俄罗斯数学精品译丛

"十二五"国家重点图书

Construction Theory of Function (III)

函数构造论（下）

[俄罗斯] 纳汤松 著　徐家福 译

哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

俄罗斯数学精品译丛

“十二五”国家重点图书

函数构造论（下）

Construction Theory of Function (III)

·［俄罗斯］纳汤松 著·

徐家福 译

HITP

哈爾濱工業大學出版社

HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内 容 简 介

本书利用简单的分析工具(代数多项式与三角多项式)来讨论函数的逼近理论.本书主要介绍内插过程与机械求积的收敛性问题,述理详明,取材丰富,特别是对苏联数学家在这方面的巨大成就进行了较多叙述.书中几乎未用到复变函数论方法.

本书可供数学专业大学生及高等数学研究人员阅读参考.

图书在版编目(CIP)数据

函数构造论.下/(俄罗斯)纳汤松著;徐家福译.—哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社,2017.1

ISBN 978－7－5603－6169－7

Ⅰ.①函… Ⅱ.①纳… ②徐… Ⅲ.①函数构造论 Ⅳ.①O174.4

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2016)第 192947 号

策划编辑 刘培杰 张永芹
责任编辑 张永芹 刘春雷
封面设计 孙茵艾
出版发行 哈尔滨工业大学出版社
社　　址 哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号 邮编 150006
传　　真 0451－86414749
网　　址 http://hitpress.hit.edu.cn
印　　刷 哈尔滨市工大节能印刷厂
开　　本 787mm×1092mm 1/16 印张 10.25 字数 184 千字
版　　次 2017 年 1 月第 1 版 2017 年 1 月第 1 次印刷
书　　号 ISBN 978－7－5603－6169－7
定　　价 48.00 元

目录

第三篇　内插法与机械求积

第三篇　内插法与机械求积

内插法的各种形式

第一章

§1 问题的提出

在前面两篇中我们熟悉了构成代数多项式与三角多项式的各种各样的方法，借以给出指定连续函数 $f(x)$ 的近似表达式，这就是伯恩斯坦多项式. 函数 $f(x)$ 的直交展开式的部分和，傅立叶和，费耶尔和与瓦勒·布然和，等等. 在这一篇中，我们还要讲一种求得近似多项式的方法：内插方法. 现在的问题在于作出这样的多项式 $P(x)$，使它在一些预先给定的点（“内插结点”）处的值与函数 $f(x)$ 的值相符合. 如果指的是通常的代数多项式的话，则从几何的观点来看，问题便归结为作出经过诸点 $(x_i, f(x_i))$ 的，具有适当次数的抛物线，其中的 x_i 为内插结点. 根据这种理由，作出所述多项式的方法，便叫作抛物线内插法. 本章所讲的，主要是问题的形式方面. 在以下各章我们将研究结点无限增多时，内插多项式 $P(x)$ 的形态. 如果对于函数 $f(x)$ 不加任何限制的话，则它在结点（这些点只是确定了多项式 $P(x)$）处的值与这函数在其他点处的值便没有丝毫关系，所以使结点个数增多，根本就不会使多项式 $P(x)$ 在内插结点以外的点处与函数 $f(x)$ 近似. 为了避免这种情形，虽然以

下所讲的很多东西可以用于更广泛的黎曼可积的函数类上①,而我们还是像第一篇那样只限于考虑连续函数.

因此,我们的兴趣主要是研究内插多项式 $P(x)$ 一致逼近求插函数 $f(x)$ 的问题;除此以外,我们也要讲到 $P(x)$ 平均平方逼近 $f(x)$ 的问题.

像以下所看到的那样,光是函数 $f(x)$ 的连续性,还不足以使内插多项式在结点增多时就逼近 $f(x)$. 在下一章中,将举出一些具有反面性质的结果以说明这个论断. 但是,若对函数 $f(x)$ 加上补充的限制,则在适当选择扩大结点集合的规律时,就能够得出正面的结果.

对于使用不是代数多项式而是三角多项式的内插法的情形,也发生同样的问题. 如果求插函数是以 2π 为周期,则使用三角多项式的内插法是十分自然的.

§2 拉格朗日公式

我们来考虑下述问题:给定两组 n 个实数

$$x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n \tag{1}$$

$$y_1, y_2, y_3, \cdots, y_n \tag{2}$$

数组(1) 中各数都不相同(关于数组(2) 中的数不做这种假定). 今要求作出一个次数尽可能为最低的多项式 $L(x)$,使得

$$L(x_i) = y_i \quad (i = 1, 2, \cdots, n) \tag{3}$$

要解这个问题,只需指出,多项式

$$l_k(x) = \frac{(x - x_1)\cdots(x - x_{k-1})(x - x_{k+1})\cdots(x - x_n)}{(x_k - x_1)\cdots(x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1})\cdots(x_k - x_n)} \tag{4}$$

具有性质

$$l_k(x_i) = \begin{cases} 0, 若\ i \neq k \\ 1, 若\ i = k \end{cases}$$

因此多项式

$$L(x) = \sum_{k=1}^{n} y_k l_k(x) \tag{5}$$

便满足条件(3). 这个多项式的次数不高于 $n-1$. 另外,满足条件(3) 而次数不高于 $n-1$ 的其他多项式 $M(x)$ 不可能存在,因为否则的话,$L(x) - M(x)$ 便是一个不恒等于零的多项式,其次数不高于 $n-1$,而有 n 个根(1). 这是不可能的.

---

① 众所周知,这种函数的间断点组成的集合,其测度恒为零.

因此,多项式 $L(x)$ 便是所述问题的唯一的解.用 x_i 与 y_i 给出的公式(5),便叫作拉格朗日内插公式.

多项式 $l_k(x)$(基本多项式)可赋予更紧凑的形式,就是若令

$$\omega(x)=(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n) \tag{6}$$

就有

$$(x-x_1)\cdots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\cdots(x-x_n)=\frac{\omega(x)}{x-x_k}$$

$$(x_k-x_1)\cdots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\cdots(x_k-x_n)=$$

$$\lim_{x\to x_k}\frac{\omega(x)}{x-x_k}=\omega'(x_k)$$

因而

$$l_k(x)=\frac{\omega(x)}{\omega'(x_k)(x-x_k)} \tag{7}$$

如果 $P(x)$ 是次数不超过 $n-1$ 的某一个多项式,而 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是变元的相异值,则恒等式

$$P(x)=\sum_{k=1}^{n}P(x_k)l_k(x) \tag{8}$$

成立,因为两端都是次数低于 n 的多项式,而在 n 个点 x_i 处相等的缘故;特别可得

$$\sum_{k=1}^{n}l_k(x)=1 \tag{9}$$

设 $f(x)$ 为定义在某闭区间 $[a,b]$ 上的一个任意的函数,且结点又取自这个闭区间,则多项式

$$L(x)=\sum_{k=1}^{n}f(x_k)l_k(x) \tag{10}$$

便是次数不超过 $n-1$ 并在诸结点 x_i 处与 $f(x)$ 重合的唯一的多项式.当然,当 $x\neq x_i$ 时,$L(x)$ 可能不与 $f(x)$ 相合.多项式(10)就叫作函数 $f(x)$ 的拉格朗日内插多项式.为了强调它与这个函数的依赖关系,常常把它记成 $L[f;x]$.公式(8)表示

$$L[P;x]=P(x) \tag{11}$$

如果 $P(x)$ 是一个次数低于 n 的多项式.

设 $f(x)$ 为定义在 $[a,b]$ 上的函数,它在那里具有 n 阶有限导数.这时对于异于全部结点 x_i 的 x 可以求得差 $f(x)-L(x)$ 的便利的表达式.实际上,对于这样的 x(把它当作是固定在闭区间 $[a,b]$ 之内的),令①

① 因为 $x\neq x_i(i=1,2,\cdots,n)$,故 $\omega(x)\neq 0$.

$$K=\frac{f(x)-L(x)}{\omega(x)} \tag{12}$$

并设

$$\varphi(z)=f(z)-L(z)-K\omega(z)$$

这个函数定义在$[a,b]$上并在那里有n阶有限导数,而且

$$\varphi^{(n)}(z)=f^{(n)}(z)-Kn! \tag{13}$$

因为$L(z)$是次数低于n的多项式,而$\omega^{(n)}(z)=n!$. 显然

$$\varphi(x_1)=\varphi(x_2)=\cdots=\varphi(x_n)=0$$

此外,据(12)知

$$\varphi(x)=0$$

这就是说,导数$\varphi'(z)$在$n+1$个点$x,x_1,x_2,\cdots,x_n$之间的n个区间内有n个根,而且它们都是互异的(罗尔定理).

重复应用罗尔定理,就证明了二阶导数$\varphi''(z)$在$\varphi'(z)$的n个根之间的$n-1$个区间内有$n-1$个(相异的)根. 继续这种推理便可证实,在诸数$x,x_1,\cdots,x_n$的最大者与最小者之间,n阶导数$\varphi^{(n)}(z)$必有一根. 我们用ξ来表示它,由(13)便得

$$K=\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}$$

这时公式(12)就化为带余项的拉格朗日内插公式

$$f(x)=L(x)+\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}\omega(x) \tag{14}$$

指出$a<\xi<b$是重要的.

由公式(14)便推得了以下的简单定理.

定理 1.1 设$f(x)$为定义在$[a,b]$上的整函数,则不论引进结点的法则怎样,只要它们的个数无限增大并且不超出$[a,b]$的范围,在$[a,b]$上一致有

$$\lim_{n\to\infty}L(x)=f(x)$$

实际上,若$x\in[a,b]$,则有$|\omega(x)|\leqslant(b-a)^n$;另外,如果令

$$M_n=\max|f^{(n)}(x)|$$

则由(14)得

$$|f(x)-L(x)|\leqslant\frac{M_n}{n!}(b-a)^n$$

但是在第一篇第九章 §1 中,我们曾证明

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{M_n}}{n}=0$$

从而

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{\sqrt[n]{M_n}}{n}\mathrm{e}(b-a)\right]=0$$

更有

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{M_n}{n^n}e^n(b-a)^n\right]=0 \tag{15}$$

因为

$$\frac{n^n}{n!}<e^n$$

故由(15)得

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{M_n}{n!}(b-a)^n\right]=0$$

定理得证.

§3 拉格朗日公式的其他形式——牛顿公式

我们设想,已知某一函数在诸结点 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 处的值 $f(x_1),f(x_2),\cdots,f(x_n)$,并打算求出这函数在结点之外的点处的值.如我们所知,若这函数的构造性质良好,只要结点个数足够大,拉格朗日内插多项式 $L(x)$ 便是它的很好的表示.因此自然便取 $L(x)$ 的值作为 $f(x)$ 的未知的值.

例如,设 $f(x)$ 为当温度为 x 时,汽锅中蒸汽的压力.当温度为 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 时对压力进行测量并作出内插多项式,我们便得到用来计算在其他温度时的压力的公式①.但是由这个例就可以看出把内插多项式写成(10)的形式是不方便的.实际上,如果我们在温度为 x_{n+1} 时,再对压力做一次测量,则在和(10)中全部加数都改变了,而整个计算就必须从头做起.因此就产生了牛顿的想法,把多项式 $L(x)$ 不写成(10)的形式而写成

$$L(x)=A_0+A_1(x-x_1)+A_2(x-x_1)(x-x_2)+\cdots+$$
$$A_{n-1}(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1}) \tag{16}$$

在这里逐次令 $x=x_1,x=x_2,\cdots,x=x_n$,并注意到 $L(x_i)=y_i$,我们便求得全部系数 $A_0,A_1,\cdots,A_{n-1}$.直接看出,A_{k-1} 只依赖于 $x_1,x_2,\cdots,x_k$ 以及 $y_1,y_2,\cdots,y_k$,而不依赖于 x_i 与 $y_i(i>k)$.所以,添加新的结点只需在(16)中引进一项新的加数,而将原有的全部保留.

我们来导出计算 A_{k-1} 的公式.因为多项式

$$L_k(x)=A_0+A_1(x-x_1)+\cdots+A_{k-1}(x-x_1)\cdots(x-x_{k-1})$$

对于 $x=x_1,x_2,\cdots,x_k$ 诸值取值 $y_1,y_2,\cdots,y_k$,所以可以把它写成拉格朗日形

① 作者是故意把这种情况作成公式.实际上,直接利用内插公式来构成"经验公式"是很少有的.

式(5),即

$$L_k(x)=\sum_{i=1}^{k}\frac{\omega_k(x)}{\omega'_k(x_i)(x-x_i)}y_i$$

其中

$$\omega_k(x)=(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_k)$$

这就是说,它的最高次项系数 A_{k-1} 是

$$A_{k-1}=\sum_{i=1}^{k}\frac{y_i}{\omega'_k(x_i)} \tag{17}$$

我们仍旧指出

$$\omega'_k(x_i)=(x_i-x_1)\cdots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_k) \tag{18}$$

例如

$$A_0=y_1,A_1=\frac{y_1}{x_1-x_2}+\frac{y_2}{x_2-x_1}$$

$$A_2=\frac{y_1}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)}+\frac{y_2}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)}+\frac{y_3}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)}$$

我们较详细地来讲一讲当结点构成算术级数时的特殊情形. 为此目的,我们来定义差分的概念. 设

$$y_0,y_1,y_2,y_3,\cdots \tag{19}$$

为某一有限或无限数列;令①

$$\Delta y_k=y_{k+1}-y_k$$
$$\Delta^2 y_k=\Delta y_{k+1}-\Delta y_k$$
$$\vdots$$
$$\Delta^{n+1} y_k=\Delta^n y_{k+1}-\Delta^n y_k$$
$$\vdots$$

不难看出

$$\Delta^2 y_k=y_{k+2}-2y_{k+1}+y_k$$
$$\Delta^3 y_k=y_{k+3}-3y_{k+2}+3y_{k+1}-y_k$$

一般说来

$$\Delta^n y_k=\sum_{r=0}^{n}(-1)^{n-r}C_n^r y_{k+r} \tag{20}$$

这一点容易用完全归纳法来证实. 诸量 $\Delta y_k,\Delta^2 y_k,\cdots$ 便叫作数列(19)的一阶差,二阶差,……

指明了这个以后,我们转到公式(16)上来,并假定诸结点为

---

① 其实,由变数 y 出发我们就构成了新变数 $\Delta y,\Delta^2 y,\cdots$. 所以诸记号 $(\Delta y)_k,(\Delta^2 y)_k,\cdots$,便比较自然了.

$$x_1=a, x_2=a+h, x_3=a+2h, \cdots, x_n=a+(n-1)h$$

其中,h 是一个异于零的数.

在这种情形下将有

$$x_i-x_r=(i-r)h$$

因而由(18) 得

$$\omega'_k(x_i)=(-1)^{k-i}h^{k-1}(i-1)!\ (k-i)!$$

代入(17) 中,我们便得到

$$A_{k-1}=\sum_{i=1}^{k}\frac{(-1)^{k-i}y_i}{h^{k-1}(i-1)!\ (k-i)!}$$

或

$$A_{k-1}=\frac{1}{h^{k-1}(k-1)!}\sum_{r=0}^{k-1}(-1)^{k-1-r}C_{k-1}^{r}y_{r+1}$$

将这个结果与(20) 比较,最后便得

$$A_{k-1}=\frac{\Delta^{k-1}y_1}{h^{k-1}(k-1)!}$$

而公式(16) 便呈下形

$$L(x)=y_1+\frac{\Delta y_1}{h}\frac{x-a}{1!}+\frac{\Delta^2 y_1}{h^2}\frac{(x-a)(x-a-h)}{2!}+\cdots+\frac{\Delta^{n-1}y_1}{h^{n-1}}\frac{(x-a)(x-a-h)\cdots[x-a-(n-2)h]}{(n-1)!} \tag{21}$$

公式(21) 叫作牛顿内插公式.

当

$$y_k=f[a+(k-1)h]$$

时,便可以应用记号

$$\Delta^n y_k=\Delta^n f[a+(k-1)h]$$

在这种记号下,牛顿公式呈下形①

$$L[f;x]=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\Delta^k f(a)}{h^k}\frac{(x-a)(x-a-h)\cdots[x-a-(k-1)h]}{k!} \tag{22}$$

特别,若 $P(x)$ 为低于 n 次的多项式,则对任意的 a 与 h,恒等式

$$P(x)=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\Delta^k P(a)}{h^k}\frac{(x-a)(x-a-h)\cdots[x-a-(k-1)h]}{k!} \tag{23}$$

都成立.

例 设

① 这时 $\Delta^0 y_k=y_k$,$\Delta^0 f(a)=f(a)$.

$$P(x)=\frac{(n-x)(n-1-x)\cdots(2-x)}{n!},a=0,h=1$$

在这种情形下

$$P(a)=1,P(a+h)=\frac{1}{n}$$

$$P(a+2h)=\cdots=P[a+(n-1)h]=0$$

所以

$$\Delta^k P(a)=\sum_{r=0}^{k}(-1)^{k-r}C_k^r P(a+rh)=(-1)^k\frac{n-k}{n}$$

因而

$$\frac{(n-x)(n-1-x)\cdots(2-x)}{n!}=$$

$$\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\frac{n-k}{n}\frac{x(x-1)\cdots(x-k+1)}{k!}$$

其中令 $x=n+m$,我们便得到有用的恒等式

$$\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\frac{n-k}{n}C_{n+m}^k=(-1)^{n-1}\frac{(n+m-2)!}{(m-1)!\ n!}\tag{24}$$

以后,还必须在另外的形式下来使用这个恒等式.

那就是,在(24)中把 k 换成 $n-i$ 并交换 n 和 m 的位置,我们便得到

$$\sum_{i=0}^{m}(-1)^{m-i}\frac{i}{n}C_{n+m}^{n+i}=(-1)^{m-1}\frac{(m+n-2)!}{(m-1)!\ n!}\tag{25}$$

§4 具多重结点的内插法

在前面各节中,内插多项式是根据它自己在结点处的值构成的,现在我们提出更一般的问题:给定了结点(1)以及诸数

$$y_1,y'_1,\cdots,y_1^{(a_1-1)}$$
$$y_2,y'_2,\cdots,y_2^{(a_2-1)}$$
$$\vdots$$
$$y_n,y'_n,\cdots,y_n^{(a_n-1)}$$

要求作出满足条件

$$H^{(r)}(x_i)=y_i^{(r)}\quad(i=1,2,\cdots,n;r=0,1,\cdots,a_i-1)\tag{26}$$

的次数最低的多项式 $H(x)$.

埃尔米特曾研究过这种形式的内插法.

容易看出,所提出的问题有解,而且还是唯一的.实际上,令

$$P_i(x)=A_0^{(i)}+A_1^{(i)}(x-x_i)+\cdots+A_{a_i-1}^{(i)}(x-x_i)^{a_i-1}$$

并设

$$H(x)=P_1(x)+(x-x_1)^{a_1}P_2(x)+\cdots+$$
$$(x-x_1)^{a_1}(x-x_2)^{a_2}\cdots(x-x_{n-1})^{a_n-1}P_n(x) \quad (27)$$

因为$H(x)-P_1(x)$以x_1为a_1重根，故将(27)连续微分a_1-1次并在(27)及所得诸等式中令$x=x_1$，我们便求得多项式$P_1(x)$的全部系数. 在这之后，根据等式

$$\frac{H(x)-P_1(x)}{(x-x_1)^{a_1}}=P_2(x)+\cdots+(x-x_2)^{a_2}\cdots(x-x_{n-1})^{a_n-1}P_n(x)$$

用同样的方法我们便求得多项式$P_2(x)$的系数；其余类推. 最后，$H(x)$的所有系数便都确定了. 显然，$H(x)$的次数将不高于$m-1$，在这里$m=a_1+a_2+\cdots+a_n$；另一方面，次数不高于$m-1$的任何其他的多项式$M(x)$，都不会满足(26)中的全部条件，因为否则的话，差$H(x)-M(x)$便要有m个根(它们的重数要计算在内).

可以求出用所述条件来表示多项式$H(x)$的系数的公式，但是我们不就一般形式来考虑这个问题，而只限于下列三种特例：

Ⅰ. 设$a_1=a_2=\cdots=a_n=1$，则所述问题就化为构成拉格朗日内插多项式的问题；

Ⅱ. 设$n=1$，即只有一个结点，则泰勒多项式

$$H(x)=y_1+\frac{y'_1}{1!}(x-x_1)+\cdots+\frac{y_1^{(a_1-1)}}{(a_1-1)!}(x-x_1)^{a_1-1}$$

便是问题的解；

Ⅲ. 设$a_1=a_2=\cdots=a_n=2$，则问题的解可由公式

$$H(x)=\sum_{k=1}^{n}y_k\left[1-\frac{\omega''(x_k)}{\omega'(x_k)}(x-x_k)\right]l_k^2(x)+\sum_{k=1}^{n}y'_k(x-x_k)l_k^2(x) \quad (28)$$

给出，其中像以前一样

$$\omega(x)=(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n),\ l_k(x)=\frac{\omega(x)}{\omega'(x_k)(x-x_k)}$$

为了证明公式(28)，我们首先指出多项式$H(x)$的次数不高于$2n-1$；另一方面，容易证明

$$H(x_i)=y_i,H'(x_i)=y'_i \quad (i=1,2,\cdots,n) \quad (29)$$

实际上

$$l'_k(x)=\frac{\omega'(x)(x-x_k)-\omega(x)}{\omega'(x_k)(x-x_k)^2}$$

这就表示，根据洛必达法则

$$l'_k(x_k)=\lim_{x\to x_k}l'_k(x)=$$

$$\lim_{x\to x_k}\frac{\omega''(x)(x-x_k)+\omega'(x)-\omega'(x)}{2\omega'(x_k)(x-x_k)}=\frac{\omega''(x_k)}{2\omega'(x_k)}$$

所以多项式 $q_k(x)=l_k^2(x)$ 满足条件

$$q_k(x_i)=\begin{cases}0 & (i\neq k)\\ 1 & (i=k)\end{cases};q'_k(x_i)=\begin{cases}0 & (i\neq k)\\ \dfrac{\omega''(x_k)}{\omega'(x_k)} & (i=k)\end{cases}$$

从而显然可知，多项式

$$A(x)=\sum_{k=1}^{n}y_k\left[1-(x-x_k)\frac{\omega''(x_k)}{\omega'(x_k)}\right]q_k(x)$$

$$B(x)=\sum_{k=1}^{n}y'_k(x-x_k)q_k(x)$$

是这样的

$$A(x_i)=y_i;A'(x_i)=0$$
$$B(x_i)=0;B'(x_i)=y'_i$$

这和条件(29)是一样的.

以后我们将把公式(28)写成形式

$$H(x)=\sum_{k=1}^{n}y_kA_k(x)+\sum_{k=1}^{n}y'_kB_k(x) \tag{30}$$

其中系假定

$$\begin{cases}A_k(x)=\left[1-\dfrac{\omega''(x_k)}{\omega'(x_k)}(x-x_k)\right]l_k^2(x)\\ B_k(x)=(x-x_k)l_k^2(x)\end{cases} \tag{31}$$

回到一般的情形上来. 我们假定在某一闭区间 $[a,b]$ 上给定一个函数 $f(x)$，它具有 $m=a_1+a_2+\cdots+a_n$ 阶的有限导数，其中 $a_k\geqslant 1$.

设 $x_1,x_2,\cdots.x_n$ 为位于 $[a,b]$ 内的结点，并且

$$y_i^{(r)}=f^{(r)}(x_i)\quad(i=1,2,\cdots,n;r=0,1,\cdots,a_i-1)$$

我们根据条件(26)构成埃尔米特内插多项式 $H(x)$ 对取自 $[a,b]$ 而异于全部结点 x_i 的固定点 x 来研究差

$$f(x)-H(x)$$

设

$$Q(z)=(z-x_1)^{a_1}(z-x_2)^{a_2}\cdots(z-x_n)^{a_n}$$

我们引进函数

$$\varphi(z)=f(z)-H(z)-K\Omega(z)$$

其中

$$K=\frac{f(x)-H(x)}{\Omega(x)} \tag{32}$$

容易看出