高考数学
你真的掌握了吗？
数学五章

张杨文 主编 / 兰师勇 副主编

清华大学出版社

高考数学

你真的掌握了吗？

数学五章

张杨文　主编　/　兰师勇　副主编

清华大学出版社
北京

内容简介

本套书基于作者团队多年辅导经验总结，对高考内容进行了科学合理的筛选和调整，侧重体现知识点的系统性和逻辑性。函数、数列、圆锥曲线这三部分重要内容独立成书；相对简单零散的平面向量、不等式、直线与圆、立体几何、计数原理与概率统计共同含于《数学五章》一书；集合与常用逻辑用语、复数、算法、三角函数等内容未收纳。

书中内容绝非简单拼凑，相当多的内容是作者团队实践积累的成果，比如函数恒成立部分的"端点效应"、数形结合中的"两图像法"和非常规函数图像的解决方法、数列放缩的系统归类及解法、圆锥曲线中的框架图，以及其他一些数学思想的应用等。针对全国各地的高考题型及特点，作者力求探索简洁、高效、容易掌握的普适方法，让高难度的压轴题不再成为考生的绊脚石，希望能对广大考生提供帮助。

图书在版编目（CIP）数据

高考数学你真的掌握了吗？数学五章/张杨文主编. --北京：清华大学出版社，2014
ISBN 978-7-302-35671-4

Ⅰ. ①高…　Ⅱ. ①张…　Ⅲ. ①中学数学课－高中－升学参考资料　Ⅳ. ①G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 053025 号

责任编辑：陈　明
封面设计：常雪影
责任校对：赵丽敏
责任印制：何　芊

出版发行：清华大学出版社
　网　　址：http://www.tup.com.cn，http://www.wqbook.com
　地　　址：北京清华大学学研大厦 A 座　　邮　　编：100084
　社 总 机：010-62770175　　邮　　购：010-62786544
　投稿与读者服务：010-62776969，c-service@tup.tsinghua.edu.cn
　质 量 反 馈：010-62772015，zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn
印 装 者：北京密云胶印厂
经　　销：全国新华书店
开　　本：203mm×280mm　　印　张：21.5　　字　　数：531 千字
版　　次：2014 年 7 月第 1 版　　印　　次：2014 年 7 月第1 次印刷
定　　价：49.00 元

产品编号：058203-01

目录

第一章

平面向量

【导读】

- 平面向量
  - 向量的基本运算及其性质
    - 向量的线性运算
    - 三点共线定理
    - 线段定比分点的应用
  - 向量的数量积
    - 数量积的运算
    - 投影问题
    - 向量与不等式
    - 向量积的推广与构造
    - 向量的夹角
  - 向量的几何意义
    - 判断三角形的形状
    - 向量与三角形的心
  - 面积问题
    - 一般面积问题
    - 面积的坐标式
    - 向量与面积比

向量，作为高中数学的一个内容模块，是每年高考试卷中不可或缺的部分. 曾经很长一段时间，向量往往以简单题的形式出现，但近些年，它已逐渐占据了压轴小题的位置.

第一节　向量的基本运算及其性质

深刻理解并掌握平面向量的基本运算及其性质是学好向量的前提.在有关向量的考题中，除了直接考查向量的基本运算外，更多的是将其作为基础，以更加灵活、更加深入的方式出现，比如三点共线的性质、定比分点公式的应用等.

一、向量的线性运算

向量的线性运算包括向量的加法、减法、数乘等，对于每一种运算，都包括几何运算法则和代数运算法则.

【例 1.1】 在$\triangle ABC$中，$AB=3$，$AC=4$，$BC=5$，D，E分别是$\triangle ABC$的内心、外心，$\overrightarrow{DE}=m\overrightarrow{AB}+n\overrightarrow{AC}$，则$m+n=$(　　).

A. $\frac{1}{3}$　　B. $\frac{5}{12}$　　C. $\frac{1}{2}$　　D. $\frac{7}{12}$

【解析】 由于$|AB|^2+|AC|^2=|BC|^2$，所以$\triangle ABC$是以A为直角顶点的直角三角形，又因为E为$\triangle ABC$的外心，所以E为BC的中点，D为$\triangle ABC$的内心，如图 1-1 所示，且$S_{\triangle ABC}=S_{\triangle ABD}+S_{\triangle ACD}+S_{\triangle CBD}$，由于内心到各个边的距离是相等的，设距离为$d$，则有$\frac{1}{2}|AB||AC|=\frac{1}{2}d|AB|+\frac{1}{2}d|AC|+\frac{1}{2}d|CB|$，可得$d=1$，由向量加法的平行四边形法则可得$\overrightarrow{AD}=\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}+\frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}$，$\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})-\left(\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}+\frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}\right)=\frac{1}{6}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$，因此$m+n=\frac{1}{6}+\frac{1}{4}=\frac{5}{12}$.故选 B.

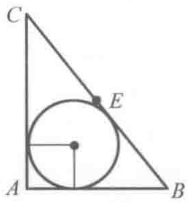

图　1-1

【注】 本题的几何做法中，关键是$\overrightarrow{AD}$的表示.平时遇到更多的是理解表达式$\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}+\frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}$代表的向量的意义，本题中需要逆向采用表达式$\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}+\frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}$来表达$\overrightarrow{AD}$，这对思维的灵活性有一定的要求，所以平时对基本知识点的把握一定要做到熟练、透彻.本题也可以将向量置于平面坐标系中，利用代数运算进行求解.

在例 1.1 中，涉及三角形的内接圆半径，即题中的d.依照题目中的做法，对于三角形的内接圆半径，有如下公式：

【结论 1.1】 三角形的内接圆半径$r=\frac{2S_{\triangle}}{C_{\triangle}}$，其中$S_{\triangle}$表示三角形的面积，$C_{\triangle}$表示三角形的周长.

【变式 1】(2013 · 四川文,12)　如图 1-2 所示,在平行四边形 $ABCD$ 中,对角线 AC 与 BD 交于点 O,$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\lambda\overrightarrow{AO}$,则 $\lambda=$________.

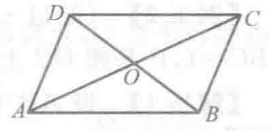

图 1-2

【变式 2】(2012 · 全国理,6)　在$\triangle ABC$ 中,AB 边上的高为 CD,若$\overrightarrow{CB}=\boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{CA}=\boldsymbol{b}$,且 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$,$|\boldsymbol{a}|=1$,$|\boldsymbol{b}|=2$,则$\overrightarrow{AD}=$(　　).

A. $\frac{1}{3}\boldsymbol{a}-\frac{1}{3}\boldsymbol{b}$　　B. $\frac{2}{3}\boldsymbol{a}-\frac{2}{3}\boldsymbol{b}$　　C. $\frac{3}{5}\boldsymbol{a}-\frac{3}{5}\boldsymbol{b}$　　D. $\frac{4}{5}\boldsymbol{a}-\frac{4}{5}\boldsymbol{b}$

【变式 3】(2008 · 广东理,8)　在平行四边形 $ABCD$ 中,AC 与 BD 交于 O 点,E 是线段 OD 的中点,AE 的延长线与 CD 交于点 F.若$\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{BD}=\boldsymbol{b}$,则$\overrightarrow{AF}=$(　　).

A. $\frac{1}{4}\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}\boldsymbol{b}$　　B. $\frac{2}{3}\boldsymbol{a}+\frac{1}{3}\boldsymbol{b}$　　C. $\frac{1}{2}\boldsymbol{a}+\frac{1}{4}\boldsymbol{b}$　　D. $\frac{1}{3}\boldsymbol{a}+\frac{2}{3}\boldsymbol{b}$

【变式 4】(2013 · 江苏,10)　设 D,E 分别是$\triangle ABC$ 的边 AB,BC 上的点,$AD=\frac{1}{2}AB$,$BE=\frac{2}{3}BC$,若$\overrightarrow{DE}=\lambda_1\overrightarrow{AB}+\lambda_2\overrightarrow{AC}$($\lambda_1$,$\lambda_2$ 为实数),则 $\lambda_1+\lambda_2$ 的值为________.

【变式 5】　在$\triangle ABC$ 中,$AB=2$,$BC=3$,$\angle ABC=60°$,AD 为边 BC 上的高,O 为 AD 的中点,若$\overrightarrow{AO}=\lambda\overrightarrow{AB}+\mu\overrightarrow{BC}$,则 $\lambda+\mu$ 的值为(　　).

A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　B. $\frac{3}{4}$　　C. $\frac{5}{6}$　　D. $\frac{2}{3}$

【例 1.2】（2011·天津理，14） 已知直角梯形 $ABCD$ 中，$AD/\!/BC$，$\angle ADC=90^\circ$，$AD=2$，$BC=1$，P 是腰 DC 上的动点，则 $|\overrightarrow{PA}+3\overrightarrow{PB}|$ 的最小值为________.

【解析 1】 设 AB 中点为 M，则 $|\overrightarrow{PA}+3\overrightarrow{PB}|=|\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+2\overrightarrow{PB}|=|2\overrightarrow{PM}+2\overrightarrow{PB}|=4|\overrightarrow{PN}|$，如图 1-3 所示，其中 N 为 BM 的中点. 因为 $ABCD$ 为直角梯形，所以当 $PN/\!/BC$ 时，$|\overrightarrow{PN}|$ 最小，根据梯形中位线长度的计算公式可知，$|\overrightarrow{PN}|=\dfrac{BC+\dfrac{BC+AD}{2}}{2}=\dfrac{5}{4}$，即 $|\overrightarrow{PA}+3\overrightarrow{PB}|_{\min}=5$. 故填 5.

【解析 2】 如图 1-4 所示建立直角坐标系，设 $CD=b$，$PD=a$，则 $A(2,0)$，$B(1,b)$，$P(0,a)$，$\overrightarrow{PA}=(2,-a)$，$\overrightarrow{PB}=(1,b-a)$，所以 $\overrightarrow{PA}+3\overrightarrow{PB}=(5,3b-4a)$，因此 $|\overrightarrow{PA}+3\overrightarrow{PB}|=\sqrt{25+(3b-4a)^2}\geqslant 5$，当且仅当 $3b=4a$ 时等号成立，故 $|\overrightarrow{PA}+3\overrightarrow{PB}|_{\min}=5$. 故填 5.

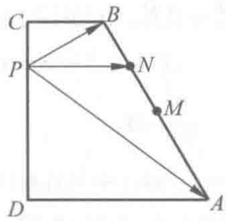

图 1-3

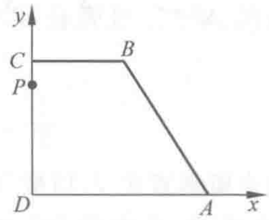

图 1-4

【变式 1】（2012·江西理，7） 在直角三角形 ABC 中，点 D 是斜边 AB 的中点，点 P 为线段 CD 的中点，则 $\dfrac{|PA|^2+|PB|^2}{|PC|^2}=$（　　）.

A. 2　　B. 4　　C. 5　　D. 10

【变式 2】（2007·山东理，11） 在直角三角形 ABC 中，CD 是斜边 AB 上的高，则下列等式不成立的是（　　）.

A. $|\overrightarrow{AC}|^2=\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}$　　B. $|\overrightarrow{BC}|^2=\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}$

C. $|\overrightarrow{AB}|^2=\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{CD}$　　D. $|\overrightarrow{CD}|^2=\dfrac{(\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB})\times(\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC})}{|\overrightarrow{AB}|^2}$

【变式 3】(2014 · 福建文,10)　设 M 为平行四边形 $ABCD$ 对角线的交点,O 为平行四边形 $ABCD$ 所在平面内任意一点,则$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}$等于(　　).

A. $\overrightarrow{OM}$　　B. $2\overrightarrow{OM}$　　C. $3\overrightarrow{OM}$　　D. $4\overrightarrow{OM}$

例 1.1、例 1.2 及其变式对于向量的运算考查都比较简单直接,根据基本的运算法则便可求解. 但某些计算题却不仅仅是计算本身的问题,理解题意更关键,尤以 2013 年重庆理科压轴选择题为典型.

【例 1.3】(2013 · 重庆理,10)　在平面上,$\overrightarrow{AB_1}\perp\overrightarrow{AB_2}$,$|\overrightarrow{OB_1}|=|\overrightarrow{OB_2}|=1$,$\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AB_1}+\overrightarrow{AB_2}$,若$|\overrightarrow{OP}|<\frac{1}{2}$,则$|\overrightarrow{OA}|$的取值范围是(　　).

A. $\left(0,\frac{\sqrt{5}}{2}\right]$　　B. $\left(\frac{\sqrt{5}}{2},\frac{\sqrt{7}}{2}\right]$　　C. $\left(\frac{\sqrt{5}}{2},\sqrt{2}\right]$　　D. $\left(\frac{\sqrt{7}}{2},\sqrt{2}\right]$

【解析 1】 根据条件可知 A,B_1,P,B_2 构成一个矩形 AB_1PB_2,以 AB_1,AB_2 所在直线为坐标轴建立直角坐标系,设$|\overrightarrow{AB_1}|=a$,$|\overrightarrow{AB_2}|=b$,点 O 的坐标为(x,y),则点 P 的坐标为(a,b),由$|\overrightarrow{OB_1}|=|\overrightarrow{OB_2}|=1$,得$\begin{cases}(x-a)^2+y^2=1,\\x^2+(y-b)^2=1,\end{cases}$则$\begin{cases}(x-a)^2=1-y^2,\\(y-b)^2=1-x^2,\end{cases}$因为$|\overrightarrow{OP}|<\frac{1}{2}$,所以$(x-a)^2+(y-b)^2<\frac{1}{4}$,即$1-y^2+1-x^2<\frac{1}{4}$,于是

$$x^2+y^2>\frac{7}{4} \qquad ①$$

又因为$(x-a)^2+y^2=1$,所以 $x^2+y^2+a^2=1+2ax\leqslant 1+a^2+x^2$,可得 $y^2\leqslant 1$;再由 $x^2+(y-b)^2=1$,所以 $x^2+y^2+b^2=1+2by\leqslant 1+b^2+y^2$,可得 $x^2\leqslant 1$,因此可知

$$x^2+y^2\leqslant 2 \qquad ②$$

由①,②可知$\frac{7}{4}\leqslant x^2+y^2\leqslant 2$,所以$\frac{\sqrt{7}}{2}\leqslant|\overrightarrow{OA}|\leqslant\sqrt{2}$. 故选 D.

【解析 2】 $|\overrightarrow{OB_1}|=|\overrightarrow{OB_2}|=1\Rightarrow B_1,B_2$ 在以原点为圆心的单位圆上,不妨设其坐标分别为 $B_1(\cos\alpha,\sin\alpha)$,$B_2(\cos\beta,\sin\beta)$;$P$ 点在以原点为圆心、以$\frac{1}{2}$为半径的圆内,不妨设其坐标为 $P(r\cos\theta,r\sin\theta)\left(0\leqslant r<\frac{1}{2}\right)$;设点 $A(x,y)$,则

$$\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AB_1}+\overrightarrow{AB_2}\Rightarrow(r\cos\theta-x,r\sin\theta-y)=(\cos\alpha+\cos\beta-2x,\sin\alpha+\sin\beta-2y)$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x=\cos\alpha+\cos\beta-r\cos\theta,\\y=\sin\alpha+\sin\beta-r\sin\theta\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\overrightarrow{AB_1}=(r\cos\theta-\cos\beta,r\sin\theta-\sin\beta),\\\overrightarrow{AB_2}=(r\cos\theta-\cos\alpha,r\sin\theta-\sin\alpha).\end{cases}$$

于是

$$\overrightarrow{AB_1}\cdot\overrightarrow{AB_2}=0\Leftrightarrow r^2-r\cos(\theta-\alpha)-r\cos(\theta-\beta)+\cos(\alpha-\beta)=0.$$

因此$|\overrightarrow{OA}|^2=x^2+y^2=2-r^2\in\left(\dfrac{7}{4},2\right]\Rightarrow|\overrightarrow{OA}|\in\left(\dfrac{\sqrt{7}}{2},\sqrt{2}\right]$. 故选 D.

【变式 1】 已知向量$\overrightarrow{OA}$,$\overrightarrow{OB}$满足$|\overrightarrow{OA}|=|\overrightarrow{OB}|=1$,$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=0$,$\overrightarrow{OC}=\lambda\overrightarrow{OA}+\mu\overrightarrow{OB}$,若$M$为线段$AB$的中点,且$|\overrightarrow{MC}|=1$,则点$(\lambda,\mu)$在(　　).

A. 以$\left(-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right)$为圆心,半径为 1 的圆上

B. 以$\left(\dfrac{1}{2},-\dfrac{1}{2}\right)$为圆心,半径为 1 的圆上

C. 以$\left(-\dfrac{1}{2},-\dfrac{1}{2}\right)$为圆心,半径为 1 的圆上

D. 以$\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right)$为圆心,半径为 1 的圆上

【变式 2】(2014·湖南文,10)　在平面直角坐标系中,O为原点,$A(-1,0)$,$B(0,\sqrt{3})$,$C(3,0)$,动点D满足$|\overrightarrow{CD}|=1$,则$|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}|$的取值范围是(　　).

A. $[4,6]$　　B. $[\sqrt{19}-1,\sqrt{19}+1]$

C. $[2\sqrt{3},2\sqrt{7}]$　　D. $[\sqrt{7}-1,\sqrt{7}+1]$

【变式 3】(2014·浙江理,8)　记$\max\{x,y\}=\begin{cases}x, & x\geqslant y,\\ y, & x<y,\end{cases}$ $\min\{x,y\}=\begin{cases}y, & x\geqslant y,\\ x, & x<y,\end{cases}$设$\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$为平面向量,则(　　).

A. $\min\{|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|,|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|\}\leqslant\min\{|\boldsymbol{a}|,|\boldsymbol{b}|\}$

B. $\min\{|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|,|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|\}\geqslant\min\{|\boldsymbol{a}|,|\boldsymbol{b}|\}$

C. $\max\{|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|^2,|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|^2\}\leqslant|\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{b}|^2$

D. $\max\{|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|^2,|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|^2\}\geqslant|\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{b}|^2$

二、三点共线定理

【知识点 1.1】 A,B,C 三点共线$\Leftrightarrow$存在$\lambda+\mu=1$,使得$\overrightarrow{OC}=\lambda\overrightarrow{OA}+\mu\overrightarrow{OB}$.

【注】 在知识点 1.1 中,点 O 与 A,B,C 不共线,A,B,C 三点的位置可以任意互换,但当 A,B,C 三点的相对位置不同时,系数 λ,μ 的正负会随之改变,可以利用向量加法的平行四边形法则进行解释,请读者细细体会.

【例 1.4】(2007・江西理,15) 在$\triangle ABC$中,点 O 是 BC 的中点,过点 O 的直线分别交直线 AB,AC 于不同的两点 M,N,若$\overrightarrow{AB}=m\overrightarrow{AM}$,$\overrightarrow{AC}=n\overrightarrow{AN}$,则 $m+n$ 的值为______.

【解析 1】 因为点 O 是 BC 的中点,所以$\overrightarrow{AO}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$,又因为$\overrightarrow{AB}=m\overrightarrow{AM}$,$\overrightarrow{AC}=n\overrightarrow{AN}$,所以$\overrightarrow{AO}=\frac{m}{2}\overrightarrow{AM}+\frac{n}{2}\overrightarrow{AN}$.由点 M,O,N 三点共线,则$\frac{m}{2}+\frac{n}{2}=1$,于是 $m+n=2$.故填 2.

【解析 2】 设$\overrightarrow{MO}=\lambda\overrightarrow{MN}$,则

$$\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MO}=\frac{1}{m}\overrightarrow{AB}+\lambda\overrightarrow{MN}=\frac{1}{m}\overrightarrow{AB}+\lambda(\overrightarrow{AN}-\overrightarrow{AM})=(1-\lambda)\frac{1}{m}\overrightarrow{AB}+\frac{\lambda}{n}\overrightarrow{AC}.$$

又因为点 O 为 BC 的中点,从而$\overrightarrow{AO}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$,由唯一性知$\frac{\lambda}{n}=\frac{1}{2}$,$(1-\lambda)\frac{1}{m}=\frac{1}{2}$,可得 $m+n=2$.故填 2.

本题可以做适当的推广,有如下结论:

【结论 1.2】 在$\triangle ABC$中,点 O 是 BC 上一点,且$\overrightarrow{BO}=\lambda\overrightarrow{BC}$,过点 O 的直线分别交直线 AB,AC 于不同的两点 M,N,若$\overrightarrow{AB}=m\overrightarrow{AM}$,$\overrightarrow{AC}=n\overrightarrow{AN}$,则 $m(1-\lambda)+n\lambda=1$.

【结论 1.3】 在$\triangle ABC$中,AO 是 BC 边上的中线,D 为 AO 上一点(D 与 A 不重合),且$\overrightarrow{AO}=\lambda\overrightarrow{AD}$,过点 O 的直线分别交直线 AB,AC 于不同的两点 M,N,若$\overrightarrow{AB}=m\overrightarrow{AM}$,$\overrightarrow{AC}=n\overrightarrow{AN}$,则 m,λ,n 成等差数列,即 $m+n=2\lambda$.

【变式 1】(2007・全国Ⅱ理,5) 在$\triangle ABC$中,已知 D 是边 AB 上一点,若$\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{DB}$,$\overrightarrow{CD}=\frac{1}{3}\overrightarrow{CA}+\lambda\overrightarrow{CB}$,则$\lambda=$(　　).

A. $\frac{2}{3}$　　B. $\frac{1}{3}$　　C. $-\frac{1}{3}$　　D. $-\frac{2}{3}$

【变式 2】 在$\triangle ABC$中,H是边BC上异于B,C的任一点,M为AH的中点,若$\overrightarrow{AM}=\lambda\overrightarrow{AB}+\mu\overrightarrow{AC}$,则$\lambda+\mu$的值为________.

【变式 3】 已知点G是$\triangle ABC$的重心,过G作直线与AB,AC两边分别交于M,N两点,且$\overrightarrow{AM}=x\overrightarrow{AB}$,$\overrightarrow{AN}=y\overrightarrow{AC}$,则$\dfrac{xy}{x+y}=$( ).

A. 3　　B. $\dfrac{1}{3}$　　C. 2　　D. $\dfrac{1}{2}$

利用三点共线不仅可以解决求值问题,也可以解决一些取值范围的问题,请看下面的例题及其变式.

【例 1.5】(2006·湖南理,15) 如图 1-5 所示,$OM/\!/AB$,点P在由射线OM、线段OB及AB的延长线围成的区域内(不含边界)运动,且$\overrightarrow{OP}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}$,则$x$的取值范围是________;当$x=-\dfrac{1}{2}$时,$y$的取值范围是________.

【解析 1】 因为$OM/\!/AB$,所以可设$\overrightarrow{OP}=\lambda_1\overrightarrow{OB}+\lambda_2\overrightarrow{AB}$,而点$P$在区域内,所以$0<\lambda_1<1$,$\lambda_2>0$,故$\overrightarrow{OP}=-\lambda_2\overrightarrow{OA}+(\lambda_1+\lambda_2)\overrightarrow{OB}$,可得$x=-\lambda_2$且$y=\lambda_1+\lambda_2$,因此$x=-\lambda_2<0$.当$x=-\dfrac{1}{2}$时,$y=\lambda_1+\dfrac{1}{2}$,因为$0<\lambda_1<1$,所以$\dfrac{1}{2}<y<\dfrac{3}{2}$.故填$x<0$;$\dfrac{1}{2}<y<\dfrac{3}{2}$.

【解析 2】 如图 1-6 所示,由解析 1 知x的取值范围是$(-\infty,0)$,延长OP交AB于D,则有$\overrightarrow{OD}=\lambda\overrightarrow{OP}(\lambda>1)$,所以$\overrightarrow{OD}=\lambda x\overrightarrow{OA}+\lambda y\overrightarrow{OB}$,因为$A$,$B$,$D$三点共线,所以$\lambda x+\lambda y=1$,即$x+y=\dfrac{1}{\lambda}\in(0,1)$,所以$0<x+y<1$,当$x=-\dfrac{1}{2}$时,有$0<y-\dfrac{1}{2}<1$,化简可得$\dfrac{1}{2}<y<\dfrac{3}{2}$,故填$x<0$;$\dfrac{1}{2}<y<\dfrac{3}{2}$.

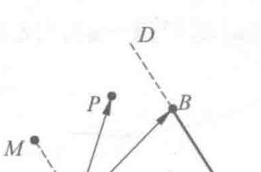

图 1-5

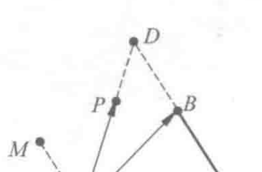

图 1-6

通过例 1.5,我们可以把三点共线定理作进一步的延伸:

(1) 在同一平面内,对于一组基底$\overrightarrow{OA}$,$\overrightarrow{OB}$而言,若点 P 在直线 AB 外,点 O 与点 P 位于直线 AB 的同侧,且射线 OP 与直线 AB 相交,则存在唯一的一对实数 λ_1,λ_2 使得$\overrightarrow{OP}=\lambda_1\overrightarrow{OA}+\lambda_2\overrightarrow{OB}$,且 $0<\lambda_1+\lambda_2<1$;反之也成立.

(2) 在同一平面内,对于一组基底$\overrightarrow{OA}$,$\overrightarrow{OB}$而言,若点 P 在直线 AB 外,点 O 与点 P 位于直线 AB 的同侧,且射线 PO 与直线 AB 相交,则存在唯一的一对实数 λ_1,λ_2 使得$\overrightarrow{OP}=\lambda_1\overrightarrow{OA}+\lambda_2\overrightarrow{OB}$,且 $\lambda_1+\lambda_2<0$;反之也成立.

(3) 在同一平面内,对于一组基底$\overrightarrow{OA}$,$\overrightarrow{OB}$而言,若点 P 在直线 AB 外,直线 OP 与直线 AB 平行,则存在唯一的一对实数 λ_1,λ_2 使得$\overrightarrow{OP}=\lambda_1\overrightarrow{OA}+\lambda_2\overrightarrow{OB}$,且 $\lambda_1+\lambda_2=0$;反之也成立.

(4) 在同一平面内,对于一组基底$\overrightarrow{OA}$,$\overrightarrow{OB}$而言,若点 P 在直线 AB 外,点 O 与点 P 位于直线 AB 的异侧,则存在唯一的一对实数 λ_1,λ_2 使得$\overrightarrow{OP}=\lambda_1\overrightarrow{OA}+\lambda_2\overrightarrow{OB}$,且 $\lambda_1+\lambda_2>1$;反之也成立.

【变式 1】 在$\triangle ABC$ 中,若 $AB=3$,$AC=4$,$BC=5$,点 D 是边 BC 上的动点,$\overrightarrow{AD}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$,当 xy 取最大值时,AD 的长为(　　).

A. 4　　B. 3　　C. $\frac{5}{2}$　　D. $\frac{12}{5}$

【变式 2】 已知点 G 是$\triangle ABC$ 的重心,点 P 是$\triangle GBC$ 内一点,若$\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{AB}+\mu\overrightarrow{AC}$,则 $\lambda+\mu$ 的取值范围是(　　).

A. $\left(\frac{1}{2},1\right)$　　B. $\left(\frac{2}{3},1\right)$　　C. $\left(1,\frac{3}{2}\right)$　　D. $(1,2)$

【变式 3】 在$\triangle ABC$ 中,$AB=4$,$AC=8$,$\angle BAC=60°$,延长 CB 到 D,使得 $BA=BD$,当点 E 在线段 AB 上移动时,若$\overrightarrow{AE}=m\overrightarrow{AC}+n\overrightarrow{AD}$,当 m 取最大值时,$m+n$ 的值是________.

【变式 4】 在边长为 1 的正三角形 ABC 中，E,F 分别为边 AB,AC 上的动点，且满足 $\overrightarrow{AE}=m\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AF}=n\overrightarrow{AC}$，其中 $m,n\in(0,1)$，$m+n=1$，M,N 分别是 EF,BC 的中点，则 $|\overrightarrow{MN}|$ 的最小值为________.

【变式 5】 在 $\triangle ABC$ 中，若 $\angle BAC=120°$，$AB=2$，$AC=1$，D 是边 BC 上的一点(包括端点)，则 $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}$ 的取值范围为(　　).

A. $[1,2]$　　B. $[0,1]$　　C. $[0,2]$　　D. $[-5,2]$

三、线段定比分点的应用

【知识点 1.2】 在 $\triangle ABC$ 中，若 D 是 BC 上一点，且 $\overrightarrow{BD}=\lambda\overrightarrow{DC}(\lambda\neq-1)$，则向量 $\overrightarrow{AD}=\dfrac{\overrightarrow{AB}+\lambda\overrightarrow{AC}}{1+\lambda}$.

【例 1.6】(2010 · 全国Ⅱ理，8) 在 $\triangle ABC$ 中，点 D 在边 AB 上，CD 平分 $\angle ACB$，若 $\overrightarrow{CB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{CA}=\boldsymbol{b}$，$|\boldsymbol{a}|=1$，$|\boldsymbol{b}|=2$，则 $\overrightarrow{CD}=$(　　).

A. $\frac{1}{3}\boldsymbol{a}+\frac{2}{3}\boldsymbol{b}$　　B. $\frac{2}{3}\boldsymbol{a}+\frac{1}{3}\boldsymbol{b}$　　C. $\frac{3}{5}\boldsymbol{a}+\frac{4}{5}\boldsymbol{b}$　　D. $\frac{4}{5}\boldsymbol{a}+\frac{3}{5}\boldsymbol{b}$

【解析】 由 CD 平分 $\angle ACB$ 知 $\dfrac{|AC|}{|BC|}=\dfrac{|AD|}{|BD|}=\dfrac{|\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}|}=\dfrac{2}{1}$，则 $|AD|=\dfrac{2}{3}|AB|$，$|BD|=\dfrac{1}{3}|AB|$，于是 $\overrightarrow{CD}=\dfrac{2}{3}\boldsymbol{a}+\dfrac{1}{3}\boldsymbol{b}$. 故选 B.

【变式 1】(2008 · 全国Ⅰ理，3) 在 $\triangle ABC$ 中，$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{c}$，$\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{b}$，若点 D 满足 $\overrightarrow{BD}=2\overrightarrow{DC}$，则 $\overrightarrow{AD}=$(　　).

A. $\frac{2}{3}\boldsymbol{b}+\frac{1}{3}\boldsymbol{c}$　　B. $\frac{5}{3}\boldsymbol{b}-\frac{2}{3}\boldsymbol{c}$　　C. $\frac{2}{3}\boldsymbol{b}-\frac{1}{3}\boldsymbol{c}$　　D. $\frac{1}{3}\boldsymbol{b}+\frac{2}{3}\boldsymbol{c}$

【变式 2】 在$\triangle ABC$中,已知P是边AB上一点,且$\overrightarrow{CP}=\frac{2}{3}\overrightarrow{CA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{CB}$,$\overrightarrow{AP}=t\overrightarrow{AB}$,则$t$的值为(　　).

A. $\frac{1}{3}$　　B. $\frac{2}{3}$　　C. $\frac{1}{2}$　　D. $\frac{5}{3}$

【变式 3】(2005·全国Ⅱ理,8)　已知点$A(\sqrt{3},1)$,$B(0,0)$,$C(\sqrt{3},0)$,设$\angle BAC$的平分线AE与BC相交于E,那么有$\overrightarrow{BC}=\lambda\overrightarrow{CE}$,其中$\lambda$等于(　　).

A. 2　　B. $\frac{1}{2}$　　C. -3　　D. $-\frac{1}{3}$

【变式 4】 在$\triangle ABC$中,已知P是边AB上一点,且$\overrightarrow{CP}=\frac{2}{3}\overrightarrow{CA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{CB}$,$Q$是$BC$的中点,$AQ$与$CP$的交点为$M$,又$\overrightarrow{CM}=t\overrightarrow{CP}$,则$t$的值为(　　).

A. $\frac{1}{2}$　　B. $\frac{2}{3}$　　C. $\frac{3}{4}$　　D. $\frac{4}{5}$

第二节　向量的数量积

数量积是向量运算中最重要、最核心的运算,除了基本的几何运算和代数运算以外,其中也蕴含着“投影”的概念,且由数量积的几何公式还可以得到重要的向量不等式.

一、数量积的运算

【知识点 1.3】 数量积的运算如下:

几何运算　$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle$($\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle$表示向量$\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$的夹角).

代数运算　$\boldsymbol{a}=(x_1,y_1)$,$\boldsymbol{b}=(x_2,y_2)$,$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=x_1x_2+y_1y_2$.