精彩数学系列
JINGCAISHUXUEXILIE

导数与概率

DAOSHUYUGAILÜQIANTIQIAOJIE DAOSHUYUGAILÜQIANTIQIAOJIE

千题巧解

- 奇思妙解
- 专题突破
- 让数学变得如此生动

何 明 编著

高中数学必备

長春出版社

精彩数学系列

JINGCAISHUXUEXILIE

导数与概率

DAOSHUYUGAILÜQIANTIQIAOJIE

千题巧解

■何　明　编著

長春出版社

图书在版编目（CIP）数据
导数与概率千题巧解/何明编著．—长春：长春出版社，2007.7
（精彩数学系列）
ISBN 978－7－5445－0463－8

Ⅰ．导... Ⅱ．何... Ⅲ．数学课—高中—解题 Ⅳ．G634.605

中国版本图书馆CIP数据核字（2007）第075199号

责任编辑：杨爱萍
封面设计：郝 威
版式设计：王久慧

出版发行：长春出版社
发行部电话：0431－88561180
总编室电话：0431－88563443
读者服务部电话：0431－88561177
地 址：吉林省长春市建设街1377号
邮 编：130061
网 址：www.cccbs.net
制 版：吉林省久慧文化有限公司
印 刷：长春市新世纪印业有限公司
经 销：新华书店

开 本：880×1230毫米 1/32开本
字 数：180千字
印 张：6.125印张
版 次：2007年7月第1版
印 次：2007年7月第1次印刷
定 价：10.00元

前言

数学枯燥乏味吗？我不这样想。

我觉得数学生动、精彩。我在解数学题的时候常常被那种简洁的解法感动，陶醉在优美的逻辑推理中。

一个看起来并不复杂的问题，甚至，一个简单的选择题，因为思维的角度不同，往往会出现各种不同的解题方法；一个看上去陌生的问题，深思熟虑之后，把它化归到熟悉的题型中去，于是豁然开朗，于是内心充满了甜蜜。

是的，数学有它独特的魅力，这种魅力决不是轻而易举就能觉察与体验到的，而真正要享受这魅力带给我们的愉悦，必须付出艰辛和血汗。

我真诚地希望高中学生能从心底里喜爱数学，从而激发智慧和创造力，这也便是我倾其全力写作的本意。

《精彩数学》系列丛书能让你爱不释手吗？希望这巧妙的解法能让你在顿悟中不断进取，能让你的一生更加的精彩！

编者

目　录

CONTENS

导数与概率千题巧解

第一章 导数

1 导数的概念

双基提炼

1. 函数的平均变化率

已知函数 $y=f(x)$ 在点 $x=x_0$ 及其附近有定义，令 $\Delta x=x-x_0$，$\Delta y=y-y_0=f(x)-f(x_0)=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$. 则当 $\Delta x\neq 0$ 时，比值 $\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$，叫做函数 $y=f(x)$ 在 x_0 到 $x_0+\Delta x$ 之间的平均变化率，即函数 $y=f(x)$ 在区间 $[x_1,x_2]$ 上的平均变化率为 $\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$.

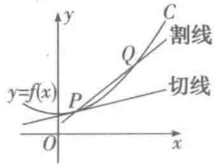
在函数 $y=f(x)$ 从 x_0 到 $x_0+\Delta x$ 的平均变化率中，Δx 是一个整体符号，而不是 Δ 与 x 相乘. 它表示相对于 x_0 的一个“增量”，其值可正、可负，但不能为零.

2. 曲线的切线

(1) 切线的概念

如图，设 Q 为曲线 C 上不同于 P 的一点，这时，直线 PQ 称为曲线 C 的割线. 当点 Q 沿曲线 C 向 P 运动时，割线 PQ 在点 P 附近越来越逼

近曲线 C. 当点 Q 无限趋近点 P 时,直线 PQ 最终就成为经过点 P 处最逼近曲线的直线 l,这条直线 l 也称为曲线在点 P 处的切线.



(2)切线的斜率

如上图,设 $P(x,f(x))$, $Q(x+\Delta x,f(x+\Delta x))$,

则割线 PQ 的斜率为 $k_{PQ}=\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{(x+\Delta x)-x}=\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.

当点 Q 沿曲线 C 无限逼近 P 时,即当 Δx 无限趋近于 0 时,$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$无限趋近于点 $P(x,f(x))$处的切线的斜率.

3. 瞬时速度和瞬时加速度

物体在某一时刻的速度称为瞬时速度.

设运动物体的位移 $s=s(t)$,如果当 Δt 无限趋近于 0 时,其平均变化率$\dfrac{s(t_0+\Delta t)-s(t_0)}{\Delta t}$无限趋近于一个常数,那么该常数称为物体在 $t=t_0$时的瞬时速度.

一个物体速度的平均变化率$\dfrac{v(t_0+\Delta t)-v(t_0)}{\Delta t}$,如果当 Δt 无限趋近于 0 时,无限趋近于一个常数,那么这个常数称为物体在 $t=t_0$ 时的瞬时加速度.

4. 导数

(1)函数在一点处的导数:

设函数 $y=f(x)$在区间(a,b)上有定义,$x_0\in(a,b)$,若 Δx 无限趋近于 0 时,$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$无限趋近于常数 A,则称该常数 A 为函数 $y=f(x)$在点 $x=x_0$ 处的导数,记作 $f'(x_0)$.

函数在一点处的导数 $f'(x_0)$是一个常数,不是变量.

(2)求函数 $y=f(x)$在 x_0 处导数的一般步骤:

①求函数的增量 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$;

②求平均变化率$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$;

③求导数,即当 $\Delta x\to 0$ 时,$\frac{\Delta y}{\Delta x}\to f'(x_0)$.

即函数 $y=f(x)$ 在 x_0 处导数.

(3)导数的几何意义

函数 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的导数就是曲线 $y=f(x)$ 在 $(x_0, f(x_0))$ 处的切线的斜率.

(4)导函数

对于函数 $y=f(x)$,当 $x=x_0$ 时,$f'(x_0)$ 是一个确定的数. 当 x 变化时,$f'(x)$ 便是 x 的一个函数,则称它为 $f(x)$ 的导函数(简称导数). $y=f(x)$ 的导函数有时也记作 y',即 $f'(x)$.

函数的导数,是针对某一区间内任意点 x 而言的. 函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内每一点都可导,是指对于区间 (a,b) 内每一个确定的值 x_0,都对应着一个确定的导数 $f'(x_0)$,根据函数的定义,在开区间 (a,b) 内就构成了一个新的函数,就是函数 $f(x)$ 的导函数 $f'(x)$.

函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的导数 $f'(x_0)$ 就是导函数 $f'(x)$ 在 $x=x_0$ 处的函数值,即 $f'(x_0)$,也可写成 $y'|_{x=x_0}$.

好 题 导 航

例1 试比较正弦函数 $y=\sin x$ 在 $x=0$ 和 $x=\frac{\pi}{2}$ 附近的平均变化率的大小.

[解析] 当自变量从 0 变到 Δx 时,函数的平均变化率为 $k_1=\frac{\sin\Delta x-\sin 0}{\Delta x}=\frac{\sin\Delta x}{\Delta x}$;

当自变量从 $\frac{\pi}{2}$ 变到 $\Delta x+\frac{\pi}{2}$ 时,函数的平均变化率为 $k_2=$

$$\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\Delta x\right)-\sin\frac{\pi}{2}}{\Delta x}=\frac{\cos\Delta x-1}{\Delta x}.$$

由于是求在 $x=0$ 和 $x=\frac{\pi}{2}$ 附近的平均变化率,可知 Δx 较小.

当 $\Delta x>0$ 时,$k_1>0$,$k_2<0$,此时有 $k_1>k_2$.

当 $\Delta x<0$ 时,
$$k_1-k_2=\frac{\sin\Delta x}{\Delta x}-\frac{\cos\Delta x-1}{\Delta x}=\frac{\sin\Delta x-\cos\Delta x+1}{\Delta x}=\frac{\sqrt{2}\sin\left(\Delta x-\frac{\pi}{4}\right)+1}{\Delta x}.$$

因为 $\Delta x<0$,所以 $\Delta x-\frac{\pi}{4}<-\frac{\pi}{4}$,从而 $\sin\left(\Delta x-\frac{\pi}{4}\right)<-\frac{\sqrt{2}}{2}$,

于是 $\sqrt{2}\sin\left(\Delta x-\frac{\pi}{4}\right)<-1$,即 $\sqrt{2}\sin\left(\Delta x-\frac{\pi}{4}\right)+1<0$,

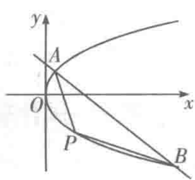
所以 $k_1-k_2>0$,即 $k_1>k_2$.

综上,正弦函数 $y=\sin x$ 在 $x=0$ 附近的平均变化率大于在 $x=\frac{\pi}{2}$ 附近的平均变化率.

[点评] (1)“附近”— Δx 较小;

(2)比较大小常用作差法(或作商法).

例2 如图,已知直线 $x+2y-4=0$ 与抛物线 $y^2=4x$ 相交于 A、B 两点,O 是坐标原点,在抛物线的弧 AOB 上是否存在一点 P,使 $\triangle PAB$ 的面积最大?若存在,求出 P 点的坐标;若不存在,请说明理由.



[解析] 直线 $x+2y-4=0$ 被抛物线 $y^2=4x$ 截得的线段长 $|AB|$ 一定为定值,于是 $\triangle PAB$ 的面积最大 $\Leftrightarrow$ 点 P 到直线 AB 的距离最大 $\Leftrightarrow$ 点 P 是抛物线的平行于 AB 的切线的切点.

[解] 设点 $P(x,y)$. 因为直线 AB 的斜率为负,所以,平行于 AB 的切线的切点在 x 轴下方.

在 x 轴下方的抛物线的方程又可写成 $y=-2\sqrt{x}$,现在求函数 $y=-2\sqrt{x}$ 的导数:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{-2\sqrt{x+\Delta x}-(-2\sqrt{x})}{\Delta x}$$

$$=\frac{-2[(x+\Delta x)-x]}{\Delta x[\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}]}$$

$$=-\frac{2}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}},$$

当 $\Delta x \to 0$ 时，$\frac{\Delta y}{\Delta x} \to -\frac{1}{\sqrt{x}}$，即 $y=-2\sqrt{x}$的导数是 $-\frac{1}{\sqrt{x}}$.

令 $-\frac{1}{\sqrt{x}}=-\frac{1}{2}$，得 $x=4$. 得 $P(4,-4)$.

故存在点 $P(4,-4)$，使 $\triangle PAB$ 的面积最大.

[点评] 解决问题的关键是使用了导数，将所求问题巧妙地转化为求抛物线的平行于 AB 的切线的切点问题.

例 3 求证：过点 $P(2, 2)$ 作曲线 $S: y=3x-x^3$ 的切线有 3 条.

[分析] 显然，点 $P(2, 2)$ 不在曲线 $S: y=3x-x^3$ 上，否则切线不会有 3 条. 那如何利用导数证明？设切点！

[解] $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{3(x+\Delta x)-(x+\Delta x)^3-3x+x^3}{\Delta x}$

$$=3-3x^2-3x\Delta x-(\Delta x)^2,$$

当 $\Delta x \to 0$ 时，$\frac{\Delta y}{\Delta x} \to 3-3x^2$. 即 $y'=3-3x^2$.

于是过曲线上一点 $(x_0, 3x_0-x_0^{\ 3})$ 的切线方程为 $y=(3-3x_0^{\ 2})(x-x_0)+3x_0-x_0^{\ 3}$，切线应过 $P(2,2)$ 点，故 $2=(3-3x_0^{\ 2})(2-x_0)+3x_0-x_0^{\ 3}$，即 $x_0^{\ 3}-3x_0^{\ 3}+2=0$，解得 $x_0=1$ 或 $x_0=1+\sqrt{3}$或 $x_0=1-\sqrt{3}$.

故应有 3 条切线.

[点评] “求过某一点的切线方程”这类问题，应首先考察该点是否在曲线上. 若在曲线上，直接利用导数求切线的斜率；若不在曲线上，设出切点，再利用导数求解.

智 力 冲 浪

1. 在平均变化率等概念中,自变量的增量 Δx 满足 ( )

A. $\Delta x>0$ B. $\Delta x<0$ C. $\Delta x\neq 0$ D. $\Delta x=0$

2. 当自变量从 x_0 变到 x_1 时,函数值的增量与相应自变量的增量之比是函数 ( )

A. 在区间$[x_0,x_1]$上的平均变化率

B. 在 x_0 处的导数

C. 在 x_1 处的导数

D. 在区间$[x_0,x_1]$上的导数

3. 在高台跳水运动中,高度 h 是关于时间 t 的函数. 下面是描述运动员在 t_0 时刻的瞬时速度的几种方法:① $\frac{h}{t}$;②$\frac{\Delta h}{\Delta t}$;③$h'(t_0)$;④当 Δt 无限趋近于 0 时,$\frac{\Delta h}{\Delta t}$无限趋近于常数 A.

其中正确的个数是 ( )

A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

4. 设函数 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 处可导,则当 h 无限趋近于 0 时,$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$的结果 ( )

A. 与 x_0,h 都有关 B. 仅与 x_0 有关,而与 h 无关

C. 仅与 h 有关,而与 x_0 无关 D. 与 x_0,h 都无关

5. 在曲线 $y=2x^2-1$ 的图象上取一点$(1,1)$及其临近一点$(1+\Delta x,1+\Delta y)$,则$\frac{\Delta y}{\Delta x}$等于 ( )

A. $4\Delta x+2(\Delta x)^2$ B. $4+2\Delta x$

C. $4\Delta x+(\Delta x)^2$ D. $4+\Delta x$

6. 与直线 $2x-y+4=0$ 平行的抛物线 $y=x^2$ 的切线方程是 ( )

A. $2x-y+3=0$ B. $2x-y-3=0$

C. $2x-y+1=0$ D. $2x-y-1=0$

7. 对于函数 $y=x^2$,其导数等于原来函数值的点是________.

8. 设 $f(x_0)=0$,$f'(x_0)=4$,则当 Δx 无限趋近于 0 时,$\frac{f(x_0+\Delta x)}{\Delta x}$ 无限趋近于________.

9. 已知曲线 $y=\frac{1}{3}x^3+\frac{4}{3}$,则过点 $P(2,4)$ 的切线方程为________.

10. 曲线 $y=x^3$ 在点 $(a, a^3)(a\neq 0)$ 处的切线与 x 轴、直线 $x=a$ 所围成的三角形的面积为 $\frac{1}{6}$,则 $a=$________.

11. 在曲线 $y=x^2$ 上过哪一点的切线满足:

(1)平行于直线 $y=4x-5$;

(2)垂直于直线 $2x-6y+5=0$;

(3)倾斜角为 135°.

12. 已知直线 l_1 为曲线 $y=x^2+x-2$ 在点 $(1,0)$ 处的切线,l_2 为该曲线的另一条切线,且 $l_1\perp l_2$.

(1)求直线 l_2 的方程;

(2)求由直线 l_1、l_2 和 x 轴所围成的三角形的面积.

冲浪指南

1. C.

2. A.[提示] 由平均变化率的定义可得.

3. B.[提示] ③、④正确.

4. B.[提示] h 无限趋近于 0 时,$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ 的结果为 $f'(x_0)$. 本题中的 h 即为定义中的 Δx.

5. B.[提示] $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{2(1+\Delta x)^2-1-2\times 1^2+1}{\Delta x}$

$$=\frac{4\Delta x+2(\Delta x)^2}{\Delta x}=4+2\Delta x.$$

6. D. [提示]　设切点为$(x_0,x_0^{\ 2})$，

$\Delta y=(x_0+\Delta x)^2-x_0^{\ 2}=2\Delta x\cdot x_0+(\Delta x)^2$，

当$\Delta x\to 0$时，$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=2x_0+\Delta x\to 2x_0$，令$2x_0=2$，得$x_0=1$，

所以切点为$(1,1)$，

故所求直线方程是$y-1=2(x-1)$，即$2x-y-1=0$.

7. $(0,0)$和$(2,4)$.

[提示]　由导数定义易知$y'=2x$，令$2x=x^2$，解之得$x=0$或$x=2$.

8. 4. [提示]　$\dfrac{f(x_0+\Delta x)}{\Delta x}=\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=f'(x_0)=4$.

9. $4x-y-4=0$.

[提示]　点$P(2,4)$在曲线$\dfrac{1}{3}x^3+\dfrac{4}{3}$上. 由定义可求$f'(2)=4$，即切线的斜率为4. 再由点斜式即可写出直线方程.

10. ± 1. [提示]　令$f(a)=a^3$，则由导数定义可得$f'(a)=3a^2$，

所以曲线在点$(a,\ a^3)$处的切线方程为$y-a^3=3a^2(x-a)$，切线与x轴的交点为$\left(\dfrac{2}{3}a,0\right)$.

所以三角形的面积为$\dfrac{1}{2}\left|a-\dfrac{2}{3}a\right|\cdot|a^3|=\dfrac{1}{6}$，得$a=\pm 1$.

11. $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{(x+\Delta x)^2-x^2}{\Delta x}=2x+\Delta x$. 当$\Delta x\to 0$时，$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}\to 2x$，

于是$y'=2x$.

设$P(x_0,y_0)$是满足条件的点.

(1)因为切线与直线$y=4x-5$　平行，

所以$2x_0=4$，$x_0=2$，$y_0=4$，即$P(2,4)$.

(2)因为切线与直线$2x-6y+5=0$垂直，

所以$2x_0\cdot\dfrac{1}{3}=-1$，得$x_0=-\dfrac{3}{2}$，$y_0=\dfrac{9}{4}$，即$P\left(-\dfrac{3}{2},\dfrac{9}{4}\right)$.

(3)因为切线的倾斜角为135°，所以其斜率为-1，

即$2x_0=-1$，得$x_0=-\dfrac{1}{2}$，$y_0=\dfrac{1}{4}$，即$P\left(-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{4}\right)$.

12. (1) $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{(x+\Delta x)^2+(x+\Delta x)-2-(x^2+x-2)}{\Delta x}=2x+1+\Delta x$,

易知 $y'=2x+1$.

于是 $y'|_{x=1}=3$,所以直线 l_1 的方程为 $y=3(x-1)$,即 $y=3x-3$.

设切线 l_2 的切点为 (b,b^2+b-2),其斜率为 $2b+1$.

因为 $l_1\perp l_2$,所以 $3(2b+1)=-1$,

解得 $b=-\frac{2}{3}$. 于是切线 l_2 的方程 $y=-\frac{1}{3}x-\frac{22}{9}$.

(2)解方程组 $\begin{cases} y=3x-3, \\ y=-\frac{1}{3}x-\frac{22}{9}, \end{cases}$

解得 $x=\frac{1}{6}$, $y=-\frac{5}{2}$.

又直线 l_1、l_2 与 x 轴交点坐标分别为 $(1,0)$、$\left(-\frac{22}{3},0\right)$,

所以所求三角形的面积为 $S=\frac{1}{2}\cdot\left|-\frac{5}{2}\right|\cdot\left|1+\frac{22}{3}\right|=\frac{125}{12}$.

2 导数的运算

双基提炼

1. 求导公式

函数	常值函数	幂函数	三角函数	指数函数	对数函数
导函数	$C'=0$（C 是常数）	$(x^{a})'=ax^{a-1}$ $(a\in\mathbf{Q})$	$(\sin x)'=\cos x$，$(\cos x)'=-\sin x$	$(e^{x})'=e^{x}$，$(a^{x})'=a^{x}\ln a$ $(a>0$ 且 $a\neq1)$	$(\ln x)'=\frac{1}{x}$，$(\log_a x)'=\frac{1}{x\ln a}$ $(a>0$ 且 $a\neq1)$

在以上导数公式中，指数函数、对数函数的导数是两类较难的导数. 要注意公式中的底数，还要注意 $\log_a x$ 与 a^x 的导数的系数.

2. 导数的四则运算法则

若函数 $u(x)$ 与 $v(x)$ 都可导，则

(1) $[u(x)\pm v(x)]'=u'(x)\pm v'(x)$；

(2) $[u(x)\cdot v(x)]'=u'(x)v(x)+u(x)v'(x)$；

(3) $\left[\frac{u(x)}{v(x)}\right]'=\frac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{[v(x)]^2}$.

法则(1)可以推广到任意有限个函数，

即 $[f_1(x)+f_2(x)+\cdots+f_n(x)]'=f'_1(x)+f'_2(x)+\cdots+f'_n(x)$.

法则(2)的特殊情况：$[Cf(x)]'=Cf'(x)$（C 是常数）.

以上求导法则中，商的求导法则是难点，也是易错点，要注意公式中的符号.

3. 复合函数的求导法则

如果 y 是 u 的函数，而 u 又是 x 的函数，即 $y=f(u)$，$u=g(x)$，那

么 y 关于 x 的函数 $y=f[g(x)]$ 叫做函数 $y=f(u)$ 和 $u=g(x)$ 的复合函数，u 叫做中间变量.

要注意，函数 $u=g(x)$ 的值域与函数 $y=f(u)$ 的定义域的交集应非空，否则就不能组成复合函数. 复合函数不是一类新函数，而是函数的一种表示方法.

复合函数 $y=f[g(x)]$ 的导数与函数 $y=f(u)$，$u=g(x)$ 的导数间的关系是 $y'_x=y'_u\cdot u'_x$.

复合函数的求导法则也叫链导法则，过程就像锁链一样环环相扣，关键是搞清锁链的顺序. 要像"剥苞米皮"一样由外层向内层逐层求导，每次求导都是针对最外层，直至求到最里层能直接使用基本求导公式为止.

求复合函数的导数，关键在于分清函数的复合关系，合理选定中间变量，明确求导过程中是哪个变量对哪个变量求导.

求函数的导数，一般要先化简，再求导. 化简时，要注意变形的等价性；求导时，不但要重视求导法则的应用，而且要特别注意求导法则对求导的制约.

好 题 导 航

例 1 设函数 $f(x)=\dfrac{x-a}{x-1}$，集合 $M=\{x|f(x)<0\}$，$P=\{x|f'(x)>0\}$，若 $M\subsetneqq P$，则实数 a 的取值范围是 ( )

A. $(-\infty,1)$ B. $(0,1)$

C. $(1,+\infty)$ D. $[1,+\infty)$

[解] $f'(x)=\dfrac{x-1-(x-a)}{(x-1)^2}=\dfrac{a-1}{(x-1)^2}$.

依题意，$P\neq\varnothing$（否则 $M\subsetneqq P$ 不成立）.

于是 $a>1$，且 $P=\{x|f'(x)>0\}\Leftrightarrow\{x|x\neq1\}$，

于是 $M=\{x|f(x)<0\}=\{x|1<x<a\}$.

故实数 a 的取值范围是 $(1,+\infty)$，选 C.

［点评］ 看到$f(x)$的解析式和集合 M,你是不是首先想到对 a 作分类讨论？其实大可不别！挖掘出隐含条件——集合 P 非空,你就会豁然开朗.

例 2 设函数$f(x)=\cos(\sqrt{3}x+\varphi)(0<\varphi<\pi)$. 若$f(x)+f'(x)$是奇函数,则 $\varphi=$________.

［解］ $f'(x)=-\sin(\sqrt{3}x+\varphi)\cdot(\sqrt{3}x+\varphi)'$

$$=-\sqrt{3}\sin(\sqrt{3}x+\varphi).$$

于是 $h(x)=f(x)+f'(x)$

$$=2\left[\cos\frac{\pi}{3}\cos(\sqrt{3}x+\varphi)\sin\frac{\pi}{3}\sin(\sqrt{3}x+\varphi)\right]$$

$$=2\cos\left(\sqrt{3}x+\varphi+\frac{\pi}{3}\right).$$

要使 $h(x)$为奇函数,需且仅需 $\varphi+\dfrac{\pi}{3}=k\pi+\dfrac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$,

即 $\varphi=k\pi+\dfrac{\pi}{6}(k\in\mathbf{Z})$.

又 $0<\varphi<\pi$,所以 k 只能取 0,从而 $\varphi=\dfrac{\pi}{6}$.

［点评］ 求出导函数,再将$f(x)+f'(x)$化为一个角的三角函数,就会觉得在知识点交汇处命制的试题并不“可怕”.

例 3 设$f_0(x)=\sin x$, $f_1(x)=f'_0(x)$, $f_2(x)=f'_1(x)$, $\cdots$, $f_{n+1}=f'_n(x)$, $n\in\mathbf{N}$,则$f_{2007}(x)$等于 ( )

A. $\sin x$　　B. $-\sin x$　　C. $\cos x$　　D. $-\cos x$

［解析］ $f_0(x)=\sin x$, $f_1(x)=f'_0(x)=\cos x$, $f_2(x)=f'_1(x)=-\sin x$, $f_3(x)=f'_2(x)=-\cos x$, $f_4(x)=f'_3(x)=\sin x$, $\cdots$.

由此继续求导下去,发现:$f_{n+4}(x)=f_n(x)(n\in\mathbf{N})$.

故 $f_{2007}(x)=f_{4\times501+3}(x)=f_3(x)=-\cos x$. 选 D.

［点评］ “年份”题,数据较大,大多与“周期”有关.

例 4 求函数 $y=x\cdot\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}(0<x<1)$的导数.

［解］ 因为 $0<x<1$,所以 $y>0$.