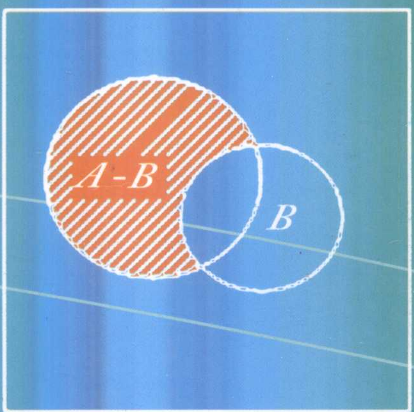
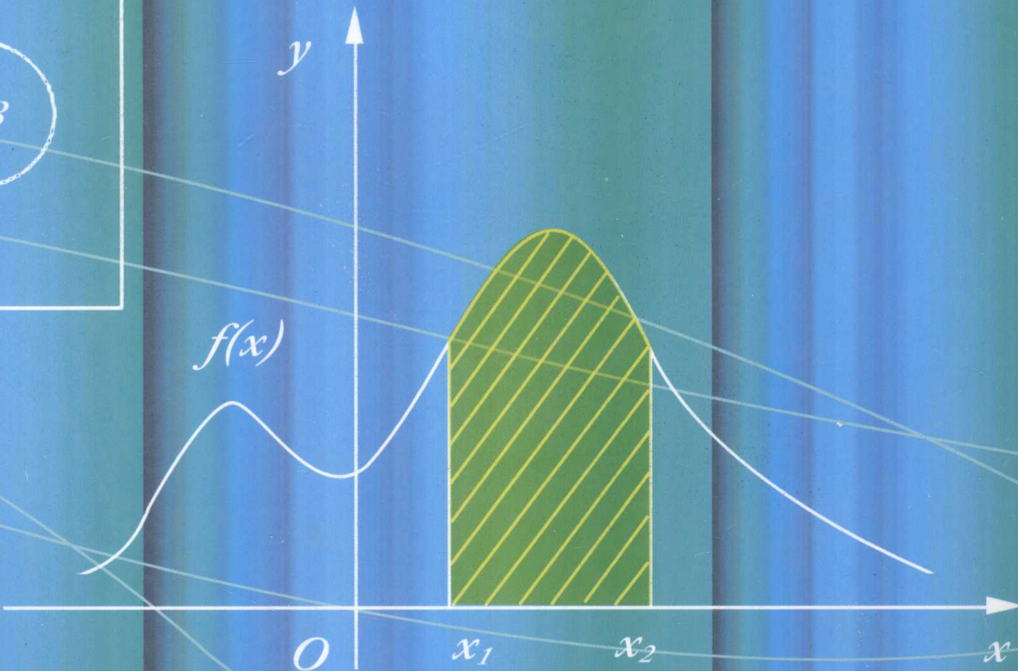
高等院校“十二·五”规划教材

# 概率论与数理统计

李泽华　谢　瓯　主编




廣東省出版集團
广东科技出版社
（全国优秀出版社）

高等院校“十二·五”规划教材

# 概率论与数理统计

李泽华　谢　瓯　主编

廣東省出版集團
广东科技出版社
·广　州·

图书在版编目（CIP）数据

概率论与数理统计/李泽华，谢瓯主编．—广州：广东科技出版社，2010.8

ISBN 978－7－5359－5299－8

Ⅰ.①概… Ⅱ.①李… ②谢… Ⅲ.①概率论②数理统计 Ⅳ.①021

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2010）第 106321 号

---

责任编辑：谢志远
封面设计：林少娟
责任校对：SHEN
责任印制：LHZH
出版发行：广东科技出版社
（广州市环市东路水荫路 11 号　邮码：510075）
E－mail：gdkjzbb@21cn.com
http：//www.gdstp.com.cn
经　　销：广东励耘教育图书有限公司
（地址：广州市越秀区五羊新城寺右二马路 23－25 冠城大厦 省图书批发中心 215 室
邮编：510600　电话：020－87393354　87392513　传真：87392513）
排　　版：广州科新电脑技术服务中心
印　　刷：广州锦昌印务有限公司
规　　格：787mm×1 092mm　1/16　印张 16.75　字数 335 千
版　　次：2010 年 8 月第 1 版
2010 年 8 月第 1 次印刷
印　　数：3000 册
定　　价：30.00 元

---

# 编 委 会

**主　编：** 李泽华　谢　瓯

**副主编：** 陈入云　李　朗　利小玲　蒋　辉　杨　霞　刘文昱

**编　委：** 陈入云　李　朗　利小玲　吴小腊　蒋　辉　杨　霞　刘文昱　李双成　李文波

**主　审：** 倪科社　郭　军

# 内容提要

本书主要内容包括：随机事件和概率，随机变量及其分布，多维随机变量及其分布，随机变量的数字特征，大数定律和中心极限定理，数理统计的基本概念，参数估计，假设检验，方差分析和回归分析，Excel 简介及其在数理统计中的应用。全书共 10 章，前 7 章涵盖了《全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲》中关于概率论与数理统计的所有知识点，后 3 章是为了知识的完备性和应用性而编写的。据调查，熟悉 Excel 就能应对日常工作中的常见统计问题。

本书在基本概念的叙述上，坚持直观理解与严密性相结合，深入浅出；例题丰富，突出实用；习题选配全面有层次，习题分 A，B 两级，习题 A 为基本题，习题 B 为学有余力的学生准备；每章后有知识小结，帮助读者整体把握知识。

本书可作为高等学校理工科类、经济管理类各专业的概率统计教材或教学参考书和硕士研究生入学考试的参考书，也可作为各类成人教育相应课程的教材或教学参考书，还可以作为具备相当数学准备（初等微积分）的读者作自修之用及相关专业技术人员的参考书。

# 前　言

概率论与数理统计是研究随机现象统计规律性的一门数学学科，它广泛地应用于自然科学、社会科学以及工农业生产中，并与其他学科相互结合、相互渗透。目前，该课程已成为我国高等院校理工科类、经济管理类等各专业的必修课，同时也是这些专业硕士研究生入学考试的必考内容。

本书是根据教育部制定的本科教学大纲的要求，紧扣硕士研究生入学考试大纲，并以此规范概率统计中的术语与记号，结合作者们多年的教学实践和教学研究经验，广泛汲取各版本教材改革之所长，并兼顾理工科类、经济管理类等各专业教学及本学科自身特点而编写的，书中对于复杂难懂的教学内容都给出了直观的解释。

在教材的编写过程中，为了实现传授知识和培养能力双重功能，我们兼顾知识的系统结构和应用结构，力求通过这两种结构的成功建构，在相辅相成、协调一致中达到阶段性的和谐统一。另外，我们力争做到由浅入深，语言简练，通俗易懂，既少而精，便于教师教学也便于学生自学，但不失对基本理论的要求，这样可为学生进一步学习概率统计更高一级的课程打下必要而坚实的基础。为此，我们贯彻以下几个原则：

1. 保持理论的系统性、知识的完备性；
2. 强调概念的直观理解；
3. 突出方法的应用性；
4. 知识点叙述简练，例题、练习题量适中有梯度；
5. 章前有学习要求，章后有知识小结。

另外，本书还大量引用了应用于各个领域的随机现象的实际例题，特别是有典型应用价值的例题，以体现本书的实用性特点。

本书每章都有学习基本要求和学习小结，对所学知识进行简单归纳和整理，以帮助读者从宏观上把握各章知识；每章都配有适量习题，便于学生自我检验和巩固提高；书末附有习题参考答案。

本书的内容比较丰富，建议教师根据学时作适当处理。全书共10章，前7章是硕士研究生入学考试的范围，建议教师全部讲解，后3章是为了知识的完备性和应用性而编写的，建议教师分专题讲解。特别是第十章，虽然，熟悉Excel就能应对日常工作中的常规统计问题，但是，熟练应用Excel解决统计问

题还得靠学生课后完成，建议教师把这一部分当成课程设计或课程实验让学生完成。

本书由华南农业大学李泽华、李朗、利小玲、吴小腊，广东海洋大学谢鸥、陈入云，石河子大学杨霞、刘文昱、李双成，惠州学院蒋辉、李文波等老师通力合作编写的。

由于作者水平有限，书中错漏之处在所难免，恳请读者特别是使用本教材的教师批评指正，以便使本教材在今后教学实践的基础上更加完善。

编　者

2010 年 7 月

# 目　录


## 第一章　随机事件和概率

本章学习要求 …… (1)
第一节　随机事件 …… (1)
　一、随机试验 …… (1)
　二、样本空间 …… (2)
　三、随机事件 …… (3)
　四、事件之间的关系与运算 …… (3)
第二节　概率的定义 …… (6)
　一、概率的统计定义 …… (6)
　二、概率的公理化定义及概率的性质 …… (7)
　三、概率的古典定义 …… (10)
　四、概率的几何定义 …… (13)
第三节　条件概率、全概率公式和贝叶斯公式 …… (14)
　一、条件概率 …… (14)
　二、乘法公式 …… (16)
　三、全概率公式 …… (17)
　四、贝叶斯公式 …… (18)
第四节　事件的独立性 …… (20)
第五节　伯努利（Bernoulli）概型 …… (22)
本章小结 …… (24)
习题A …… (25)
习题B …… (26)

## 第二章　随机变量及其分布

本章学习要求 …… (28)
第一节　随机变量 …… (28)
第二节　离散型随机变量及其分布律 …… (30)
　一、两点分布（0－1分布） …… (31)
　二、二项分布 …… (31)
　三、泊松分布 …… (33)
　四、几何分布 …… (34)
　五、超几何分布 …… (35)

第三节　随机变量的分布函数与连续型随机变量 …………………… (35)
一、均匀分布 …………………… (39)
二、指数分布 …………………… (40)
三、正态分布 …………………… (41)
第四节　随机变量函数的分布 …………………… (43)
本章小结 …………………… (46)
习题 A …………………… (47)
习题 B …………………… (50)

## 第三章　多维随机变量及其分布

本章学习要求 …………………… (52)
第一节　n 维随机变量及其联合分布 …………………… (52)
第二节　边缘分布 …………………… (57)
第三节　条件分布 …………………… (60)
第四节　相互独立的随机变量 …………………… (63)
第五节　两个随机变量的函数的分布 …………………… (66)
一、$Z = X + Y$ 的分布 …………………… (66)
二、$Z = \max\{X,Y\}$，$Z = \min\{X,Y\}$ 的分布 …………………… (69)
三、$Z = \frac{Y}{X}$ 的分布 …………………… (70)
本章小结 …………………… (72)
习题 A …………………… (73)
习题 B …………………… (74)

## 第四章　随机变量的数字特征

本章学习要求 …………………… (75)
第一节　数学期望 …………………… (75)
一、离散型随机变量的数学期望 …………………… (75)
二、连续型随机变量的数学期望 …………………… (79)
三、数学期望的性质 …………………… (81)
第二节　方差 …………………… (82)
第三节　协方差和相关系数 …………………… (88)
第四节　矩和协方差矩阵 …………………… (91)
本章小结 …………………… (93)
习题 A …………………… (94)
习题 B …………………… (96)

## 第五章　大数定律和中心极限定理

本章学习要求 …………………… (98)
第一节　大数定律 …………………… (98)

第二节　中心极限定理 …………………………………………………………………… (100)
本章小结 ………………………………………………………………………………… (104)
习题 A …………………………………………………………………………………… (105)
习题 B …………………………………………………………………………………… (105)

## 第六章　数理统计的基本概念

本章学习要求 …………………………………………………………………………… (107)
第一节　基本概念 ……………………………………………………………………… (108)
　　一、总体与样本 …………………………………………………………………… (108)
　　二、统计量 ………………………………………………………………………… (109)
　　三、经验分布函数 ………………………………………………………………… (111)
第二节　抽样分布 ……………………………………………………………………… (112)
　　一、$\chi^2$ 分布 ………………………………………………………………… (113)
必考
　　二、$t$ 分布 ……………………………………………………………………… (114)
　　三、$F$ 分布 ……………………………………………………………………… (115)
　　四、正态总体样本均值和方差的分布 ……………………………………………… (116)
本章小结 ………………………………………………………………………………… (118)
习题 A …………………………………………………………………………………… (119)
习题 B …………………………………………………………………………………… (120)

## 第七章　参数估计

本章学习要求 …………………………………………………………………………… (123)
第一节　点估计 ………………………………………………………………………… (123)
　　一、矩估计法 ……………………………………………………………………… (124)
务必掌握
　　二、极大似然估计法 ……………………………………………………………… (126)
第二节　估计量的评选标准 …………………………………………………………… (132)
　　一、无偏性 ………………………………………………………………………… (132)
　　二、有效性 ………………………………………………………………………… (133)
　　三、相合性 ………………………………………………………………………… (133)
第三节　区间估计 ……………………………………………………………………… (134)
第四节　正态总体均值和方差的区间估计 …………………………………………… (136)
　　一、单个正态总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 的情形 ………………………………………… (136)
　　二、两个正态总体 $N(\mu_1,\sigma_1^2)$，$N(\mu_2,\sigma_2^2)$ 的情形 ……………………… (138)
第五节　0－1 分布参数的区间估计 …………………………………………………… (140)
第六节　单侧置信区间 ………………………………………………………………… (141)
本章小结 ………………………………………………………………………………… (142)
习题 A …………………………………………………………………………………… (142)
习题 B …………………………………………………………………………………… (144)

## 第八章　假设检验

本章学习要求 …………………………………………………………………………… (146)

第一节　假设检验的基本概念和基本思想 …… (146)
第二节　正态总体均值的假设检验 …… (149)
一、单个正态总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 均值 $\mu$ 的检验 …… (150)
二、两个正态总体均值差的检验 …… (151)
第三节　正态总体方差的假设检验 …… (153)
一、单个总体的方差 $\sigma^2$ 的检验 …… (153)
二、两个总体方差比 $\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ 的假设检验 …… (154)
第四节　分布拟合检验 …… (157)
一、总体可分为有限类，且总体分布不含未知参数 …… (157)
二、总体可分为有限类，但总体分布中含有未知参数 …… (158)
三、总体为连续分布的情形 …… (160)
本章小结 …… (161)
习题 A …… (162)
习题 B …… (163)

## 第九章　方差分析与回归分析

本章学习要求 …… (166)
第一节　单因素试验的方差分析 …… (166)
一、单因素试验方差分析问题的提法 …… (167)
二、平方和的分解 …… (168)
三、检验方法 …… (169)
第二节　双因素试验的方差分析 …… (174)
一、问题的提出 …… (174)
二、平方和的分解 …… (175)
三、检验方法 …… (176)
第三节　一元线性回归 …… (179)
一、回归模型 …… (179)
二、一元线性回归 …… (180)
三、可化为一元线性回归的例子 …… (187)
第四节　多元线性回归 …… (188)
一、多元线性回归模型 …… (189)
二、$\beta$ 的最小二乘估计 …… (189)
三、多项式回归模型 …… (191)
本章小结 …… (191)
习题 A …… (191)
习题 B …… (193)

## 第十章　Excel 简介及在数理统计中的应用

本章学习要求 …… (195)

第一节 Excel 简介与基本操作 …………………………………… (195)
一、Excel 简介 …………………………………… (195)
二、Excel 工作界面 …………………………………… (196)
三、数据输入 …………………………………… (198)
四、编辑工作表 …………………………………… (198)
五、使用公式和函数 …………………………………… (201)
六、分析工具库 …………………………………… (205)
七、常用的数学与统计函数 …………………………………… (207)
第二节 Excel 在统计图表中的应用 …………………………………… (209)
第三节 Excel 在参数估计中的应用 …………………………………… (215)
第四节 Excel 在假设检验中的应用 …………………………………… (217)
一、单个正态总体的检验 …………………………………… (217)
二、两正态总体的检验 …………………………………… (218)
三、假设检验中的 $p$ 值法 …………………………………… (219)
第五节 Excel 在方差分析与回归分析中的应用 …………………………………… (221)
一、方差分析 …………………………………… (221)
二、回归分析 …………………………………… (223)
附表 1 泊松分布数值表 …………………………………… (227)
附表 2 标准正态分布表 …………………………………… (230)
附表 3 $\chi^2$ 分布表 …………………………………… (231)
附表 4 $t$ 分布表 …………………………………… (234)
附表 5 $F$ 分布表 …………………………………… (236)
附表 6 常见的概率分布表 …………………………………… (242)
习题参考答案 …………………………………… (244)
参考文献 …………………………………… (254)

# 第一章 随机事件和概率

**本章学习要求**

1. 了解样本空间的概念，理解随机事件的概念，掌握事件之间的关系及运算.

2. 理解概率、条件概率的概念，掌握概率的基本性质，会计算古典型概率和几何型概率，掌握概率的加法公式、乘法公式、全概率公式及贝叶斯（Bayes）公式.

3. 理解事件独立性的概念，掌握用事件独立性进行概率计算；理解独立重复试验的概念，掌握计算事件概率的方法.

在自然界与人类社会生活中，存在着两类截然不同的现象：一类是在一定的条件下必然出现（或不出现）某种结果的现象，我们称之为**确定性现象或必然现象**. 例如：在 1 个标准大气压下，水加热到 100℃必然沸腾；在没有外力的作用下，作匀速直线运动的物体必然继续作匀速直线运动等等. 这类现象的共同特点是：在相同的条件下，其结果必然出现且唯一. 对这一类现象，人们能在试验之前准确预言其结果. 另一类是在相同的条件下，并不总是出现相同的结果，其结果是不确定的. 例如：某地区的年降雨量；打靶射击时，弹着点离靶心的距离；晚间收看某一电视剧的人数等等. 这类现象的共同特点是：在相同的条件下，重复进行试验或观测，其结果不止一个，在试验之前，哪一个结果出现，人们事先无法确定. 我们称这样的现象为**随机现象**（random phenomenon）或**偶然现象**. 对这一类现象，人们无法在试验之前准确预言其结果. 另外，在不确定的现象中，还有一类不能重复试验或观测的现象. 例如：人们无法确定 2050 年会不会爆发世界大战，明年我国的经济增长速度是多少等等. 一般地，这种一次性的不可重复的现象也归属于随机现象.

对于随机现象，人们通过大量的实践发现：在相同的条件下，虽然某种试验结果在一次试验或观察中是否出现是不确定的，但在大量重复试验中却呈现出某种规律性，这种规律性称为**统计规律性**. 例如：在投掷一枚硬币时，其结果可能出现正面，也可能出现反面，预先作出确定的判断是不可能的，但是假如硬币均匀，直观上出现正面与出现反面的机会应该相等，即在大量的试验中出现正面的机会应为 50%.

**概率论与数理统计就是研究随机现象统计规律性的一门数学学科**. 它主要研究能大量重复的随机现象，但也十分注意研究不能重复的随机现象.

## 第一节 随机事件

### 一、随机试验

我们遇到过各种各样的试验. 比如物理、化学、生命科学中的实验，以及人们对自然和社会的观察等等都是试验. 一般地，在一定的条件下，对自然现象与社会现象的观察或实验称为**试验**（experiment）. 试验是科学研究和工程技术进步的基础.

通常，在确定的条件下进行固定的试验，试验的结果基本上会是相同的，此时，人们常

常可以控制那些对试验结果有影响的变量的取值以达到预期的目的. 然而，在现实世界中，有许多试验人们不可能断定或控制一些变量的取值以确保某个试验结果出现. 也就是说，即使试验的条件都是相同的，但每一次试验的结果也可能不同，这样的试验称为**随机试验**(random experiment)，随机试验常用字母 $E$ 等表示. 下面举出一些例子：

$E_1$：抛一枚硬币，观察正面 $H$、反面 $T$ 出现的情况. 显然，结果是集合 $\{H,T\}$ 的一个元素.

$E_2$：将一枚硬币连续抛两次，观察试验的结果. 这时，所有可能的结果为 $\{HH,HT,TH,TT\}$.

$E_3$：抛一枚骰子，观察出现的点数. 试验的结果为集合 $\{1,2,3,4,5,6\}$ 中的某一个数.

$E_4$：测量一个工人生产的电灯泡的寿命，试验的结果是 $t$ 小时. 如果假定灯泡的寿命不超过 5 000 小时，则 $t$ 是区间 $[0,5\,000]$ 中的某个数值.

$E_5$：记录某地一昼夜的最高温度和最低温度，等等.

本书以后提到的试验都是随机试验. 我们是通过研究随机试验来研究随机现象的.

## 二、样本空间

对一个随机试验而言，其一切可能的结果组成一个集合 $\Omega$，称为该试验的**样本空间**(sampling space). 样本空间的每一个最基本的结果，即样本空间的元素 $\omega$，称为**样本点**(sampling point). 例如，上面 5 个随机试验的样本空间分别为：

$\Omega_1=\{H,T\}$；其中 $H$ 表示正面，$T$ 表示反面.

$\Omega_2=\{HH,HT,TH,TT\}$；

$\Omega_3=\{1,2,3,4,5,6\}$；

$\Omega_4=\{t\mid 0\leqslant t\leqslant 5\,000\}$；

$\Omega_5=\{(x,y)\mid T_0\leqslant x\leqslant y\leqslant T_1\}$；这里 $x$ 表示最低温度，$y$ 表示最高温度，并设这一地区的温度不会小于 $T_0$，也不会大于 $T_1$.

【注】① 样本空间是一个集合，它由样本点构成. 其表示方法就是集合的表示，可以用列举法，也可以用描述法.

② 在样本空间中，样本点可以是一维的，也可以是多维的；可以是有限个，也可以是无限个.

③ 对于一个随机试验而言，样本空间并不唯一. 在同一试验中，当试验的目的不同时，样本空间往往是不同的. 例如，在运动员投篮的试验中，若试验的目的是考察命中与否，则样本空间为 $\Omega=\{$中,不中$\}$；若试验的目的是考察得分情况，则样本空间为 $\Omega=\{$0 分，1 分，2 分，3 分$\}$ 等.

④如果一个样本空间仅有有限个样本点，如 $\Omega_1,\Omega_2,\Omega_3$ 等，则称为有限样本空间. 如果有如自然数 1，2，3，…那样多的点，则称为可数[①]的无限样本空间. 如果样本点落在一个

---

① 可数与不可数：集合论中，一个集合中元素的个数称为**势**，势为有限数的集称为**有限集**，势为无穷大的集称为**无限集**. 两个集合的势相同，称两个集合**对等**. 在无限集中，凡是与自然数集对等的集称为**可数集**，也称**可列集**，因此，可数与可列是同一个概念，不是可数集的无限集称**不可数集**. 直观地说，可数集是一个包含有无穷多个元素的集合，集合中的元素能按某种方式像自然数一样，能一个一个地数下去. 例如，偶数集、奇数集、整数集等都是可数集，但实数轴上的任何连续的区间都不是可数集，它们都是不可数集.

区间内，如 $\Omega_4,\Omega_5$ 等，则称为不可数的无限样本空间．当一个样本空间是有限的或可数的无限空间时，一般称为**离散样本空间**．一个不可数的无限样本空间称为**非离散样本空间**．

## 三、随机事件

通常，称样本空间 $\Omega$ 的一个子集 $A$，即一些可能结果的一个集合，为一个**随机事件**（random event），简称**事件**．在每次试验中，当且仅当子集 $A$ 中的一个样本点出现时，称事件 $A$ 发生．由一个样本点构成的集合称为**基本事件**（basic event）；由多个样本点构成的集合称为**复合事件**（composite event）．

例如，在抛骰子的试验中，有6个基本事件 $\{1\},\{2\},\{3\},\{4\},\{5\},\{6\}$．事件 $A$:“抛出偶数点”，则 $A=\{2,4,6\}$．它包含2,4,6这3个样本点，是一个复合事件．另外，“出现点2”或“出现点4”就意味着事件 $A$ 发生，并不要求 $A$ 的每一个样本点都出现．

样本空间 $\Omega$ 也是其自身的一个子集，它包含所有的样本点，在每次试验中它总是发生的，称 $\Omega$ 为**必然事件**（certain event）．空集 $\Phi$ 不包含任何样本点，在每次试验中都不发生，称 $\Phi$ 为**不可能事件**（impossible event）．

例如，在上述抛骰子的试验中，“点数小于7”是必然事件，“点数大于6”是不可能事件．

【注】严格地说，必然事件与不可能事件反映了确定性现象，可以说它们并不是随机事件，但为了研究问题的方便，我们把它们作为特殊的随机事件对待．

## 四、事件之间的关系与运算

因为事件是一个集合，因而事件之间的关系和运算可按集合之间的关系和运算来处理．

### 1. 包含关系（inclusion relation）

若事件 $A$ 发生必然导致事件 $B$ 发生，则称事件 $B$ 包含事件 $A$ 或 $A$ 是 $B$ 的**子事件**，记为 $B\supset A$ 或者 $A\subset B$（如图1-1）．即属于 $A$ 的样本点必属于 $B$．

### 2. 相等关系（equivalent relation）

若 $A\subset B$ 且 $B\subset A$，即 $A=B$，则称事件 $A$ 与事件 $B$ 相等．即 $A$ 与 $B$ 有相同的样本点（如图1-2）．

### 3. 和事件（union of events）

由事件 $A$ 与 $B$ 中所有的样本点（相同的只计一次）组成的新事件称为事件 $A$ 与事件 $B$ 的**和事件**，记为 $A\cup B$（或 $A+B$）．事件 $A\cup B$ 发生意味着事件 $A$ 与事件 $B$ 至少有一个发生（如图1-3）．

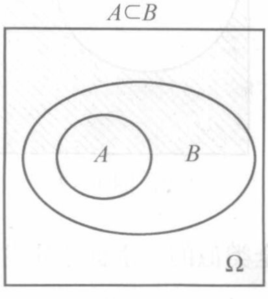


图1-1

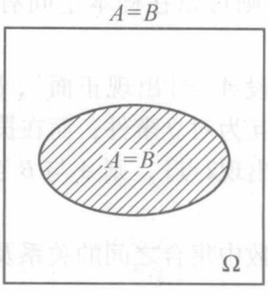


图1-2

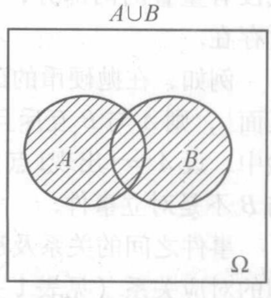


图1-3

事件的和可以推广到多个事件的情形．设有 $n$ 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$，定义它们的和事件为 $\{A_1,A_2,\cdots,A_n$ 中至少有一个发生$\}$，记为 $\bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k$．

4. **积事件**（product of events）

由事件 $A$ 与 $B$ 中公共的样本点组成的新事件称为事件 $A$ 与事件 $B$ 的**积事件**，记为 $A\cap B$，也简记为 $AB$．事件 $A\cap B$（或 $AB$）发生意味着事件 $A$ 发生且事件 $B$ 也发生，即 $A$ 与 $B$ 同时发生（如图 1 – 4）．

类似地，可以定义 $n$ 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的积事件为 $\bigcap\limits_{k=1}^{n} A_k=\{A_1,A_2,\cdots,A_n$ 都发生$\}$．

5. **差事件**（difference of events）

由在事件 $A$ 中而不在 $B$ 中的样本点组成的新事件称为事件 $A$ 与事件 $B$ 的**差事件**，记为 $A-B$（如图 1 – 5）．即事件 $A$ 发生而事件 $B$ 不发生的事件．

6. **互不相容事件（互斥事件）**（incompatible events）

若事件 $A$ 与事件 $B$ 不能同时发生，即 $AB=\Phi$，则称事件 $A$ 与事件 $B$ 是**互斥**的，或称它们是**互不相容**的（如图 1 – 6）．若事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 中的任意两个都互斥，则称这些事件是两两互斥的．

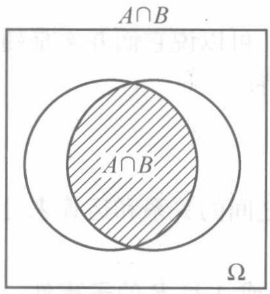



图 1 – 4

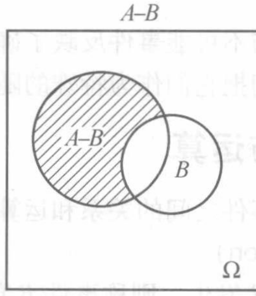



图 1 – 5

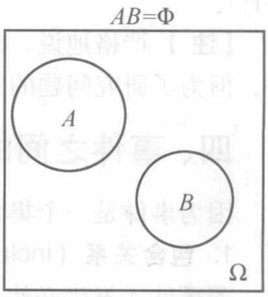



图 1 – 6

7. **对立事件（互逆事件）**（opposite events）

“$A$ 不发生”的事件称为事件 $A$ 的对立事件，记为 $\overline{A}$（如图 1 – 7）．$A$ 和 $\overline{A}$ 满足：$A\cup\overline{A}=\Omega$，$A\overline{A}=\Phi$，$\overline{\overline{A}}=A$．

【注】① $A\overline{B}$ 表示 $A$ 发生但是 $B$ 不发生，所以 $A\overline{B}=A-B$

②对立事件与互斥事件的区别：事件对立必定互斥，互斥的两事件不一定是对立事件；对立事件只有在样本空间为两个事件时存在，它是一分为二的，即对立的两事件把样本空间分成没有重叠的两部分，互斥事件则可以在样本空间有多个事件时存在．

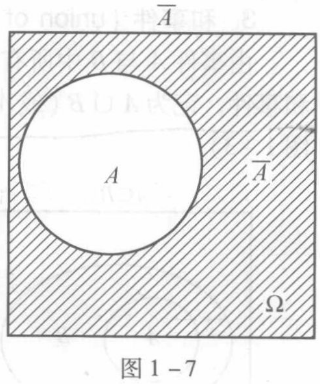



图 1 – 7

例如，在抛硬币的试验中，设 $A=\{$出现正面$\}$，$B=\{$出现反面$\}$，则 $A$ 与 $B$ 互斥且 $A$ 与 $B$ 互为对立事件；而在掷骰子的试验中，设 $A=\{$出现1点$\}$，$B=\{$出现2点$\}$，则 $A$ 与 $B$ 互斥，但 $A$ 与 $B$ 不是对立事件．

事件之间的关系及运算与代数中集合之间的关系及运算是完全类似的．下面给出这种类似的对应关系（见表 1 – 1）．

表 1－1

| 符号 | 集合论 | 概率论 | 概率含义 |
| --- | --- | --- | --- |
| $\Omega$ | 全集 | 样本空间，必然事件 | 一定发生的事件 |
| $\Phi$ | 空集 | 不可能事件 | 一定不发生的事件 |
| $\omega$ | 元素 | 基本事件（样本点） | 最简单的不能再分的事件 |
| $A$ | 子集 | 事件 | 随机试验的结果 |
| $\bar{A}$ | $A$ 的余集 | $A$ 的对立（逆）事件 | $A$ 与 $\bar{A}$ 有且只有一个发生 |
| $A \subset B$ | $A$ 为 $B$ 的子集 | $A$ 是 $B$ 的子事件 | $A$ 发生 $B$ 必发生 |
| $A = B$ | $A$ 与 $B$ 相等 | $A$ 与 $B$ 相等 | $A$，$B$ 中一个发生另一个也发生 |
| $A \cup B$ | $A$ 与 $B$ 的并 | $A$ 与 $B$ 的和事件 | $A$，$B$ 中至少一个发生 |
| $A \cap B$ | $A$ 与 $B$ 的交 | $A$ 与 $B$ 的积事件 | $A$ 与 $B$ 同时发生 |
| $A - B$ | $A$ 与 $B$ 的差 | $A$ 与 $B$ 的差事件 | $A$ 发生而 $B$ 不发生 |
| $A \cap B = \Phi$ | $A$ 与 $B$ 不相交 | $A$ 与 $B$ 互斥（互不相容） | $A$ 与 $B$ 不同时发生 |

在很多场合，用集合表示事件显得简练些，也更容易理解些．但对初学概率者而言，重要的是要学会用概率论的语言来解释事件间的关系及运算，并能运用它们．

**8. 事件运算满足的定律**

设 $A,B,C$ 为事件，则有

① **交换律**（exchange law）：$A \cup B = B \cup A$；$AB = BA$．

② **结合律**（combination law）：$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$；$(AB)C = A(BC)$．

③ **分配律**（distributive law）：$(A \cup B)C = (AC) \cup (BC)$；

$$(AB) \cup C = (A \cup C)(B \cup C).$$

④ **对偶律**［或德·摩根（De Morgan）律］（Dual law）

$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}\text{（和的逆＝逆的积）；}$$

$$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}\text{（积的逆＝逆的和）．}$$

德·摩根律可以推广到多个事件：

$\overline{\bigcup_{k=1}^{n} A_k} = \bigcap_{k=1}^{n} \bar{A}_k$，理解为 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 至少有一个发生的对立事件是 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 都不发生．

$\overline{\bigcap_{k=1}^{n} A_k} = \bigcup_{k=1}^{n} \bar{A}_k$，理解为 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 都发生的对立事件是 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 至少有一个不发生．

**【例 1】** 向指定目标射 3 枪，观察射中目标的情况．用 $A_1$，$A_2$，$A_3$ 分别表示事件“第一、第二、第三枪击中目标”，试用 $A_1$，$A_2$，$A_3$ 表示以下各事件：

（1）只击中第一枪；

（2）只击中一枪；

（3）三枪都没击中；

（4）至少击中一枪．