\ (f(x_1)<f(x_2)),$$

则称函数$f(x)$在区间I上**(严格)单调增加**;若对于区间I上任意两点x_1及x_2,当$x_1<x_2$时,恒有

$$f(x_1)\geqslant f(x_2)\ (f(x_1)>f(x_2)),$$

则称函数$f(x)$在区间I上**(严格)单调减少**. 单调增加和单调减少的函数统称为**单调函数**.

例如,函数$f(x)=\frac{1}{x}$在$(0,+\infty)$上是单调递减的,在$(-\infty,0)$上是单调递减的,但是在$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$上不是单调的. 又如,$f(x)=x^2$在$(-\infty,0]$上是单调递减的,在$[0,+\infty)$上是单调递增的,但是在$(-\infty,+\infty)$上不具有单调性.

3. 函数的奇偶性

设函数$f(x)$的定义域D关于原点对称. 若对于任意$x\in D$,$f(-x)=f(x)$恒成立,则称函数$f(x)$为**偶函数**. 若对于任意$x\in D$,$f(-x)=-f(x)$恒成立,则称函数$f(x)$为**奇函数**.

例如,$f(x)=x^2$是偶函数,$f(x)=x^3$是奇函数.

从图像上看,偶函数的图像是关于y轴对称的,奇函数的图像是关于原点对称的. 函数$y=\sin x$是奇函数而$y=\cos x$是偶函数,$y=\sin x+\cos x$既不是奇函数也不是偶函数.

4. 函数的周期性

设函数$f(x)$的定义域为D. 如果存在一个正数T,使得对于任意$x\in D$有$x\pm T\in D$,且$f(x+T)=f(x)$恒成立,那么称$f(x)$为**周期函数**,T称为$f(x)$的**周期**.

通常我们说周期函数的周期都是指最小正周期. 例如,函数$\sin x$,$\cos x$都是以2π为周期的周期函数,而$\tan x$是以π为周期的周期函数. 若用一个周期长依次分割定义域,则在每个分段上,函数图像形状都是相同的. 遗憾的是有的周期函数不存在最小正周期. 例如狄利克雷函数

$$D(x)=\begin{cases}1, & x\text{ 为有理数};\\ 0, & x\text{ 为无理数}.\end{cases}$$

很容易验证,任何正有理数都是它的周期,但是不存在最小正有理数,所以它没有最小正周期.

四、初等函数

中学时我们学过的主要函数有:

(1)幂函数 $y=x^{\alpha}$;

(2)指数函数 $y=a^{x}(a>0,a\neq1)$;

(3)对数函数 $y=\log_{a}x(a>0,a\neq1)$;

(4)三角函数 $y=\sin x, y=\cos x, y=\tan x$ 等;

(5)反三角函数 $y=\arcsin x, y=\arccos x, y=\arctan x$ 等.

以上五类函数统称为基本初等函数.

由常数和基本初等函数经过有限次的四则运算和有限次的函数复合所构成并可用一个式子表示的函数,称为初等函数. 例如,$y=|x|=\sqrt{x^2}$,$y=\sqrt{1-x}$,$y=\sin^2 x$ 都是初等函数. 本书所讨论的函数绝大多数是初等函数.

习 题 1-1

1. 下列各题中,函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是否相同,为什么?

(1)$f(x)=\lg(x^2)$,$g(x)=2\lg x$;

(2)$f(x)=x$,$g(x)=\sqrt{x^2}$;

(3)$f(x)=\sqrt[3]{x^4-x^3}$,$g(x)=x\sqrt[3]{x-1}$;

(4)$f(x)=1$,$g(x)=\sec^2 x-\tan^2 x$.

2. 说明下列函数在指定区间内的单调性.

(1)$y=\dfrac{x}{1-x}$,$x\in(-\infty,1)$;

(2)$y=x+\ln x$,$x\in(0,+\infty)$.

3. 设 $f(x)$ 为定义在 $(-l,l)$ 内的奇函数,若 $f(x)$ 在 $(0,l)$ 内单调增加,证明:$f(x)$ 在 $(-l,0)$ 内也单调增加.

4. 设下面所考虑的函数都是定义在区间 $(-l,l)$ 上的. 证明:

(1)两个偶函数的和是偶函数,两个奇函数的和是奇函数;

(2)两个偶函数的乘积是偶函数,两个奇函数的乘积是偶函数,偶函数与奇函数的乘积是奇函数.

5. 下列函数中哪些是奇函数,哪些是偶函数,哪些既非偶函数也非奇函数?

(1)$y=x^2(1-x^2)$; (2)$y=3x^2-x^3$; (3)$y=\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$;

(4)$y=x(x-1)(x+1)$; (5)$y=\sin x-\cos x+1$; (6)$y=\dfrac{a^x+a^{-x}}{2}$.

6. 下列各函数中哪些是周期函数？对于周期函数，指出其周期.

(1) $y=\cos(x-2)$；　　(2) $y=\cos 4x$；　　(3) $y=1+\sin\pi x$；

(4) $y=x\cos x$；　　(5) $y=\sin^2 x$.

7. 设

$$f(x)=\begin{cases}1, & |x|<1;\\ 0, & |x|=1;\\ -1, & |x|>1.\end{cases}\qquad g(x)=\mathrm{e}^x.$$

求 $f[g(x)]$ 和 $g[f(x)]$，并作出这两个函数的图像.

§1.2　数列极限

一、数列

按照一定顺序排成的无穷多个数称为数列，记为 $\{x_n\}$. 例如：

(1) $1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\cdots,\frac{1}{n},\cdots$；

(2) $1,2,3$；

(3) $1,2,3,\cdots,n,\cdots$；

(4) $1,-1,1,-1,\cdots,(-1)^{n+1},\cdots$.

这些表达式中(1)，(3)，(4)是数列，(2)不是数列.

数列中的数称为数列的项，第 n 项 x_n 叫作数列的**一般项**或者**通项**. 比如数列(1)的通项是 $x_n=\frac{1}{n}$，数列(3)的通项是 $x_n=n$，数列(4)的通项是 $x_n=(-1)^{n+1}$. 通常，我们都把数列 $\{x_n\}$ 看作数轴上的一个动点，如图 1.9 所示，它依次取数轴上的点 $x_1,x_2,x_3,\cdots,x_n,\cdots$.

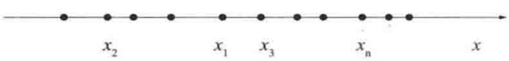

图 1.9

二、数列的极限

极限思想是由求某些实际问题的精确解答而产生的. 例如，我国古代数学家刘徽利用圆内接正多边形来推算圆面积的方法——割圆术，就是极限思想在几何学上的应用. 具体做法如下：

给定一个圆，如图 1.10 所示，首先做圆的内接正六边形，把它的面积记为 A_1；再做内接正十二边形，其面积记为 A_2；再做内接正二十四边形，其面积记为 A_3……如此下去，每

次边数加倍,一般地把内接正 $6\times 2^{n-1}$ 边形的面积记为 $A_n(n\in\mathbf{N}^+)$.

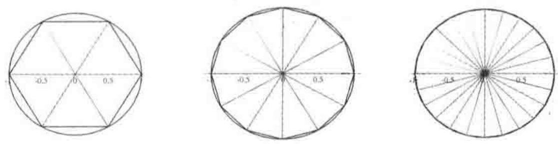

图 1.10

这样我们得到一个数列 $A_1,A_2,A_3,\cdots,A_n,\cdots$. 显然,$n$ 越大,内接正多边形的面积与圆的面积的差别就越小,从而以 A_n 作为圆面积的近似值也越精确. 但是无论 n 取多大,只要 n 取定了,A_n 终究只是多边形的面积,而不是圆的面积. 因此,设想 n 无限增大,即内接正多边形的边数无限增加,在这个过程中,内接正多边形无限接近于圆,同时 A_n 也无限接近于某一确定的数值,这个确定的数值就可以认为是圆的面积. 数学上我们称这个确定的数值是数列 $\{A_n\}$ 的极限. 我们看到这个逼近过程是一个动态变化的过程.

下面再看一个数列的例子: 已知数列

$$2,\frac{1}{2},\frac{4}{3},\cdots,\frac{n+(-1)^{n-1}}{n},\cdots, \tag{1-1}$$

可以观察到, 当 n 无限增大即 $n\to\infty$ 时,对应的 x_n 无限接近于确定的数值 1. 我们来分析这个趋近过程. 由于 $|x_n-1|=\left|(-1)^{n-1}\frac{1}{n}\right|=\frac{1}{n}$,所以当 n 越来越大时,$\frac{1}{n}$越来越小,从而 x_n 就越来越接近于 1. 因为只要 n 足够大, $|x_n-1|$ 即$\frac{1}{n}$可以小于任何给定的足够小的正数,所以说,当 n 无限增大时,x_n 无限接近于 1.

例如,给定$\frac{1}{100}$,欲使$\frac{1}{n}<\frac{1}{100}$,只要 $n>100$,即从 101 项开始,后面的项都能使不等式 $|x_n-1|<\frac{1}{100}$成立. 同样,如果给定$\frac{1}{10000}$,那么从第 10001 项开始,后面的项都能使不等式 $|x_n-1|<\frac{1}{10000}$成立. 一般地,不论给定多么小的正数 ε,总存在一个正整数 N,使得当 $n>N$ 时,不等式 $|x_n-1|<\varepsilon$ 都成立. 这就是数列 $x_n=\frac{n+(-1)^{n-1}}{n}(n=1,2,\cdots)$ 当 $n\to\infty$ 时无限接近于 1 的表达. 这里的 1 就叫作数列 $x_n=\frac{n+(-1)^{n-1}}{n}(n=1,2,\cdots)$ 当 $n\to\infty$ 时的极限. 可见,极限要用动态变化思想描述. 具体定义如下:

定义 1.3 设 $\{x_n\}$ 为一数列,如果存在常数 a,对于任意给定的不论多么小的正数 ε,总存在正整数 N,使得当 $n>N$ 时,不等式 $|x_n-a|<\varepsilon$ 都成立,那么就称常数 a 是数列 $\{x_n\}$ 的**极限**,或者称数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a,记为

$$\lim_{n\to\infty}x_n=a \text{ 或者 } x_n\to a(n\to\infty).$$

如果不存在这样的常数 a,就说数列 $\{x_n\}$ 没有极限,或者说数列 $\{x_n\}$ 是**发散**的,习惯上也说$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 不存在.

因为不等式 $|x_n-a|<\varepsilon$ 与 $a-\varepsilon<x_n<a+\varepsilon$ 等价,所以极限的定义从几何上看就是,

对于任意给定的正数 ε，从某一项开始，所有的项 x_n 都落在点 a 的 ε 邻域 $(a-\varepsilon,a+\varepsilon)$ 内. 用数轴来描述，如图 1.11 所示.

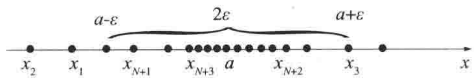

图 1.11

极限的定义可以简单表述为：

$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a\Leftrightarrow\forall\,\varepsilon>0$，总存在正整数 N，使得当 $n>N$ 时，有 $|x_n-a|<\varepsilon$.

例 1　利用定义证明：数列

$$\sin1,\frac{\sin2}{2},\frac{\sin3}{3},\cdots,\frac{\sin n}{n},\cdots$$

的极限是 0.

证明　任给 $\varepsilon>0$，因为 $|x_n-a|=\left|\frac{\sin n}{n}-0\right|=\left|\frac{\sin n}{n}\right|<\frac{1}{n}$，为了使 $|x_n-a|$ 小于任给的正数 ε，只要 $\frac{1}{n}<\varepsilon$ 或者 $n>\frac{1}{\varepsilon}$，所以 $\forall\,\varepsilon>0$，取 $N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$，则当 $n>N$ 时，就有 $\left|\frac{\sin n}{n}-0\right|<\varepsilon$ 即 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sin n}{n}=0$.

例 2　设 $0<|q|<1$，证明：等比数列

$$1,q,q^2,\cdots,q^n,\cdots$$

的极限是 0.

证明　任给 $0<\varepsilon<1$，因为 $|x_n-a|=|q^{n-1}-0|=|q|^{n-1}$，因此要使 $|x_n-0|<\varepsilon$，只要 $|q|^{n-1}<\varepsilon$. 两边取对数，得 $(n-1)\ln|q|<\ln\varepsilon$. 因为 $|q|<1$，所以 $\ln|q|<0$，故 $n>1+\frac{\ln\varepsilon}{\ln|q|}$. 取 $N=\left[1+\frac{\ln\varepsilon}{\ln|q|}\right]$，则当 $n>N$ 时，有 $|q^{n-1}-0|<\varepsilon$，即 $\lim\limits_{n\to\infty}q^{n-1}=0$.

三、收敛数列的性质

定理 1.1（收敛数列的收敛点唯一）　若数列 $\{x_n\}$ 既收敛于 a 又收敛于 b，则 $a=b$.

证明　不妨设 $a<b$. 取 $\varepsilon=\frac{b-a}{2}$，因为 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，所以存在正整数 N_1，当 $n>N_1$ 时，不等式

$$|x_n-a|<\frac{b-a}{2} \tag{1-2}$$

成立. 同理，因为 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=b$，所以存在正整数 N_2，当 $n>N_2$ 时，不等式

$$|x_n-b|<\frac{b-a}{2} \tag{1-3}$$

成立. 取 $N=\max\{N_1,N_2\}$，则当 $n>N$ 时，式(1-2)和(1-3)同时成立. 但是由式(1-2)得到 $x_n<\frac{a+b}{2}$，由式(1-3)得到 $x_n>\frac{a+b}{2}$，这是矛盾的. 这个矛盾说明函数的极限是唯一

的.

定理 1.2(保号性) 设$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$. 若$a>0$(或$a<0$),则存在正整数$N$,当$n>N$时,有$x_n>0$(或$x_n<0$).

证明 由数列极限的定义,对于$\varepsilon=\frac{a}{2}>0$,存在正整数$N$,当$n>N$时,有$|x_n-a|<\frac{a}{2}$,从而$x_n>a-\frac{a}{2}=\frac{a}{2}>0$.

推论 1.1 设$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$. 如果存在正整数$N$,当$n>N$时,都有$x_n>0$(或$x_n<0$),那么$a\geqslant0$(或$a\leqslant0$).

定理 1.3(收敛数列有界) 如果数列$\{x_n\}$收敛,那么此数列有界.

证明 设$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$. 根据数列极限的定义,对于$\varepsilon=1$,存在正整数$N$,当$n>N$时,不等式$|x_n-a|<1$成立. 于是,当$n>N$时,

$$|x_n|=|(x_n-a)+a|\leqslant|x_n-a|+|a|<1+|a|.$$

取$M=\max\{|x_1|,|x_2|,\cdots,|x_N|,1+|a|\}$,那么数列$\{x_n\}$中一切$x_n$都满足不等式$|x_n|\leqslant M$,这说明数列$\{x_n\}$是有界的.

易见,如果数列$\{x_n\}$无界,那么数列$\{x_n\}$一定是发散的. 但是有界数列不一定都收敛,比如$\{\sin n\}$.

在数列$\{x_n\}$中任意抽取无限多项并保持这些项在原数列$\{x_n\}$中的先后次序,这样得到的一个数列称为原数列$\{x_n\}$的子数列(或子列).

设在数列$\{x_n\}$中,第一次抽取x_{n_1},第二次在x_{n_1}后抽取x_{n_2},第三次在x_{n_2}后抽取x_{n_3}……,这样无休止地抽取下去,得到一个新的数列$\{x_{n_k}\}$:

$$x_{n_1},x_{n_2},x_{n_3},\cdots,$$

通项x_{n_k}是新数列第k项,在原数列$\{x_n\}$中是第n_k项,不难看出$n_k\geqslant k$.

定理 1.4 数列$\{x_n\}$收敛于a的充分必要条件是它的任意子数列都收敛且收敛于a.

证明 充分性显然.

(必要性)设数列$\{x_{n_k}\}$是数列$\{x_n\}$的任意子数列. 由于$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$,所以按照极限定义,$\forall\varepsilon>0$,$\exists$正整数$N$,当$n>N$时,$|x_n-a|<\varepsilon$成立. 取$K=N$,则当$k>K$时,$n_k>n_K=n_N\geqslant N$,于是$|x_{n_k}-a|<\varepsilon$. 这就证明了$\lim\limits_{k\to\infty}x_{n_k}=a$.

定理 1.5 数列$\{x_n\}$收敛的充分必要条件是它的奇子列和偶子列都收敛且收敛于同一点.

证明 必要性显然.

(充分性)设$\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n-1}=a$,$\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n}=a$. 任给$\varepsilon>0$,根据极限的定义一定存在正整数$K_1$,当$n>K_1$时,有$|x_{2n-1}-a|<\varepsilon$成立;一定存在正整数$K_2$,当$n>K_2$时,有$|x_{2n}-a|<\varepsilon$成立. 这说明在数列$\{x_n\}$中,从$2K_1-1$项以后,所有的奇数项都满足$|x_n-a|<\varepsilon$,从$2K_2$项后,所有的偶数项都满足$|x_n-a|<\varepsilon$. 故取$N=\max\{2K_1-1,2K_2\}$,则当$n>N$时,有$|x_n-a|<\varepsilon$成立. 所以$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$.

例 3 证明数列$x_n=(-1)^n(n=1,2,3,\cdots)$是发散的.