混沌及其控制基础

CHAOS

袁惠群 李 宁 编著

東北大學出版社
Northeastern University Press

混沌及其控制基础

袁惠群　李　宁　编著

东北大学出版社

·沈　阳·

图书在版编目（CIP）数据

混沌及其控制基础／袁惠群，李宁编著. —沈阳：东北大学出版社，2016.9
ISBN 978-7-5517-1405-1

Ⅰ. ①混… Ⅱ. ①袁… ②李… Ⅲ. ①混沌理论—应用—自适应控制 Ⅳ. ①0415.5 ②TP273

中国版本图书馆CIP数据核字(2016)第221197号

内容提要

混沌学是一门新兴的交叉科学，它描述科学与工程、自然界和人类社会各个方面关于形态结构及其演化的规律。本书内容主要包括混沌现象与特征，混沌运动的几何特征和统计特征，连续动力系统的混沌运动，离散迭代系统的混沌运动，混沌的时间序列分析方法，分形与分维，混沌的解析分析方法，混沌控制概述与数学基础，延迟反馈控制及其改进方法，混合控制及其改进方法等。

本书可以作为高等学校的控制、力学、机械、动力、航空、电力、材料等专业高年级本科生、研究生学习有关混沌、分形与混沌控制理论和解决工程中的混沌及其控制问题的参考书，也可供有关工程技术人员参考。

出 版 者：东北大学出版社
地址：沈阳市和平区文化路三号巷11号
邮编：110819
电话：024-83687331(市场部) 83680267(社务部)
传真：024-83680180(市场部) 83687332(社务部)
网址：http://www.neupress.com
E-mail：neuph@neupress.com
印 刷 者：沈阳大地印刷有限责任公司
发 行 者：东北大学出版社
幅面尺寸：185mm×260mm
印 张：15
字 数：356千字
出版时间：2016年9月第1版
印刷时间：2016年9月第1次印刷
责任编辑：刘 莹
封面设计：刘江旸
责任校对：汪彤彤
责任出版：唐敏志

ISBN 978-7-5517-1405-1
定 价：35.00元

前　言

混沌学是一门新兴的交叉科学，它描述自然界和人类社会各个方面关于形态结构及其演化的规律。目前，它已渗透到自然科学、社会科学和工程技术中的各个领域。编著者在近年从事科研工作和为本科生、研究生讲授混沌与分形、机电系统混沌与控制、混沌动力学及应用等课程教学的基础上写成本书。在写作过程中，力求深入浅出，注重应用，在阐明基本概念的同时，介绍如何从工程实际问题出发，建立混沌动力学与控制模型，应用不同的方法进行分析求解，获取所研究模型的混沌动力学特征与控制效果。

全书共 11 章，具体内容如下。第 1 章混沌运动概述。介绍混沌现象，阐明混沌的特征和定义，回顾混沌研究的发展简史，阐述研究混沌的意义和研究混沌的方法。第 2 章混沌运动的几何特征。分别介绍描述混沌运动的时间历程波形图、相轨线图、分叉图、庞加莱映射和频闪采样法，引入奇怪吸引子概念，最后介绍几种典型的通向混沌的道路。第 3 章混沌运动的统计特征。主要介绍李雅普诺夫指数的概念与计算方法，考虑到学生缺乏随机过程与随机振动知识，在介绍混沌的谱分析之前，简要介绍了谱分析方法，作为本章的结束，简要介绍了拓扑熵与测度熵的基本概念。第 4 章连续动力系统的混沌运动。通过对连续系统微分方程的数值求解，较详细地介绍了洛伦兹吸引子、鲁斯勒吸引子、杜芬振子、范德波尔吸引子的混沌运动特征。第 5 章离散迭代系统的混沌运动。差分方程是描述混沌运动的一种数学工具，它较微分方程更适合计算机运算，因此，本章介绍了离散动力学的基本知识，并较详细地介绍了一维离散系统的逻辑斯蒂克映射、圆周映射和二维海农映射。第 6 章混沌时间序列分析。其中介绍基于时间序列的相空间重构的基本概念，在此基础上，介绍基于时间序列相空间重构的分维数的计算和基于时间序列相空间重构的李雅普诺夫指数的计算，对非线性时间序列的预测也作了简要介绍。第 7 章分形与分维。阐述分形的基本特征与各种分形维数的定义，介绍了几种典型的分形集合及其分维数，并介绍了典型非线性方程的混沌运动的维数计算方法。第 8 章混沌研究的解析方法。主要介绍哈密顿定理、KAM 定理、阿诺德扩散、斯梅尔马蹄映射和梅尔尼科夫方法。第 9 章混沌控制概述与数学基础。本章首先简要介绍混沌运动控制的目标方法与分类、混沌控制论与现代控制论对比等。在此基础上，简要介绍几种基本混沌控制方法及其数学基础。第 10 章延迟反馈控制及其改进方法。本章分别阐述连续、离散和时滞混沌系统的延迟反馈控制，接着阐释双周期时滞系统和周期多时滞系统的反馈控制，最后介绍自适应时滞系统的反馈控制。第 11 章混合控制及其改进方法。分别对平面系统的庞加莱分岔和三维系统的 Hopf 分岔阐释连续时间系统的混合控制。关于离散系统，介绍了对逻辑斯蒂克映射的倍周期分岔和海农映射的混沌进行混合控制

的方法。接着介绍利用脉冲混合控制方法控制复杂网络模型的倍周期分岔和混沌。最后介绍了时滞系统的自适应混合控制。

上述混沌及其控制的基本内容，可以作为进一步学习有关混沌、分形与混沌控制理论和解决工程中的混沌及其控制问题的基础。考虑到现代工程分析软件的广泛应用，书末附录简要介绍了 MATLAB 软件在混沌与分形中的应用，并给出了若干计算实例与算法程序。本书第 1~8 章由袁惠群编写，第 9~11 章由李宁博士后编写。编著者的博士研究生协助了本书的编写，附录由孙华刚博士编写，吴镇宇博士对第 6 章作了补充，李鹤博士绘制了第 7 章的大部分图形。在编辑整理书稿过程中，还得到了赵天宇等博士的协助，编著者对他们的工作谨致感谢。编著者在写作过程中，参考了若干已经出版的有关混沌分形及混沌控制等方面的文献，谨向文献作者表示感谢。

本书得到了国家自然科学基金（编号：51275081）、辽宁省科技创新重大专项（编号：201303004）和中央高校基本科研业务费项目国家项目培育种子基金（编号：N140504009）的资助，在此致以诚挚感谢。

混沌及其控制是一门涉及学科门类众多、发展十分迅速的新兴科学。限于笔者水平，谬误之处在所难免，敬请读者指正。

编著者

2015 年 11 月

目　录

第1章 混沌运动概述

1.1 混沌现象

长期以来，人们在认识和描述运动时，总是将运动分为两种类型：确定性运动和随机性运动。在牛顿(Newton)创建经典力学后很长一段时间，自然科学家都认为，一个确定性的系统，即由常微分方程、偏微分方程、差分方程和简单代数迭代方程所描述的系统，方程系数是确定的，在确定性激励下，响应也是确定的。当方程和初始条件给定后，可以确定未来某时刻系统的位置和运动参数的瞬时值。而对于随机性运动，事先不可能确定系统在某时刻的位移、振幅等运动参数的瞬时值。描述随机性运动只能采用概率和统计的方法。确定性运动和随机性运动是两类性质迥然、描述方法也完全不同的运动。对于确定性系统的运动，牛顿和拉普拉斯(Laplace)都指出，只要建立方程，就可以依据初始条件来确定随后的运动。在两组相近的初始条件下，系统的运动状态也是相近的。可是自从近30年来混沌被发现后，冲破了这种传统的观念。在非线性系统中，发现存在一种特殊的非周期定常运动状态，即在确定性系统中出现类似随机的过程。这种运动对初值的微小变化极端敏感。初值的微小差别经过一定时间后，运动状态可能发生显著的变化。这使人们认识到即使确定性系统受到确定性激励，响应也可能是不确定性的，即所谓对初值的敏感造成的确定性混沌。

混沌现象在自然界中是普遍存在的。自然界中存在的绝大部分运动几乎都可以认为是混沌运动，规则运动只是相对地在局部的范围内和较短的时间内存在。对于物理系统，从能量观点可以分为保守系统和耗散系统。保守系统又可以分为可积的与不可积的。不可积的保守系统意味着混沌运动。到目前为止发现的可积的保守系统是非常少的，描述客观世界的各种科学问题的数学方程大多数是不可积的。不可积的普遍性说明了混沌的普遍性。同时，客观世界的不断发展变化，有着各种各样的耗散结构。最简单的耗散结构是由极限环描述的周期运动。两个或两个以上周期运动的耦合会产生混沌运动。因此，当非线性较强时，一般都会出现混沌运动。

混沌现象只出现在非线性动力系统中，不仅涉及物理学和数学，也涉及化学、生物学、社会学和经济学等，既普遍存在又极其复杂。由于数学处理的困难，早年人们对运动的确定性描述只限于线性系统和一些特殊的可积分非线性模型。后来，人们越来越把注意力转移到较为精确、求解较为困难的非线性模型。到20世纪60—70年代，随着近代科学技术的迅猛发展，许多非线性力学问题急需解决。大型高速电子计算机和有效的

大规模算法的出现，使得人们能够对理论上难以求解的非线性问题进行大量的数值计算和仿真，揭示了极其丰富的非线性动力学现象。各种数学理论的涌现也为非线性的研究提供了强有力的理论依据。可以说，现在对于非线性系统的研究相当大一部分是针对混沌的。目前，对混沌的研究已遍及自然科学的各个领域，并有很成功的实际应用。以下是几个典型的非线性系统中的混沌运动图像实例。通过这几个非线性方程的运动图像，可以对混沌运动有一个初步几何感官认识。后面有关章节还将详细讨论。

【例 1-1】 杜芬(Duffing)方程的运动图像。

在周期外力作用下的杜芬方程为

$$\ddot{x}+\alpha\dot{x}+\kappa x+\mu x^3=F\cos\omega t \tag{1-1}$$

这是具有非线性恢复力的非自治系统。关于杜芬方程，后面还将详细讨论，此处直接给出杜芬方程在某些参数下的运动图像。

图 1-1(a)所示是杜芬方程的两条时域波形曲线图。其中，$\alpha=0.05$，$\kappa=0$，$\mu=1$，$\omega=1$，$F=7.5$。图中的两条时域波形曲线的初始值分别为 $x=3$，$\dot{x}=4$ 和 $x=3.01$，$\dot{x}=4.01$，分别代表两个初始位移和初始速度相差仅 0.01 的同一个运动微分方程。由图中可见，运动刚开始时两曲线重合在一起，经过两个周期后两条曲线的振幅出现差别，而相位几乎无差别。但经过 5 个周期后，两条曲线的振幅和周期已完全不同。这说明初始值有微小差别的两个运动，经过一定时间后，其运动状态发生了显著的变化，也即杜芬方程描述的运动对初值的极端敏感性。

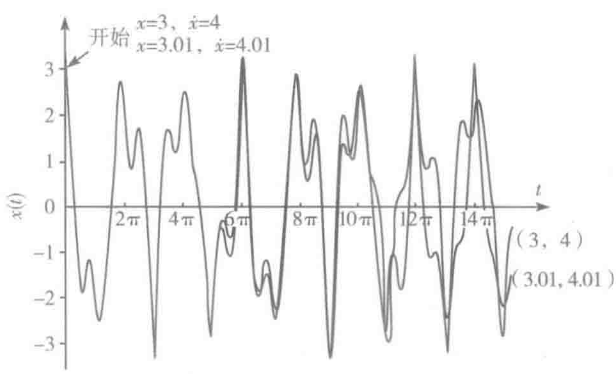


图 1-1　杜芬方程的时域波形图

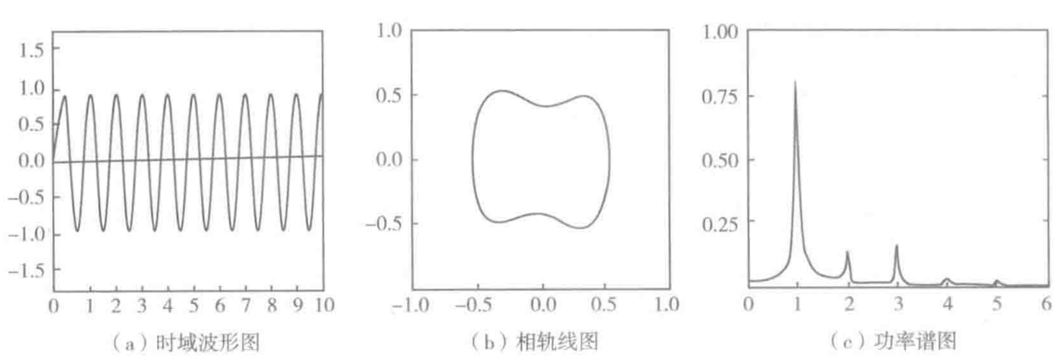
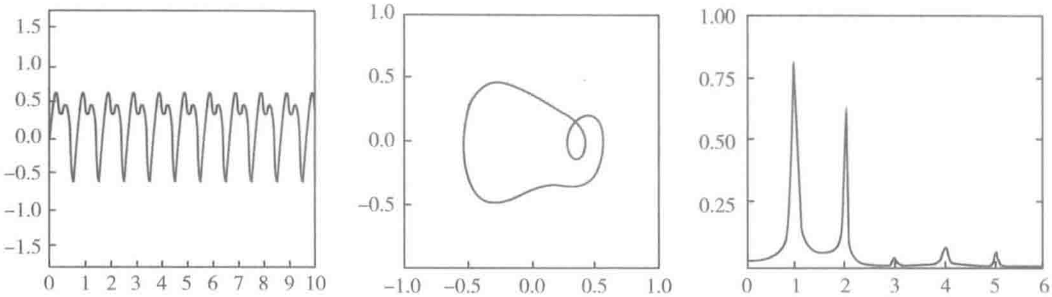
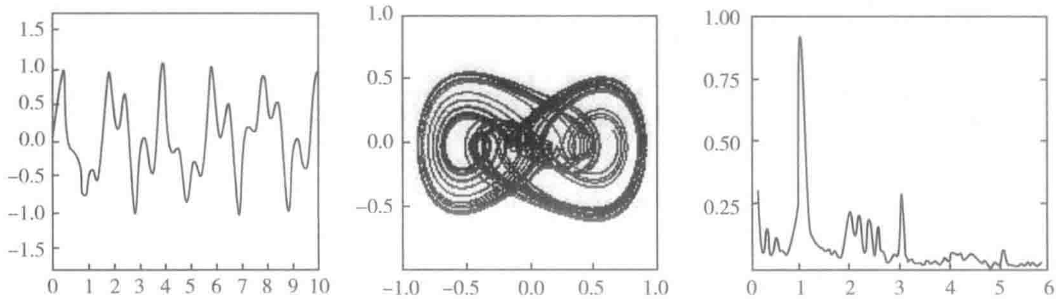


图 1-2　杜芬方程的时域波形图、相轨线图和功率谱图($\alpha=0.3$，$\kappa=-1$，$\mu=1$，$\omega=1.2$，$F=2.5$)



（a）时域波形图　（b）相轨线图　（c）功率谱图

图 1-3　杜芬方程的时域波形图、相轨线图和功率谱图($\alpha=0.3$，$\kappa=-1$，$\mu=1$，$\omega=1.1$，$F=4.5$)



（a）时域波形图　（b）相轨线图　（c）功率谱图

图 1-4　杜芬方程的时域波形图、相轨线图和功率谱图($\alpha=0.3$，$\kappa=-1$，$\mu=1$，$\omega=1.2$，$F=20.5$)

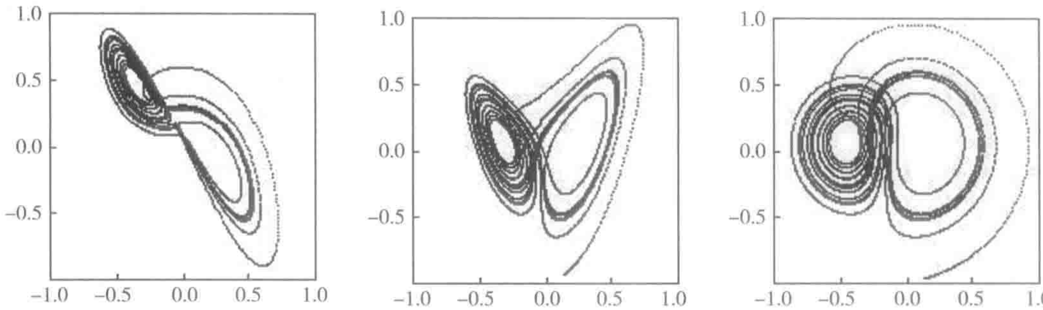
图 1-2 所示是当 $\alpha=0.3$，$\kappa=-1$，$\mu=1$，$\omega=1.2$，$F=2.5$ 时杜芬方程的时域波形图、相轨线图和功率谱图。这是周期运动图像。图 1-3 所示是当 $\alpha=0.3$，$\kappa=-1$，$\mu=1$，$\omega=1.1$，$F=4.5$ 时杜芬方程的时域波形图、相轨线图和功率谱图。这时系统作周期为 2 的运动。图 1-4 所示是 $\alpha=0.3$，$\kappa=-1$，$\mu=1$，$\omega=1.2$，$F=20.5$ 时杜芬方程的时域波形图、相轨线图和功率谱图。此时出现类随机的运动图像，即混沌运动图像。

【例 1-2】　洛伦兹(E. Lorenz)方程的运动图像。

洛伦兹方程是美国气象学家洛伦兹于 1963 年在研究天气的长期预报时提出的描述大气演化的方程：

$$\begin{cases}\dot{x}=a(y-x)\\ \dot{y}=(r-z)x-y\\ \dot{z}=xy-bz\end{cases}\tag{1-2}$$

图 1-5 所示是当系统参数 $a=10$，$r=28$，$b=8/3$ 时的二维相轨线图。描述大气运动状态的相点在二维相平面中形成 8 字形永不重复的轨线。这就是明显的混沌轨迹。其中，在 x-z 平面上的相图即是著名的“蝴蝶效应”图像。



（a）x–y平面　（b）x–z平面　（c）y–z平面

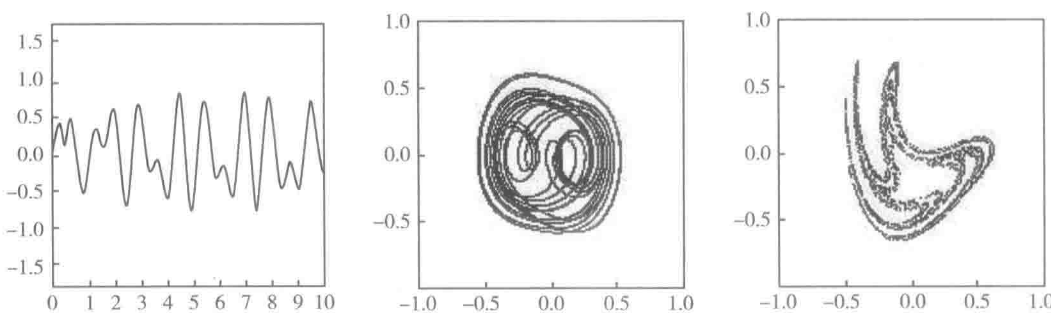
图 1−5　洛伦兹方程的相轨线图

【例 1−3】　范德波尔（Van der pol）方程的运动图像。

范德波尔方程是荷兰工程师范德波尔在 20 世纪 20 年代研究电子管振荡器时首先提出的。范德波尔方程描述的是一种具有非线性阻尼的振荡系统，其非自治系统微分方程如下：

$$\ddot{x}+\alpha(x^2-1)\dot{x}+\omega^2 x=F\sin\omega t \tag{1-3}$$

图 1−6 所示是范德波尔方程的时域波形图、相轨线图和庞加莱映射图。



（a）时域波形图　（b）相轨线图　（c）庞加莱映射图

图 1−6　范德波尔方程的时域波形图、相轨线图和庞加莱映射图

这几个方程都是确定性方程，但在某些参数范围内，系统响应出现了类似随机运动的图像。这就是确定性混沌现象。

1.2　混沌的特征

混沌现象是普遍存在且极其复杂的。它的定常状态不是通常概念下的确定性运动的三种形式之一：静止（平衡）、周期运动和准周期运动，而是一种始终限于一定区域内并且轨道永不重复的、性态复杂的运动。另外，混沌运动具有通常确定性运动所没有的几何和统计特征。与随机运动相比较，混沌运动虽然可以在各态历经的假设下，应用统计的数学定义来描述，然而，此假设尚未被证明。并且，对于同一个系统，在某些参数域内，系统的运动是确定的，如周期运动和准周期运动；而在另一些参数范围内，系统运动又呈现类似随机的运动。参数的改变只是数量的变化，结果却导致运动状态的根本

变化。因而有的学者认为混沌是确定性运动的随机转变，是介于确定性运动和随机性运动之间的桥梁。

混沌运动具有确定性运动的特征：无周期而有序，已发现多条通向混沌的道路、费根鲍姆（M. J. Feigenbaum）普适常数、有界性和对初值的极度敏感性，这些都是随机运动所不具备的特征。一般来说，混沌运动具有如下特征。

① 长期运动对初值的极度敏感性，即长期运动的不可预测性。初始值的微小差别经过一定时间后，可导致系统运动过程的显著差别。

② 运动轨线的往复折叠的无规则性，即局部不稳定和整体稳定特性，也即非周期的有界稳态运动。这是非线性系统的又一特征。对于确定性线性系统的非周期运动，或趋于静止，如强阻尼线性振动；或趋于发散到无穷，如无阻尼线性振子共振。

③ 混沌运动貌似随机，然而，具有与随机运动不同的性质，例如混沌区域无穷层次的自相似结构。

④ 具有宽的傅里叶（Fourier）功率谱、正的李雅普诺夫（Lyapunov）指数和正的测度熵等统计性质。

⑤ 有时有分形结构的奇怪点集，对耗散系统有分数维的奇怪吸引子出现，对保守系统也有奇怪的混沌区域。

1.3　混沌的定义

混沌概念不同于古典哲学与日常用语中的理解。混沌这个古老而又熟悉的词汇最初表示完全缺乏具体形态或系统排列，而如今则常用来表示某种应该有的秩序却没有出现。尽管这个词十分古老，但却没有濒临死亡；相反，由于它在近年来获得了若干既相互关联又相互区别的专门含义，它的重要性已凌驾于许多其他普通词汇之上。这个术语多年来已被众多科学家用来表示现实生活中看起来具有随机行为但符合某一条件的过程，即使其中任何真随机性消失了，它仍然是貌似随机的。

“混沌”或“浑沌”这一术语最早出现在中国和古希腊的神话故事中。后来，在中外文学艺术、宗教与科学著作中不断被使用。几千年来，“混沌”的词义在不同地域文化和不同学科领域中有不同的内涵，混沌的概念也在不断演化。其演化过程和阶段大致可分为以下三个层次。第一层次为古代理解的混沌，主要描述一种自然状态及其演化。如中国古代《三五历》关于盘古开天地之说：“未有天地之时，混沌如鸡子，盘古生其中，万八千岁，天地开辟，阳清为天，阴浊为地”。混沌的英文为 chaos，来自古希腊语 χaos。其原意是指先于一切事物而存在的广袤虚无的天地空间。古希腊神话诗人赫西俄德（约公元前 8 世纪）在《神谱》中说：“万物之前先有混沌，而后生广阔之大地”。可见，古代的混沌状态的主要特征是蕴含万物的浑然一体。混沌是一种自然状态，一种演化形态，一种思维方式。第二个层次产生于近代。以牛顿力学为旗帜的近代科学把混沌等同于混乱、无序状态。牛顿力学是关于运动的学说，而不是关于演化的理论。近代混沌的观点抛弃了古代混沌朴素的辩证思想。牛顿理论认为，确定性系统的行为是完全确定的、可以预言的，不确定性行为只会产生在随机系统中。混沌概念的第三个层次产生于现代非线性动力学。近 30 年来的研究成果表明，确定性系统也会发生奇怪的、复杂

的、类似随机的行为。这种行为既非远古的混沌概念，也非一般科学和日常用语所说的混沌。现代非线性动力学所说的混沌是一个有严格定义的科学词汇。

定义虽然往往是研究问题的基础，然而，目前在没有完全了解和掌握混沌现象及其问题的时候，给出混沌的定义是不容易的。例如，人们一直研究的振动就很难给出一个适当的定义。通俗的说法为，混沌是指发生在确定性系统中貌似随机的不规则运动。可以用以下两个定义来描述混沌运动。

定义 1-1　不稳定的过渡状态导致的始终有限的定常运动称为混沌运动。

定义 1-2　确定性动力系统中由于对初始条件的敏感性导致的对长期行为预测的不可靠性的运动。

比较严格但对于初学者来说难于理解的是李-约克(Li-Yorke)在数学上给出的定义。

李-约克定义：对于连续映射或点映射 F：$[a, b]\times R\to[a, b]$，$(x, \lambda)\to F(x, \lambda)$称为是混沌的，如果：

① 存在一切周期的周期点，即 F 的周期点的周期无上界；

② 存在不可数子集 $S\subset[a, b]$，S 不含周期点，使

$$\lim_{n\to\infty}\inf|F^n(x, \lambda)-F^n(y, \lambda)|=0,\ x,\ y\subset S,\ x\neq y \tag{1-4}$$

$$\lim_{n\to\infty}\sup|F^n(x, \lambda)-F^n(y, \lambda)|>0,\ x,\ y\subset S,\ x\neq y \tag{1-5}$$

$$\lim_{n\to\infty}\sup|F^n(x, \lambda)-F^n(p, \lambda)|>0,\ x\subset S,\ p\text{ 为周期点} \tag{1-6}$$

这一定义针对一个子集提出，表明了混沌运动的重要特征：

① 存在可数无穷多个稳定的周期轨道；

② 存在不可数无穷多个稳定的非周期轨道；

③ 至少存在一个不稳定的非周期轨道。

定义中第一个极限说明子集中的点 $x\in S$ 无限接近，第二个极限说明该子集中的点 $x\in S$ 又相当分散，第三个极限说明该子集不会趋于任意周期点。按照此定义，作混沌运动的点的轨迹，既无限离开又无限接近，只能在整个状态空间彼此远离而又折返，反复伸展与折叠，非周期而又有界。

1.4　混沌学研究简史

最早认识到确定性系统中存在这种奇怪的运动并对它进行讨论的是法国数学家庞加莱(J. H. Poincaré)，他首先从几何和拓扑的观点对天体力学问题进行了定性的研究，它的工作和思想对非线性科学的发展有着深远的影响。1903 年，庞加莱从经典力学和微分方程定性理论的研究中，提出了动力系统的概念，首次提出了混沌存在的可能性。他在《科学与方法》一书中提出了庞加莱猜想，他在研究能否从数学上证明太阳系的稳定性问题时发现，即使只有三个星体的模型，即三体模型，在一定范围内仍可能产生明显的随机结果。他发现，三体相互作用能产生非常复杂的行为，这其实就是所谓确定性系统产生的混沌运动。庞加莱在《科学的价值》中写道：“我们觉察不到的极其轻微的原因决定着我们不能不看到的显著结果……可以发生这样的情况：初始条件的微小差别在最后的现象中产生了极大的差别；前者的微小误差促成了后者的巨大误差，于是预言

变得不可能了。”他的描述实际上已经蕴含了“确定性系统具有内在随机性”，以及混沌对于初始条件的极端敏感性这一混沌现象的重要特征，但他当时并没有明确提出混沌的概念。

经历了半个世纪的知识积累后，混沌学研究取得了第一个重大突破。1954 年，苏联数学家柯尔莫哥洛夫(A. N. Kolmogorov)研究了哈密顿(W. R. Hamilton)函数微小变化时条件周期运动的保持问题，他在阿姆斯特丹举行的国际数学大会上发表了《哈密顿函数中微小变化时周期运动的保持》的论文，这篇论文被公认为具有划时代意义的科学文献。在该文中，他预测了不仅耗散系统有混沌，而且保守系统也有混沌。他研究了解析哈密顿系统的不可积系统，若把不可积视为可积哈密顿函数的扰动，则在小扰动条件下，系统运动图像与可积系统基本一致；当扰动足够大时，系统图像就发生了性质改变，成为混沌系统。1963 年，阿诺德(V. I. Arnold)和莫泽尔(J. K. Moser)对柯尔莫哥洛夫的研究成果给出了严格的数学证明，构成了研究不可积哈密顿系统混沌的 KAM 定理。KAM 定理被公认为创建混沌学理论的历史性标记。

混沌学研究的第二个重大突破，发生在现实世界的耗散系统中。1963 年，美国气象学家洛伦兹在《大气科学》杂志上发表的《决定性的非周期流》(*Deterministic Non-periodic Flow*)的著名论文中指出，在三阶非线性自治系统中，可能会出现混乱解，发现了混沌研究的第一个奇怪吸引子——洛伦兹吸引子。这是在耗散系统中，一个确定性方程导致混沌解的第一个实例。2000 年，《自然》杂志发表的论文 *The Lorenz Attractor Exists* 从数学上严格证明了在自然界中存在洛伦兹吸引子。洛伦兹研究的是天气预报问题，他提出在气候不能精确重演与长期天气预报的不可能性之间必然存在一种联系，即非周期性与不可预见性之间的联系。1972 年，洛伦兹在华盛顿举行的一个会议上宣读的一篇论文的题目是《在巴西的蝴蝶拍打翅膀会引发得克萨斯州的一场龙卷风吗?》，形象地描述了混沌运动对初始条件的敏感性，即著名的“蝴蝶效应”。洛伦兹在《大气科学》杂志上发表的《决定性的非周期流》一文中提出的天气预报数学模型的相轨线的二维投影的确像是一只张开的蝴蝶翅膀。洛伦兹的研究成果成为后来研究耗散系统混沌现象的经典文献。他揭示了一系列混沌运动的基本特征，如确定性非周期性、对初值的敏感依赖性、长期行为的不可预测性等，他为混沌研究提供了一个重要的研究模型，并最先在计算机上采用数值方法，为混沌研究开辟了一条重要道路。从洛伦兹在简单的数学模型中发现混沌现象开始，标志着一门新兴的科学——混沌科学——的诞生。

20 世纪 70 年代，混沌学正式创立，形成在多个学科领域同时开展混沌研究的世界性热潮。1971 年，法国数学物理学家茹勒(D. Ruelle)和荷兰学者特肯(F. Takens)合作发表了著名论文《论湍流的本质》，第一次将混沌引入湍流研究，证明了朗道(L. D. Landau)关于湍流发生机制的权威理论的不正确性，并首次提出了“奇怪吸引子”这一名词，他们把混沌描述为“一簇曲线，一团斑点，有时呈现为光彩斑斓的烟云，有时呈现为令人生畏的花簇”，混沌“有数不清的形式有待探索和发现”。正是茹勒和特肯发现了耗散系统的奇怪吸引子及第一条通向混沌的道路。

1973 年，日本物理学家上田皖亮(Y. Ueda)在利用计算机研究一种变形的杜芬方程过程中，发现了确定性非线性系统的一些奇怪性态，即混沌性态，后来被称为上田皖亮

吸引子或日本吸引子。

1975 年，洛伦兹关于混沌理论的开创性研究被冷落 12 年后，美籍华人学者李天岩和美国数学家约克(J. A. Yorke)在《美国数学月刊》杂志上发表了一篇著名论文，提出了“周期三意味着混沌”的著名论断，即李-约克定理，揭示了从有序到混沌的演变过程。在这篇震动整个学术界的论文中率先引入 chaos 一词，并给出混沌的数学定义。Chaos 一词的引入，为各学科的混沌现象研究树立了一面统一的旗帜，由此开始了混沌研究的热潮。

1976 年，美国生物学家梅(R. May)在《自然》杂志上发表《具有极复杂的动力学的简单数学模型》的文章，以一维单峰映射(即所谓帐篷或蒙古包映射)为对象，指出，简单的确定性数学模型也可以产生类似随机的行为。他在研究生物种群演化过程中，建立了现在通称为逻辑斯蒂克(Logistic)方程的虫口模型，发现了倍周期分叉现象，汇集了一批混沌学词汇，促进了不同领域混沌学研究的深入。

1978 年，美国物理学家费根鲍姆在《统计物理学杂志》上发表了《一类非线性变换的定量的普适性》一文，提出了著名的费根鲍姆常数。将普适性、标度性、重正化群方法引入混沌研究，给出了又一条通向混沌的道路。关于普适性的研究为混沌学的确立奠定了基础，将混沌学研究从定性分析推进到定量计算阶段，成为混沌学研究的一个重要里程碑。

早在 1967 年，美国人曼德布罗特(B. B. Mandelbrot)在《科学》杂志上提出“英国的海岸线有多长”，并明确回答是“不确定的”，它取决于测量的尺度。这篇文章明确表述了分形的新思想。1980 年，曼德布罗特利用计算机绘出了世界上第一张曼德布罗特集的混沌图像，建立了分形与混沌的联系。1982 年，曼德布罗特出版了第一本关于分形的专著《自然界的分形几何》(*Fractal Geometry of Nature*)，他的研究奠定了分形与分形几何基础，将混沌研究进一步推向前进。

20 世纪 80 年代以来，混沌科学得到进一步发展，关于混沌问题的杂志大量出版，多次召开混沌研究的学术会议，许多大学和科研机构积极开展有关混沌的研究工作。特肯、帕卡德(Packard)、法默(Farmer)等人根据惠特尼(H. Whitney)拓扑嵌入定理，提出重构动力学轨道相空间的延迟法。格拉斯贝格尔(Grassberger)、普罗卡恰(Procaccia)首次运用相空间重构法，从实验数据时间序列计算出实验系统的奇怪吸引子的统计特征，如分维数、李雅普诺夫指数、柯尔莫哥洛夫熵等混沌统计特征量，使混沌理论进入实际应用阶段。

著名物理学家福特(J. Ford)认为，混沌是 20 世纪物理学继量子力学和相对论之后的第三次大革命。自 1975 年 chaos 作为专有名词首次出现在科学文献中以来，正以前所未有的速度迅猛发展为一门有丰富的非线性物理背景和深刻的数学内涵的现代科学。现今，混沌研究已经发展成为具有明确研究对象和基本课题、独特概念体系和方法论框架的新学科。

工程技术领域中各学科对混沌问题的研究与基础科学并驾齐驱，毫不逊色。混沌研究既是数学的一门新分支，也是物理学的一门新分支，更是工程技术科学中新的研究领域。20 世纪 80 年代以来，混沌已经成为力学界和振动工程界各种国际会议的重要论题

之一。这里仅举几个例子。

1979 年，美国的霍梅斯(P. J. Homes)进行了弯曲薄片在磁场中受简谐激励的振动实验，发现了激励频率和力幅作为参数超过一定的值后，会出现混沌振动。

1980 年，意大利人弗兰切斯基尼(V. Franceschini)利用计算机数值模拟研究流体从平流到湍流的过渡过程时，发现了倍周期分叉现象，验证了费根鲍姆常数。

1981 年，美国的林赛(P. S. Linsay)第一次通过实验验证了费根鲍姆常数。1981 年，在丹麦召开的第 16 届国际理论与应用力学大会的主要论题之一即是混沌问题。

1989 年，在苏联召开的第 4 届国际非线性力学会议上，重点研讨混沌问题。

1991 年，在美国召开了首届实验混沌研讨会。

20 世纪 90 年代以来，混沌科学与其他科学互相渗透。混沌在许多科学领域中都得到了广泛的应用。近一二十年来，混沌学研究方兴未艾，有关混沌的文献数量成几何级数增长，有关的研究工作在各个领域展开，专门研究混沌的文献之多已使人们几乎无法熟悉其中的许多著作。郝柏林仅在《关于混沌的参考文献》中，就列出了 7460 条目录。自 80 年代以来，我国学者出版了上百种有关混沌的著作，发表的研究成果不可胜数，对混沌问题的研究作出了重要的贡献。

1.5　研究混沌的意义

混沌学从创立至今，仅仅经过 30 余年，其对科学与社会的发展已经产生了巨大影响。混沌学研究涉及的领域不仅包括数学、物理学、力学、化学、生物学、气象学、人体生理学与医学等自然科学学科和机械、电子、振动、化工等工程技术，也包括经济学、社会学等人文学科。其研究成果几乎渗透和影响到现代科学的整个学科体系及人类社会的各个方面。

(1) 混沌对物理学的影响

混沌研究影响最深的领域是物理学。从牛顿 1680 年在伦敦皇家学会发表《自然哲学的数学原理》算起，近代物理学已有 300 余年的历史。在这 300 余年中，物理学经历了两次革命。第一次是以牛顿为代表的经典力学的创立。在数学上对应的是牛顿-莱布尼兹微积分的发明。牛顿力学的创立使人类在认识自然的道路上取得了巨大的成就。同时也使确定论成为物理学中居统治地位的观点，即只要知道各种运动的初始条件，就可以决定未来的一切。确定论的代表论点是法国科学家拉普拉斯的名言：只要知道初始条件，就可以决定未来的一切。物理学的第二次革命是量子力学、相对论和放射性。这是近代物理学发展史上的又一次突破。在数学上对应的则是概率论的创立。量子力学以微观世界为研究对象。量子力学中的海森伯格测不准原理指出，在微观世界里的有些量是永远测不准的，也就意味着，这个世界的有些量是不能精确预测的。而混沌现象的发现被称为继相对论和量子力学以来基础科学的第三次大革命。混沌现象首先在天体力学中被发现，继而对经典力学的基本假设提出了挑战。天体力学被认为决定论科学的典范。庞加莱在研究太阳系的三体问题时，发现确定性方程的某些解的不可预见性，实际上就是动力学混沌现象。混沌现象在天体力学中改变了人们传统的决定论观念。混沌现象的发现给确定论以巨大的冲击。混沌现象明确表明，确定的系统可以出现随机的结果。混