

WILEY

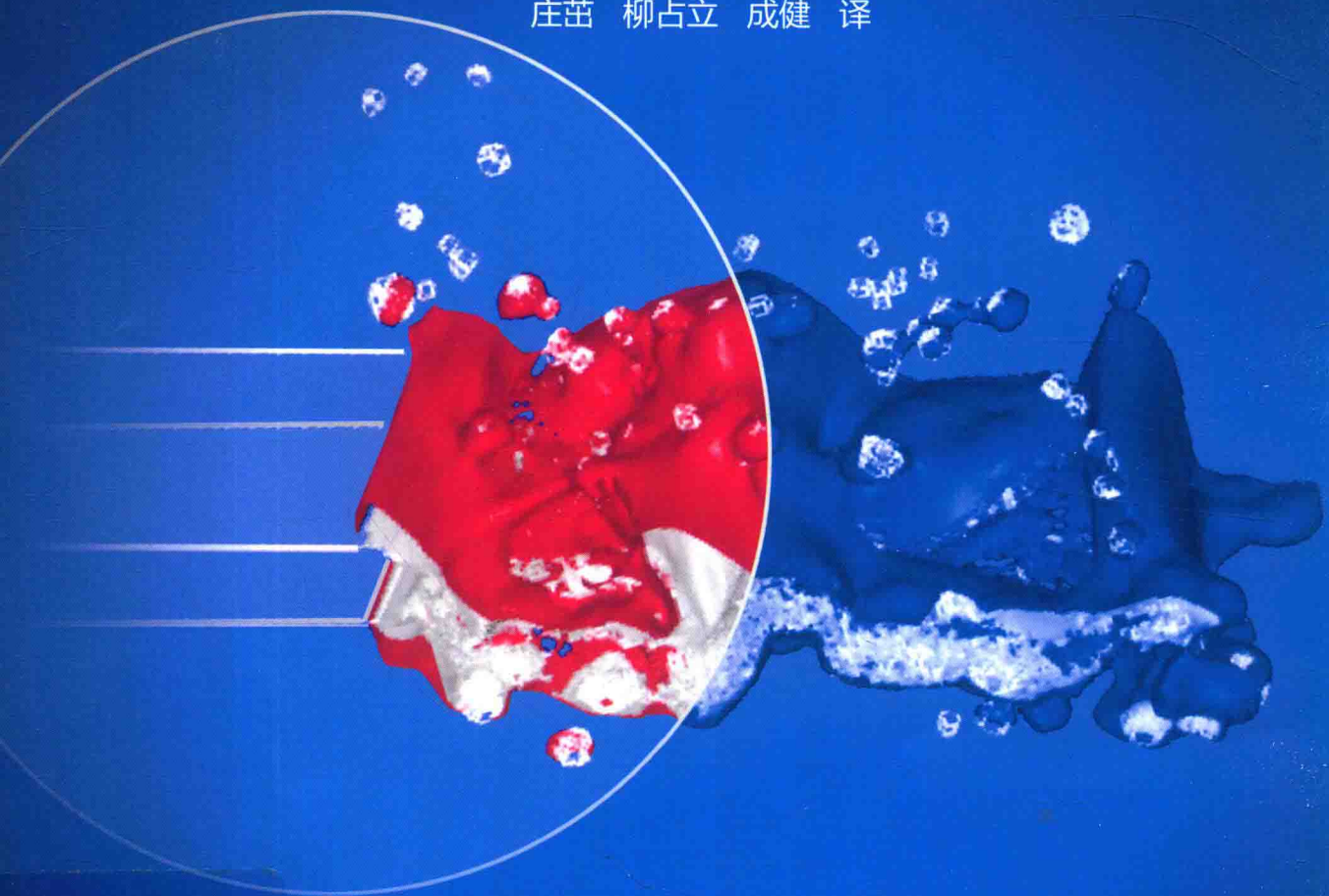
Nonlinear Finite Elements for Continua and Structures

(Second Edition)

连续体和结构的非线性有限元 (第2版)

[美] Ted Belytschko Wing Kam Liu Brian Moran Khalil I. Elkhodary 著

庄茁 柳占立 成健 译



清华大学出版社



Nonlinear Finite Elements for Continua and Structures

(Second Edition)

连续体和结构的非线性有限元 (第2版)

Ted Belytschko
[美] Wing Kam Liu 著
Brian Moran
Khalil I. Elkhodary

庄茁 柳占立 成健 译

清华大学出版社
北京

Nonlinear Finite Elements for Continua and Structures/Ted Belytschko, Wing Kam Liu, Brian Moran, Khalil I. Elkhodary. —Second Edition.

ISBN: 978-1-118-63270-3

Copyright © 2014 by John Wiley & Sons Ltd.

All rights reserved. No part of this publication may be reproduced, stored in a retrieval system, or transmitted, in any form or by any means, electronic, mechanical, photocopying, recording or otherwise, except as permitted by the UK Copyright, Designs and Patents Act 1988, without the prior permission of the publisher, without the permission in writing of the publisher.

本书中文简体字版由 John Wiley & Sons 出版公司授权清华大学出版社出版发行。未经出版者书面许可, 任何人不得以任何方式复制或抄袭本书的任何部分。

北京市版权局著作权合同登记号: 图字 01-2001-1565 号

本书封面贴有 John WILEY 防伪标签, 无标签者不得销售。

版权所有, 侵权必究。侵权举报电话: 010-62782989 13701121933

图书在版编目(CIP)数据

连续体和结构的非线性有限元/(美)泰德·彼莱奇科(Ted Belytschko)等著; 庄茁, 柳占立, 成健译.
—2 版. —北京: 清华大学出版社, 2016

书名原文: Nonlinear Finite Elements for Continua and Structures, 2nd

ISBN 978-7-302-44722-1

I. ①连… II. ①泰… ②庄… ③柳… ④成… III. ①有限元法—应用—非线性结构分析
IV. ①O342

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2016)第 185428 号

责任编辑: 佟丽霞

封面设计: 常雪影

责任校对: 刘玉霞

责任印制: 沈 露

出版发行: 清华大学出版社

网 址: <http://www.tup.com.cn>, <http://www.wqbook.com>

地 址: 北京清华大学学研大厦 A 座 邮 编: 100084

社总机: 010-62770175 邮 购: 010-62786544

投稿与读者服务: 010-62776969, c-service@tup.tsinghua.edu.cn

质量反馈: 010-62772015, zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn

印装者: 北京密云胶印厂

经 销: 全国新华书店

开 本: 185mm×260mm 印 张: 38.75 字 数: 943 千字

版 次: 2002 年 12 月第 1 版 2016 年 11 月第 2 版 印 次: 2016 年 11 月第 1 次印刷

印 数: 1~2500

定 价: 78.00 元

产品编号: 060326-01

译者前言

20世纪90年代初,庄苗在爱尔兰国立大学都柏林大学院攻读博士学位期间,从事天然气管道动态断裂力学的研究,论文工作主要参考了Ted Belytschko教授关于非线性壳体理论和有限元显式积分方法的文章,受益良多,对Belytschko教授十分敬仰。2002年,庄苗教授将本书的第1版翻译成中文,清华大学出版社陆续印刷7000多册,在国内的非线性有限元教学、科研和工程应用中,它成为几乎影响一代人的专著。

2004年,在清华大学举办了首届全国非线性有限元高级讲习班,Belytschko教授应邀担任主讲。此后的讲习班每年暑期一届,由庄苗教授担任主讲,2012年之后,柳占立副教授和由小川副教授加盟主讲,成为国内非线性有限元讲学的品牌课程。讲习班至今已经举办了十一届,培养了千余名计算力学工作者。

十几年来,Belytschko教授和Wing Kam Liu教授分别多次应邀到清华大学访问讲学,我们也多次应邀到西北大学学术交流,选送博士生和博士后去学习,建立了西北大学与清华大学的计算力学交流机制,柳占立博士于2009—2012年在西北大学师从Belytschko教授做博士后。2012年,庄苗和柳占立等出版了中文版《扩展有限单元法》专著,得到Belytschko教授的赞许和鼓励,并于2014年在Elsevier/Tsinghua University Press出版了英文专著《Extended Finite Element Method》。

2014年,本书的第2版问世,我们对Belytschko教授和W. K. Liu教授承诺将其再次翻译成中文出版,Brian Moran教授到清华大学访问,在送给庄苗教授的新书扉页上用中文写下“感谢”二字。以书会友,凝聚了一代中外学者的友谊。也恰是在这一年,Belytschko教授因病辞世,使我们悲痛不已。

2016年,我们完成了全书的翻译,将其奉献给中文读者。在翻译过程中,我们的博士研究生给予了很大帮助,王成禹、林鹏和刘凤仙分别翻译了第11章、第12章和第13章的初稿,成健对全书做了系统的编辑整理。感谢清华大学出版社的石磊编审和佟丽霞副编审对我们始终不渝的支持和帮助。

愿以此书的中文版献给Ted Belytschko教授,寄托我们深深的思念和敬意。

庄苗 柳占立 成健

2016年春节于清华园

第 1 版译者前言

本书在 2000 年夏季刚刚面世就深深地吸引了我,以至于我渴望以我和我的研究生们的共同努力,将此书译成中文,介绍给中国及世界其他地区的华人学者。

非线性力学问题(材料、几何和接触)是力学发展的前沿课题,非线性有限元是计算力学的重要组成部分。这是基于仿真的科学与工程的重要工具。由于计算机仿真技术的发展,使我们能够瞬抚四海和纵览古今,而有限元及其计算机软件的作用正是我们到达彼岸的工具和桥梁。

本书内容凝聚了有限元的先行者和本书作者近半个世纪的研究成果,荟萃了数百篇文献的精华,某些真知灼见绝非一日之功,日积月累的宝贵经验恰有水滴石穿之感。

有限元是有限的,而学术研究是无限的;科学家是有国籍的,而科学是没有国界的。历经矢志不渝的努力和艰辛严谨的翻译工作,终于能够将此书中文版奉献给广大的读者,使我们能够分享固体力学研究的共同成果,提高相关领域的研究水平。

参加本书翻译工作的有:庄茁(序言、第 1 章、第 5 章、附录和索引),梁明刚(第 2 章、第 9 章和第 10 章),卢剑峰(第 3 章和第 4 章),赵慧娟(第 6 章和第 8 章),范成业(第 7 章)。庄茁负责对每一章的斟酌、校对和复译,以及全书的审核,同时更正了多处在原著中出现的笔误并且增补了个别遗漏。

感谢清华大学工程力学系黄克智院士,王勖成教授和陆明万教授对本书出版所给予的关注和与译者的某些有益讨论,帮助译者澄清了某些学术概念。感谢清华大学出版社的出版资助,感谢金文织编审和张秋玲编审的大力支持。由于本人水平所限,在对原著的理解上难免有不当之处,敬请读者谅解。

庄茁 教授

2002 年春节于清华园

Preface for Chinese version

We are very pleased that our book “Nonlinear Finite Elements for Continua and Structures” is being made available to our colleagues in Asia through this translation. We hope those involved in research, teaching and study in computational mechanics as well as those applying nonlinear finite elements to technological advances in civil, mechanical, aerospace, and manufacturing engineering, will find the book useful.

We are grateful to Dr. Zhuang and his graduate students at Tsinghua University, Beijing, for carrying out the translation. We are acquainted with Dr. Zhuang and share many research interests. We are pleased to be formally associated with him and with Tsinghua University through this translation.

Ted Belytschko

Wing Kam Liu

Brian Moran

Evanston, IL USA, July 2001

序言译文

我们非常高兴地看到,通过本书的翻译,中文版《连续体和结构的非线性有限元》一书即将奉献给我们的亚洲同事。我们希望那些在计算力学领域中从事研究、教学 and 学习的学者,以及那些在土木、机械、航天和制造工业中应用非线性有限元于先进技术的工程师们,将会发现本书的用途。

我们非常感谢庄茁博士和他的研究生们在北京清华大学完成了本书的翻译工作。我们将与庄茁博士保持联系以共同分享许多研究的兴趣。通过本书的翻译,我们为与他本人和与清华大学建立的正式联系感到非常高兴。

Ted Belytschko

Wing Kam Liu

Brian Moran

Evanston, IL USA

July 2001

前言译文

本书的目的是全面介绍关于非线性有限元分析的理论和方法。对于有限元方法在固体力学、材料力学和结构力学应用中各类感兴趣的主要问题,我们关注离散方程的公式和求解。首先介绍的核心题目包括:一维和多维连续体的有限元离散化;非线性材料和大变形的本构方程公式;离散方程的求解过程,包括数值和物理的非稳定性问题。也展示了一些特殊的应用,包括:处理结构和接触-碰撞的问题;阐述弱和强不连续,乃至演化到固体失效的问题;材料非线性的建模机理,以及源于微结构和多尺度的先进处理方法。这些题目关系到工业和研究的应用,对于从事非线性有限元实践、研究和教学的读者,它们是一些很重要的题目。

本书具有力学特点而不是数学风格。尽管它包含了数值方法的稳定性和相关的偏微分方程分析,但目的却是讲解有限元分析的方法及其解答和方法的性能。没有考虑诸如收敛性和解答数学性质的证明题目。

在离散方程的公式中,我们从基于系统的力学控制方程开始,建立弱形式,并且应用它推导离散方程。在工业过程和研究的仿真中,具有大变形的 Lagrangian、任意的 Lagrangian 和 Eulerian 网格问题更加普遍,这些是仅用 Lagrangian 网格不能处理的问题,我们将建立它们的弱形式和离散方程。全面地阐述了更新的 Lagrangian 和完全的 Lagrangian 算法。

对方程的基本理解需要实质性地熟悉连续介质力学,第 3 章总结了连续介质力学中与本书内容相关的题目。这一章开始于强调转动运动的基本描述,伴随它们之间的转换,描述了应变和应力的度量,后来生成为前推和后拉运算。在称为 Eulerian 和 Lagrangian 描述中,展示了基本的守恒定律,并介绍了客观性(常称为框架不变性)。

第 4 章描述了关于 Lagrangian 网络的离散方程公式。我们开始于建立动量平衡的弱形式,并应用它们建立离散方程。全面地阐述了完全的 Lagrangian 格式和更新的 Lagrangian 格式,并且讨论了在两种格式之间进行转换的方法和算法。给出了在二维和三维中建立各种单元的例子。

第 5 章讨论了本构方程,特别是强调与材料非线性和大变形方面有关的材料模型。

第 6 章描述了求解过程和稳定性的分析。对于瞬时过程和求解,描述了显式和隐式积分程序;考虑了平衡问题的连续性过程。建立了关于构造 Newton 方程所需要的 Newton

方法和线性化过程。在非线性问题的求解中,数值过程和物理过程的稳定性是至关重要的。因此,为了确定解答和数值过程的稳定性,总结和运用了稳定性的理论,并且考虑了几何和材料的稳定性。

第7章涉及任意的 Lagrangian Eulerian 方法。这一章也提供了关于 Eulerian 分析的工具。描述了这类网格所需要的数值技术,诸如迎风方法和 SUPG 公式。

第8章涉及的是单元技术,在有约束介质的问题中,讨论了单元的成功设计所需要的特殊技术。重点是解决不可压缩材料的问题,而描述的技术是在一般的上下文中。另外,本章也描述了一点积分单元和沙漏控制。

第9章关注于结构单元,特别是壳和梁单元;没有单独地对待板单元,因为它们是特殊的壳。对于非线性分析,我们强调基于连续体的结构公式,因为它们更容易被掌握而且得到了更广泛的应用。细心地学习各种假设,并建立基于连续体的梁和壳的公式。由于稍微修改连续单元就可以建立基于连续体的单元,即这一章的大部分内容主要依赖于前面的章节。因此,本章仅仅是简单地讨论了诸如线性化和材料模型的题目。

第10章描述了接触-碰撞。我们将接触-碰撞视为一个变分不等式,所以在离散方程中满足合适的接触不等式。描述了基于位移和速度的公式。我们关注的是接触-碰撞的非平滑特性及其对求解过程和仿真的影响。

第11章涵盖了强和弱非连续性的建模。作为历史性的概述,回顾了有限元的经典方法。本章关注应用扩展有限元方法(XFEM),并采用非一致性网格模拟非连续体。对于强间断,重点是模拟断裂,并扩展到其他问题。对于弱间断,重点是模拟材料界面,所展示的内容很容易扩展到其他弱间断。我们的讨论从一维公式开始,然后拓展到多维,包括 XFEM 的编程和积分,并简要综述了在 XFEM 中采用的水平集方法,最后给出了算例。

第12章介绍了材料微观结构在定义材料非线性中的作用,重点讨论了多尺度连续理论(multiresolution continuum theory),即关于非均质材料大变形的一种多尺度力学理论。其目的在于联系固体力学与材料科学。该理论的发展源自变分原理和有限元建模的离散化。本章讨论了代表性体积单元(RVE)在发展基于多尺度的本构公式及其在多级连续理论框架中的作用。

作为非线性材料基本模型的一个例子,第13章讨论了单晶体的代表性体积单元的有限元建模。从材料科学的观点,通过非线性本构的算法建立了立方和非立方的晶格描述与位错密度理论的联系,由此在连续介质层面掌控了晶体材料的非均匀变形。

本书是为机械工程、土木工程、应用数学和工程力学专业的低年级研究生学习程序编写的。本书假设某些读者熟悉有限元方法,诸如学过一个学期课程或者4~5周的一大段课程。学生必须熟悉形函数、刚度和力的装配;具有一些变分或者能量方法的背景是有帮助的。此外,学生必须具有某些关于材料力学和连续介质力学的知识,基本上熟悉指标标记和矩阵标记。

大多数教师将选择部分而不是本书的全部内容讲解,如果选择全部内容讲解,将需要一年的时间。我们的目的是包括全面的素材以便适合许多教师的需要和偏爱。此外,在从事文献阅读之前,我们为感兴趣的学生提供了附加的材料,即关于研究背景的阅读资料。

短期课程,诸如一个10周季度或者16周学期,需要对材料进行明智的选择,这取决于教师的目的和感觉。本书展示的大部分材料是完全的 Lagrangian 和更新的 Lagrangian 公

式。因此,一堂概论课可以关注从第 2 章到第 4 章的更新的 Lagrangian 观点,选择从第 5 章到第 6 章的题目,使学生熟悉材料模型和求解过程。某些教师可能选择越过第 2 章的一维模型,留下它作为必要的阅读。通过简单地证明在第 4 章中的转换,则可以引入完全的 Lagrangian 格式。由强调完全的 Lagrangian 格式,可以设计类似的课程。

在全书中,我们尽量采用了统一的风格和标记,这是非常重要的,因为对于学生,在标记和格式上的剧烈变化常常妨碍理解。有时在一个特殊领域的文献中出现常用的标记,可能会引起偏差,我们希望表达的一致性将有助于学生。

对于本书的第 2 版,我们提供了求解手册,包括书中的全部练习的解答,也包括描述计算问题的 MATLAB 和/或 FORTRAN 程序。

我们感谢许多朋友、同事和从前的学生们,他们阅读了本书初稿的章节,并且提出了许多建议、反馈和修改,特别是:

Zhanli Liu, Tsinghua University
Zhuo Zhuang, Tsinghua University
Danial Faghihi, University of Texas at Austin
J. S. Chen, University of Iowa
John Dolbow, Duke University
Thomas J. R. Hughes, Stanford University
Shaofan Li, Northwestern University
Arif Masud, University of Illinois at Chicago
Nicolas Moës, Northwestern University
Katerina Papoulia, Cornell University
Patrick Smolinski, University of Pittsburgh
Natarajan Sukumar, Northwestern University
Henry Stolarski, University of Minnesota
Ala Tabiel, University of Cincinnati

我们也将感谢我们的学生: Sheng Peng, Jifeng Zhao, Miguel Bessa, John Moore, Patrick Lea, Zulfiqar Ali, Debbie Burton, Hao Chen, Yong Guo, Dong Qian, Michael Singer, Pritpal Singh, Gregory Wagner, Shaoping Xiao 和 Lucy Zhang, 他们帮助准备图表,做了打字和大量的校对工作。当然,任何遗漏的错误是作者的责任。

此外,我们特别感谢 Shaofan Li 和 Yong Guo, 他们贡献了若干练习和算例。

Ted Belytschko, Wing Kam Liu,
Northwestern University, USA

Brian Moran,
King Abdullah University of Science and Technology, KSA

Khalil I. Elkhodary
The American University in Cairo, Egypt

目录

1 绪论	1
1.1 在设计中应用非线性有限元	1
1.2 非线性有限元的有关著作和简要历史	3
1.3 标记方法	6
1.4 网格描述	7
1.5 偏微分方程的分类	10
1.6 练习	14
2 一维 Lagrangian 和 Eulerian 有限元	15
2.1 引言	15
2.2 完全的 Lagrangian 格式的控制方程	16
2.3 完全的 Lagrangian 格式的弱形式	21
2.4 完全的 Lagrangian 格式的有限元离散	25
2.5 单元和总体矩阵	28
2.6 更新的 Lagrangian 格式的控制方程	36
2.7 更新的 Lagrangian 格式的弱形式	38
2.8 更新的 Lagrangian 格式的单元方程	39
2.9 Eulerian 格式的控制方程	48
2.10 Eulerian 网格方程的弱形式	48
2.11 有限元方程	50
2.12 求解方法	52
2.13 小结	53
2.14 练习	54

3 连续介质力学	56
3.1 引言	56
3.2 变形和运动	57
3.3 应变度量	69
3.4 应力度量	75
3.5 守恒方程	81
3.6 Lagrangian 守恒方程	89
3.7 极分解和框架不变性	93
3.8 练习	103
4 Lagrangian 网格	106
4.1 引言	106
4.2 控制方程	107
4.3 弱形式:虚功率原理	109
4.4 更新的 Lagrangian 有限元离散	114
4.5 编制程序	121
4.6 旋转公式	139
4.7 完全的 Lagrangian 格式	145
4.8 完全的 Lagrangian 弱形式	148
4.9 有限元半离散化	149
4.10 练习	160
5 本构模型	162
5.1 引言	162
5.2 应力-应变曲线	163
5.3 一维弹性	166
5.4 非线性弹性	169
5.5 一维塑性	181
5.6 多轴塑性	186
5.7 超弹-塑性模型	199
5.8 粘弹性	206
5.9 应力更新算法	208
5.10 连续介质力学和本构模型	221
5.11 练习	231
6 求解方法和稳定性	232
6.1 引言	232
6.2 显式方法	233
6.3 平衡解答和隐式时间积分	238

6.4	线性化	253
6.5	稳定性和连续方法	266
6.6	数值稳定性	277
6.7	材料稳定性	289
6.8	练习	294
7	任意 Lagrangian 和 Eulerian 公式	295
7.1	引言	295
7.2	ALE 连续介质力学	296
7.3	ALE 描述中的守恒规则	302
7.4	ALE 控制方程	303
7.5	弱形式	304
7.6	Petrov-Galerkin 方法介绍	307
7.7	动量方程的 Petrov-Galerkin 公式	313
7.8	路径相关材料	315
7.9	离散方程线性化	324
7.10	网格更新方程	326
7.11	数值算例：一个弹-塑性波的传播问题	332
7.12	完全的 ALE 格式	335
7.13	练习	338
8	单元技术	339
8.1	引言	339
8.2	单元性能	341
8.3	单元性质和分片试验	346
8.4	Q4 和体积自锁	353
8.5	多场弱形式和单元	356
8.6	多场四边形	366
8.7	一点积分单元	369
8.8	举例	376
8.9	稳定性	379
8.10	练习	381
9	梁和壳	383
9.1	引言	383
9.2	梁理论	384
9.3	基于连续体的梁	387
9.4	CB 梁的分析	395

9.5	基于连续体的壳	404
9.6	CB 壳理论	414
9.7	剪切和膜自锁	419
9.8	假设应变单元	422
9.9	一点积分单元	425
9.10	练习	427
10	接触-碰撞	429
10.1	引言	429
10.2	接触界面方程	430
10.3	摩擦模型	437
10.4	弱形式	441
10.5	有限元离散	448
10.6	关于显式方法	458
11	扩展有限单元法	462
11.1	引言	462
11.2	单位分解与扩充项	465
11.3	一维 XFEM	465
11.4	多维 XFEM	472
11.5	弱和强形式	476
11.6	离散方程	477
11.7	水平集方法	481
11.8	虚拟节点法	482
11.9	积分	485
11.10	XFEM 模拟的例题	487
11.11	练习	489
12	多尺度连续理论概述	490
12.1	动机: 材料是含微结构的连续体	490
12.2	微结构连续体的宏观变形	493
12.3	块体微结构连续体的广义力学	493
12.4	多尺度微结构及连续理论	501
12.5	多尺度连续理论的控制方程	503
12.6	构造 MCT 本构关系	505
12.7	RVE 模拟的基本指南	508
12.8	MCT 的有限元编程	512
12.9	数值算例	513
12.10	MCT 模拟的未来研究方向	518

12.11 练习	518
13 单晶塑性理论	519
13.1 引言	519
13.2 立方和非立方晶体的描述	521
13.3 单晶塑性的原子机制和伯格斯矢量	523
13.4 在一般单晶中定义滑移面和滑移方向	525
13.5 单晶塑性的运动学	530
13.6 位错密度演化	533
13.7 位错运动所需应力	535
13.8 率相关单晶塑性的应力更新	535
13.9 基于率相关位错密度的晶体塑性算法	537
13.10 数值算例：局部剪切和非均匀变形	539
13.11 练习	541
附录 1 Voigt 标记	542
附录 2 范数	546
附录 3 单元形函数	549
附录 4 由极图确定欧拉角	553
附录 5 位错密度演化方程的算例	555
术语汇编	560
索引	564
参考文献	587

框目录

框 2.1	一维完全的 Lagrangian 格式的虚功原理	24
框 2.2	完全的 Lagrangian 格式的离散方程	31
框 2.3	更新的 Lagrangian 格式的离散方程	43
框 2.4	Eulerian 格式的控制方程	48
框 2.5	Lagrangian 网格显式时间积分流程图	53
框 3.1	应力度量的定义	76
框 3.2	应力转换	77
框 3.3	守恒方程	88
框 3.4	在功率上的应力-变形(应变)率耦合对	93
框 3.5	客观率	99
框 4.1	更新的 Lagrangian 格式的控制方程	107
框 4.2	更新的 Lagrangian 格式的弱形式: 虚功率原理	113
框 4.3	更新的 Lagrangian 格式的离散方程和内部节点力算法	121
框 4.4	完全的 Lagrangian 格式的控制方程	146
框 4.5	完全的 Lagrangian 格式的弱形式: 虚功原理	149
框 4.6	完全的 Lagrangian 格式的离散化方程和内部节点力算法	151
框 5.1	切线模量之间的关系	174
框 5.2	二阶张量的基本不变量	179
框 5.3	一维率无关塑性与结合各向同性和运动硬化的本构关系	184
框 5.4	一维率相关塑性的本构关系, 结合各向同性和(线性)运动硬化	185
框 5.5	次弹-塑性本构模型(Cauchy 应力公式)	188
框 5.6	J_2 流动理论次弹-塑性本构模型	189
框 5.7	J_2 流动理论次弹-塑性本构模型结合各向同性运动硬化	191
框 5.8	率无关 Gurson 模型	195

框 5.9	次弹-塑性本构模型: 旋转 Kirchhoff 应力公式	196
框 5.10	弹-塑性本构模型——小应变	198
框 5.11	大应变率相关塑性	199
框 5.12	超弹-塑性 J_2 流动理论本构模型	204
框 5.13	向后 Euler 图形返回算法	211
框 5.14	径向返回算法	213
框 5.15	超弹-粘塑性模型的应力更新方法	220
框 5.16	后拉和前推运算的总结	222
框 5.17	Lie 导数	223
框 6.1	显式时间积分的流程图	235
框 6.2	Newmark β 方法	239
框 6.3	隐式时间积分的流程图	244
框 6.4	平衡解答的流程图	244
框 6.5	内部节点力的 Jacobian(切线刚度矩阵)	258
框 6.6	平衡求解流程图: 采用算法模量的 Newton 方法	265
框 7.1	ALE 控制方程	303
框 7.2	关于 ALE 应力更新矩阵	316
框 7.3	显式时间积分	324
框 7.4	式(7.10.16)在一维、二维和三维的例子	329
框 8.1	在混合单元中的内力计算	363
框 8.2	单元节点力的计算	374
框 9.1	CB 梁单元的算法	393
框 10.1	接触界面条件	436
框 10.2	弱形式	448
框 10.3	非线性接触的半离散方程	454
框 11.1	扩充单元的内部节点力计算	480
框 12.1	在 MCT 中本构模拟策略	505
框 13.1	前处理: 确定初始滑移方向和法向	528
框 13.2	基于位错密度的单晶塑性算法	537