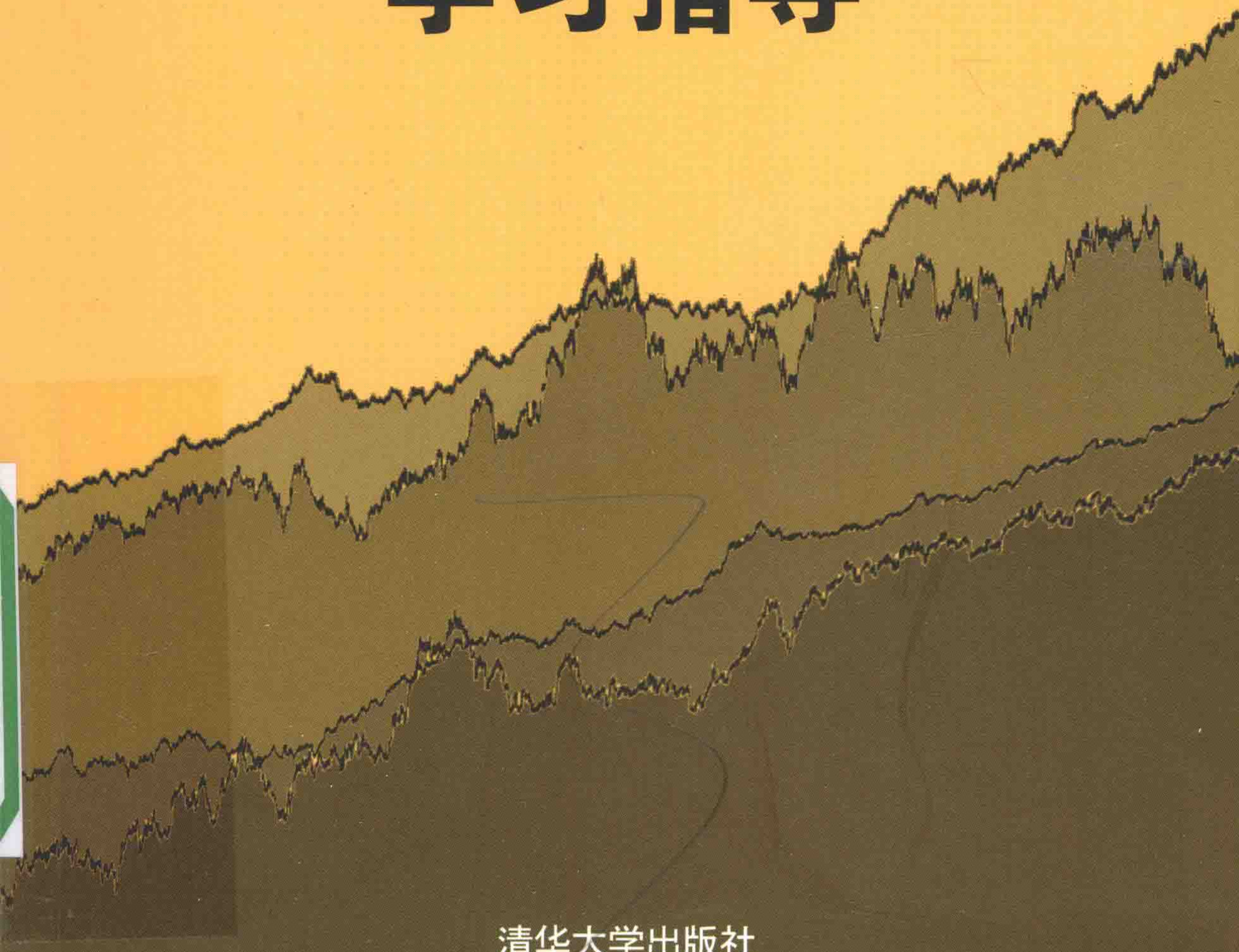
袁修久 杨友社 贺筱军 等 编

# 随机过程

## 学习指导



清华大学出版社

袁

郭祀鹏　原　野　郭云霞

# 随机过程

## 学习指导

清华大学出版社

北京

## 内容简介

全书共分5章，内容包括概率论的补充知识、随机过程基本概念、平稳过程、平稳时间序列的线性模型和预报及马尔可夫过程.书末附测试题一套.除第1章外，其余各章包括基本内容、解疑释惑、典型例题、习题选解、自主练习题及其参考解答五部分.本书强调随机过程的基本理论、基本方法及各知识点的联系与综合方面的训练.强调解题方法、解题技巧的掌握.编写中注重知识点的系统性.习题解答思路清晰，步骤详细.解疑释惑语言通俗，简明易懂.

本书可作为工科、财经等各专业研究生及数学专业高年级本科生随机过程学习的参考书，也可作为随机过程课程教师教学的参考书.



**图书在版编目(CIP)数据**

随机过程学习指导/袁修久等编．—北京：清华大学出版社，2016
ISBN 978-7-302-44811-2

Ⅰ．随…　Ⅱ．①袁…　Ⅲ．①随机过程　Ⅳ．①O211.6

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2016)第 197318 号

**责任编辑**：刘　颖
**封面设计**：常雪影
**责任校对**：王淑云
**责任印制**：王静怡

**出版发行**：清华大学出版社
**网　　址**：http://www.tup.com.cn，http://www.wqbook.com
**地　　址**：北京清华大学学研大厦A座　　**邮　　编**：100084
**社 总 机**：010-62770175　　**邮　　购**：010-62786544
**投稿与读者服务**：010-62776969，c-service@tup.tsinghua.edu.cn
**质量反馈**：010-62772015，zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn
**印 装 者**：三河市春园印刷有限公司
**经　　销**：全国新华书店
**开　　本**：170mm×230mm　　**印　　张**：13　　**字　　数**：240千字
**版　　次**：2016年9月第1版　　**印　　次**：2016年9月第1次印刷
**印　　数**：1～2000
**定　　价**：29.00元

产品编号：070904-01

# 前言

随机过程是研究客观世界中随机演变过程中统计规律的一门数学学科，已经广泛地应用于科学与工程技术的各个领域，是众多工科专业研究生要学习的重要数学基础理论课程之一.

要深刻理解随机过程的基本概念，灵活应用随机过程的方法，必须做一定数量的练习题. 然而在学习随机过程这门课程中，初学者普遍感到这门课程概念比较抽象，习题的求解难以入手，思路难以展开，往往是内容明白了，但练习题不会做，学习起来有一定困难. 为此，我们根据多年的教学经验，编写了这本辅导书. 对教学内容进行了归纳总结，对典型的例题进行解析，目的是帮助初学者尽快地、系统地学习和理解随机过程的基本理论，掌握随机过程的基本方法，拓展思维，开阔视野，激发读者的学习兴趣，提高读者应用随机过程的方法分析、解决实际问题的能力. 本书强调随机过程的基本理论、基本方法及各知识点的联系与综合方面的训练，强调解题方法、解题技巧的掌握. 在编写中注重知识点的系统性和应用性.

本书出版前的初稿已经在作者们的教学过程中使用过多次，收到了很好的效果. 本次出版，我们对本书进行了认真的修改，在修改过程中采纳了受课学生和同行们的建议，在此对他们表示感谢.

全书共分 5 章，书末附测试题一套. 除第 1 章外，每章分为五部分：基本内容、解疑释惑、典型例题、习题选解、自主练习题及其参考解答. 基本内容对每章的主要知识点进行了概括和总结；解疑释惑对书中难以理

解的知识点作了讲解;典型例题是针对主要教学内容选择了适量的例题进行了详细地解答;习题选解是对《随机过程》(汪荣鑫,西安交通大学出版社,2006 年,第 2 版)一书每章的部分习题作了详细地解答;自主练习题配备了一定量的练习题,让读者自己通过练习,提高利用本章的理论方法求解问题的能力.书后附测试题一套,供读者自己测试学习效果用.为了便于读者检验对这些练习题的掌握程度,给出了自主练习题和测试题的参考解答.

本书在编写过程中参考了不少作者的文献著作,在此向这些作者致以谢意.本书的编写得到了教研部、教研室领导的鼎力支持,得到了许多同事的热心帮助,在此一并表示诚挚的感谢.由于时间仓促,作者水平有限,书中疏漏与错误在所难免,恳请读者批评指正.

编 者

2016 年 6 月

# 目录

# 第1章 概率论的补充知识

## 1.1 基本内容

### 一、事件、概率及概率空间的定义

**1. 事件的定义**：设样本空间 $\Omega=(\omega)$ 的某些子集构成的集合记为 $\mathfrak{I}$，如果 $\mathfrak{I}$ 满足：

(1) $\Omega\in\mathfrak{I}$；

(2) 若 $A\in\mathfrak{I}$，则 $\overline{A}=\Omega-A\in\mathfrak{I}$；

(3) 若 $A_k\in\mathfrak{I}, k=1,2,\cdots$，则 $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}A_k\in\mathfrak{I}$.

则称 $\mathfrak{I}$ 是一个博雷尔(Borel)事件域，或 $\sigma$ 事件域. 样本空间 $\Omega$ 中博雷尔事件域 $\mathfrak{I}$ 中每一个子集称为一个事件.

样本空间 $\Omega$ 称为必然事件，而空集 $\varnothing$ 称为不可能事件.

**2. 概率的公理化定义**：设 $P(A)$ 是定义在样本空间 $\Omega$ 中博雷尔事件域 $\mathfrak{I}$ 上的集合函数. 如果 $P(A)$ 满足以下三个条件，则称 $P$ 是博雷尔事件域 $\mathfrak{I}$ 上的概率.

(1) 对 $\forall A\in\mathfrak{I}$，有 $P(A)\geqslant 0$；

(2) $P(\Omega)=1$；

(3) 若 $A_1,A_2,\cdots$ 两两不相交，即 $A_kA_j=\varnothing, k\neq j$，且 $A_k\in\mathfrak{I}, k=1,2,\cdots$，则 $P\left(\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}A_k\right)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}P(A_k)$.

**3. 概率空间的定义**：设 $\mathfrak{I}$ 是样本空间 $\Omega$ 的博雷尔事件域，$P$ 是定义在 $\Omega$ 上的概率，则 $(\Omega,\mathfrak{I},P)$ 称为概率空间.

### 二、随机变量及其概率分布

**1. 随机变量的定义**：设 $X=X(\omega)$ 是定义在样本空间 $\Omega$ 上的函数. 如果对任意一个实数 $x$，有 $\Omega$ 的子集 $\{\omega: X(\omega)\leqslant x\}\in\mathfrak{I}$，则称 $X$ 是概率空间 $(\Omega,\mathfrak{I},P)$

上的随机变量,或称博雷尔可测函数.

**2. 分布函数的定义**:设$(\Omega,\mathfrak{J},P)$为概率空间,而$X=X(\omega)$是$(\Omega,\mathfrak{J},P)$上的随机变量.对任意一个实数$x$,则函数

$$F(x)=P\{\omega\mid X(\omega)\leqslant x\}\stackrel{\text{def}}{=}P(X\leqslant x)$$

称为随机变量$X$的分布函数.

**3. 离散型随机变量**:若存在有限个或可列个实数的集合$(x_1,x_2,\cdots)$,使随机变量$X$有$P\{X\in(x_1,x_2,\cdots)\}=1$,则称$X$是离散型随机变量,而$p_k=P\{X=x_k\},k=1,2,\cdots$,称为离散型随机变量$X$的概率分布列.

**4. 连续型随机变量**:若对任意实数$x$,存在非负实函数$f(x)$,使随机变量$X$的分布函数$F(x)$满足$F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(x)\mathrm{d}x$,则称$X$是连续型随机变量,且$f(x)$称为连续型随机变量$X$的概率分布密度.

## 三、斯蒂尔吉斯积分

**1. 有限区间上的斯蒂尔吉斯积分的定义**:设$f(x)$,$g(x)$是定义在区间$[a,b]$上的两个有界函数.把区间$[a,b]$分成$n$个子区间,分点为

$$a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b,\quad \forall\,\xi_k\in[x_{k-1},x_k],$$

如果极限

$$\lim_{\Delta\to 0}\sum_{k=1}^{n}f(\xi_k)[g(x_k)-g(x_{k-1})]$$

存在,其中$\Delta=\max\limits_{1\leqslant k\leqslant n}\{x_k-x_{k-1}\}$,则称此极限为函数$f(x)$对函数$g(x)$在区间$[a,b]$上的斯蒂尔吉斯(Stieltjes)积分,简称S积分. 记为$\int_a^b f(x)\mathrm{d}g(x)$.

**2. 无限区间上的S积分的定义**:若极限$\lim\limits_{\substack{a\to-\infty\\ b\to+\infty}}\int_a^b f(x)\mathrm{d}g(x)$存在,则称此极限为函数$f(x)$对函数$g(x)$在无限区间$(-\infty,+\infty)$上的斯蒂尔吉斯积分,简称S积分,记为$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}g(x)$.

在S积分中,若$g(x)$是在$(-\infty,+\infty)$上的阶梯函数,它的跳跃点为$x_1$,$x_2$,…(有限个或可列无限个),则

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}g(x)=\sum_k f(x_k)[g(x_k+0)-g(x_k-0)].$$

若$g(x)$是在$(-\infty,+\infty)$上的可微函数,它的导函数为$g'(x)$,则

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}g(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)g'(x)\mathrm{d}x.$$

**3. F-S 积分的定义**：设函数 $g(x)$定义在无限区间$(-\infty,+\infty)$上，若积分

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx}\,dg(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \cos tx\,dg(x) + i\int_{-\infty}^{+\infty} \sin tx\,dg(x)$$

存在，则称此积分为对 $g(x)$的傅里叶—斯蒂尔吉斯积分(Fourier-Stieltjes)积分，简称 F-S 积分.

## 四、随机变量特征函数的定义及性质

**1. 随机变量特征函数的定义**：设 $X$ 是(实值)随机变量，对任意实数 $t$，称

$$\varphi(t)=Ee^{itX}=E(\cos tX+i\sin tX)=E(\cos tX)+iE(\sin tX)$$

为随机变量 $X$ 的特征函数.

若 $X$ 为离散型随机变量，其分布列为 $p_k=P\{X=x_k\}$，$k=1,2,\cdots$，则 $X$ 的特征函数可表示成

$$\varphi(t) = Ee^{itX} = \sum_k e^{itx_k} p_k.$$

若 $X$ 为连续型随机变量，其分布密度为 $f(x)$，则 $X$ 的特征函数可表示成

$$\varphi(t) = Ee^{itX} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} f(x)\,dx.$$

**2. 特征函数的性质**

性质 1　$|\varphi(t)|\leqslant\varphi(0)=1$.

性质 2　共轭对称性 $\varphi(-t)=\overline{\varphi(t)}$.

性质 3　特征函数 $\varphi(t)$在$(-\infty,+\infty)$上一致连续.

性质 4　特征函数 $\varphi(t)$具有非负定性，即对于任意正整数 $n$，任意 $n$ 个实数 $t_1,t_2,\cdots,t_n$ 及复数 $z_1,z_2,\cdots,z_n$，有

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\varphi(t_k-t_j)z_k\bar{z}_j \geqslant 0.$$

性质 5　设随机变量 $Y=aX+b$，其中 $a,b$ 是常数，则

$$\varphi_Y(t)=e^{ibt}\varphi_X(at).$$

性质 6　设随机变量 $X,Y$ 相互独立，而 $Z=X+Y$，则

$$\varphi_Z(t)=\varphi_X(t)\varphi_Y(t).$$

性质 7　设随机变量 $X$ 的 $n$ 阶原点矩存在，则它的特征函数可以微分 $n$ 次，且有

$$\varphi^{(n)}(0)=i^n EX^n \quad 或 \quad EX^n=i^{-n}\varphi^{(n)}(0).$$

## 五、唯一性定理及特征函数的充要条件

**1. 逆转公式**　设分布函数 $F(x)$的特征函数为 $\varphi(t)$，则对 $F(x)$的连续点

$x_1,x_2$ 有

$$F(x_2)-F(x_1)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T}\frac{e^{-itx_1}-e^{-itx_2}}{it}\varphi(t)\,dt.$$

**2. 唯一性定理** 分布函数 $F(x)$ 被它的特征函数 $\varphi(t)$ 唯一确定.

**3. 特征函数的充要条件**

波赫纳—辛钦(Bochner-Khintchine)定理 设 $\varphi(t)$ 满足 $\varphi(0)=1$，且在 $-\infty<t<+\infty$ 上是连续的复值函数，则 $\varphi(t)$ 是特征函数的充分必要条件为它是非负定的.

## 六、随机矢量的概率分布及其数字特征

**1. 随机矢量的分布**

随机矢量 $\boldsymbol{X}=(X_1,X_2,\cdots,X_n)^{\mathrm{T}}$ 的概率分布函数定义为

$$F(x_1,x_2,\cdots,x_n)=P\{X_1\leqslant x_1,X_2\leqslant x_2,\cdots,X_n\leqslant x_n\}.$$

用矢量形式可表示为

$$F(\boldsymbol{x})=P\{\boldsymbol{X}\leqslant\boldsymbol{x}\},$$

其中 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$，而 $\boldsymbol{X}\leqslant\boldsymbol{x}$ 理解为对每一个分量都有 $X_i\leqslant x_i$.

对于连续概率分布情形，随机矢量 $\boldsymbol{X}$ 的分布密度为

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\frac{\partial^n F(x_1,x_2,\cdots,x_n)}{\partial x_1\partial x_2\cdots\partial x_n}.$$

**2. 随机矢量的数字特征及性质**

(1) $n$ 维随机变量 $\boldsymbol{X}$ 的数学期望矢量 $E\boldsymbol{X}$ 定义为

$$E\boldsymbol{X}=(EX_1,EX_2,\cdots,EX_n)^{\mathrm{T}}$$

(2) $n$ 维随机变量 $\boldsymbol{X}$ 的协方差(矩)阵定义为

$$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}\operatorname{cov}(X_1,X_1) & \operatorname{cov}(X_1,X_2) & \cdots & \operatorname{cov}(X_1,X_n)\\ \operatorname{cov}(X_2,X_1) & \operatorname{cov}(X_2,X_2) & \cdots & \operatorname{cov}(X_2,X_n)\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \operatorname{cov}(X_n,X_1) & \operatorname{cov}(X_n,X_2) & \cdots & \operatorname{cov}(X_n,X_n)\end{bmatrix}.$$

协方差阵也可以用向量形式表示为 $\boldsymbol{B}=E[(\boldsymbol{X}-E\boldsymbol{X})(\boldsymbol{X}-E\boldsymbol{X})]^{\mathrm{T}}$.

(3) 协方差阵的性质 协方差(矩)阵 $\boldsymbol{B}$ 是对称的非负定阵.

## 七、多维特征函数及其性质

**1. 多维特征函数的定义：** 设 $n$ 维随机变量 $\boldsymbol{X}=(X_1,X_2,\cdots,X_n)^{\mathrm{T}}$，对任意 $n$ 个实数 $t_1,t_2,\cdots,t_n$，则

$$\varphi(t_1,t_2,\cdots,t_n)=E\mathrm{e}^{\mathrm{i}(t_1X_1+t_2X_2+\cdots+t_nX_n)}$$

称为 $n$ 维随机变量 $\boldsymbol{X}$ 的 $n$ 维特征函数.

记向量 $\boldsymbol{t}=(t_1,t_2,\cdots,t_n)^{\mathrm{T}}$，$n$ 维特征函数可以简单地表示为

$$\varphi(\boldsymbol{t})=E\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{t}}=E\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{t}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}}.$$

**2. 多维特征函数的性质**

性质 1　$|\varphi(t_1,t_2,\cdots,t_n)|\leqslant\varphi(0,0,\cdots,0)=1$.

性质 2　$\varphi(-t_1,-t_2,\cdots,-t_n)=\overline{\varphi(t_1,t_2,\cdots,t_n)}$.

性质 3　$\varphi(t_1,t_2,\cdots,t_n)$在 $n$ 维欧氏空间$\mathbb{R}^n$上一致连续.

性质 4　若 $\varphi(t_1,t_2,\cdots,t_n)$是 $n$ 维随机变量$(X_1,X_2,\cdots,X_n)^{\mathrm{T}}$ 的特征函数，则 $k(0<k<n)$维随机矢量$(X_1,X_2,\cdots,X_k)^{\mathrm{T}}$ 的特征函数

$$\varphi_{X_1,X_2,\cdots,X_k}(t_1,t_2,\cdots,t_k)=\varphi(t_1,t_2,\cdots,t_k,0,\cdots,0).$$

性质 5　若 $\varphi(t_1,t_2,\cdots,t_n)$是 $n$ 随机变量$(X_1,X_2,\cdots,X_n)^{\mathrm{T}}$ 的特征函数，则随机变量 $Y=a_1X_1+a_2X_2+\cdots+a_nX_n$ 的特征函数为

$$\varphi_Y(t)=\varphi(a_1t,a_2t,\cdots,a_nt).$$

性质 6　若 $\varphi(t_1,t_2,\cdots,t_n)$是 $n$ 维随机矢量$(X_1,X_2,\cdots,X_n)^{\mathrm{T}}$ 的特征函数，而随机变量 $X_j$ 的特征函数是 $\varphi_{X_j}(t)$，$j=1,2,\cdots,n$，则随机变量 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 相互独立的充分必要条件是

$$\varphi(t_1,t_2,\cdots,t_n)=\varphi_{X_1}(t_1)\varphi_{X_2}(t_2)\cdots\varphi_{X_n}(t_n).$$

性质 7　如果矩 $E(X_1^{k_1}X_2^{k_2}\cdots X_n^{k_n})$存在，则

$$E(X_1^{k_1}X_2^{k_2}\cdots X_n^{k_n})=\mathrm{i}^{-\sum\limits_{j=1}^{n}k_j}\left[\frac{\partial^{k_1+k_2+\cdots+k_n}\varphi(t_1,t_2,\cdots,t_n)}{\partial t_1^{k_1}\partial t_2^{k_2}\cdots\partial t_n^{k_n}}\right]_{t_1=t_2=\cdots=t_n=0}.$$

## 八、正态随机变量及其性质

**1. $n$ 维正态随机变量的概率分布**

如果 $n$ 维随机变量 $\boldsymbol{X}=(X_1,X_2,\cdots,X_n)^{\mathrm{T}}$ 的分布密度为

$$f(\boldsymbol{x})=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}\,|\boldsymbol{B}|^{\frac{1}{2}}}\exp\left\{-\frac{1}{2}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{-1}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a})\right\},$$

其中，$\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$，

$$\boldsymbol{a}=E\boldsymbol{X}=(EX_1,EX_2,\cdots,EX_n)^{\mathrm{T}},\quad \boldsymbol{B}=E[(\boldsymbol{X}-E\boldsymbol{X})(\boldsymbol{X}-E\boldsymbol{X})^{\mathrm{T}}],$$

且矩阵 $\boldsymbol{B}$ 是正定的，则 $\boldsymbol{X}$ 为 $n$ 维正态随机变量. $n$ 维正态分布记为 $N(\boldsymbol{a},\boldsymbol{B})$.

**2. $n$ 维正态分布 $N(\boldsymbol{a},\boldsymbol{B})$的特征函数为**

$$\varphi(\boldsymbol{t})=\exp\left\{\mathrm{i}\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{t}-\frac{1}{2}\boldsymbol{t}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{t}\right\}.$$

**3. *n* 维正态随机变量的性质**

性质1 $n$ 维正态随机变量 $\boldsymbol{X}=(X_1,X_2,\cdots,X_n)^{\mathrm{T}}$ 的 $m(m<n)$ 个分量构成的随机矢量 $\widetilde{\boldsymbol{X}}=(X_1,X_2,\cdots,X_m)^{\mathrm{T}}$ 是 $m$ 维正态随机变量，且它的数学期望向量为 $\widetilde{\boldsymbol{a}}=(a_1,a_2,\cdots,a_m)^{\mathrm{T}}$，协方差阵为 $\widetilde{\boldsymbol{B}}=E[(\widetilde{\boldsymbol{X}}-E\widetilde{\boldsymbol{X}})(\widetilde{\boldsymbol{X}}-E\widetilde{\boldsymbol{X}})^{\mathrm{T}}]$.

特殊地取 $m=1$，随机变量 $X_j$ 服从正态分布 $N(a_j,DX_j)$，$1\leqslant j\leqslant n$.

性质2 设 $\boldsymbol{X}=(X_1,X_2,\cdots,X_n)^{\mathrm{T}}$ 是 $n$ 维正态变量，则随机变量 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 相互独立的充分必要条件是它们两两不相关.

性质3 若 $\boldsymbol{X}=(X_1,X_2,\cdots,X_n)^{\mathrm{T}}$ 服从 $n$ 维正态分布 $N(\boldsymbol{a},\boldsymbol{B})$，且 $l_1,l_2,\cdots,l_n$ 是常数，则随机变量 $Y=\sum\limits_{j=1}^{n}l_jX_j$ 服从一维正态分布

$$N\left(\sum_{j=1}^{n}l_ja_j,\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}l_jl_k\operatorname{cov}(X_j,X_k)\right).$$

性质4 若 $\boldsymbol{X}=(X_1,X_2,\cdots,X_n)^{\mathrm{T}}$ 服从 $n$ 维正态分布 $N(\boldsymbol{a},\boldsymbol{B})$. 又 $m$ 维随机矢量 $\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{CX}$，其中 $\boldsymbol{C}$ 是 $m\times n$ 矩阵，则 $\boldsymbol{Y}$ 服从 $m$ 维正态分布 $N(\boldsymbol{Ca},\boldsymbol{CBC}^{\mathrm{T}})$.

## 1.2 典型例题

**例1** 设离散型随机变量 $X$ 的概率分布如下：

| $X$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| $p_i$ | 0.4 | 0.4 | 0.1 | 0.1 |

试求 $X$ 的特征函数.

**解** $\varphi_X(t)=E(\mathrm{e}^{\mathrm{i}tX})=0.4+0.4\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}+0.1\mathrm{e}^{2\mathrm{i}t}+0.1\mathrm{e}^{3\mathrm{i}t}$.

**例2** 已知随机变量 $X$ 的特征函数为 $\varphi(t)=\cos^2 3t$，求随机变量 $X$ 的分布列.

**解** 因为 $\varphi(t)=\cos^2 3t=\left(\dfrac{\mathrm{e}^{3\mathrm{i}t}+\mathrm{e}^{-3\mathrm{i}t}}{2}\right)^2=\dfrac{1}{4}(\mathrm{e}^{6\mathrm{i}t}+2\mathrm{e}^{0\cdot\mathrm{i}t}+\mathrm{e}^{-6\mathrm{i}t})$，故随机变量 $X$ 的分布律为

| $X$ | $-6$ | 0 | 6 |
|---|---|---|---|
| $p_k$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{4}$ |

**例3** 设随机变量 $X\sim U[a,b]$，求 $X$ 的特征函数 $\varphi_X(t)$.

**解** $\varphi_X(t)=E[\mathrm{e}^{\mathrm{i}tX}]=\displaystyle\int_a^b\frac{1}{b-a}\mathrm{e}^{\mathrm{i}tx}\mathrm{d}x=\frac{1}{(b-a)\mathrm{i}t}\mathrm{e}^{\mathrm{i}tx}\Big|_a^b=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}tb}-\mathrm{e}^{\mathrm{i}ta}}{(b-a)\mathrm{i}t}$.

**例 4** 设随机变量 $X$ 的分布函数 $F(x)$ 严格单调,试求:

(1) $Y=aF(X)+b(a\neq 0,b$ 是常数)的特征函数;

(2) $Z=\ln F(X)$ 的特征函数及 $EZ^k$($k$ 为自然数).

**解** (1) $\varphi_Y(t)=E[\mathrm{e}^{\mathrm{i}Yt}]=E[\mathrm{e}^{\mathrm{i}t(aF(X)+b)}]=\mathrm{e}^{\mathrm{i}bt}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{a\mathrm{i}tF(x)}\mathrm{d}F(x)$

$$=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}bt}}{\mathrm{i}at}\mathrm{e}^{\mathrm{i}atF(x)}\Big|_{-\infty}^{+\infty}=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}bt}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}at}-1)}{\mathrm{i}at}=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(a+b)t}-\mathrm{e}^{\mathrm{i}bt}}{\mathrm{i}at}.$$

(2) $\varphi_Z(t)=E[\mathrm{e}^{\mathrm{i}Zt}]=E[\mathrm{e}^{\mathrm{i}t\ln F(X)}]=\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t\ln F(x)}\mathrm{d}F(x)$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}(F(x))^{\mathrm{i}t}\mathrm{d}F(x)=\frac{(F(x))^{1+\mathrm{i}t}}{1+\mathrm{i}t}\Big|_{-\infty}^{+\infty}=\frac{1}{1+\mathrm{i}t}.$$

$$E(Z^k)=\frac{\varphi_Z^{(k)}(0)}{\mathrm{i}^k}=\frac{(-1)^k\mathrm{i}^k k!}{i^k(1+\mathrm{i}t)^{k+1}}\Big|_{t=0}=(-1)^k k!.$$

**例 5** 已知随机变量 $X$ 的特征函数为 $\varphi(t)=\dfrac{1}{1+t^2}$,求 $X$ 的密度函数 $f(x)$.

**解** 当 $x>0$ 时,有

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}tx}\frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t=\frac{1}{2\pi}\cdot 2\pi\mathrm{i}\mathrm{Res}\left[\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}zx}}{1+z^2},\mathrm{i}\right]=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x}.$$

同理,当 $x\leqslant 0$ 时,有 $f(x)=\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{x}$. 因此

$$f(x)=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-|x|},\quad x\in\mathbb{R}.$$

**例 6** 已知 $\varphi(t)$ 为特征函数,证明:$\omega(t)=\exp\{\varphi(t)-1\}$ 也为特征函数.

**证明** 由 $\varphi(t)$ 为特征函数易知,$\varphi(t)$ 连续,$\varphi(0)=1$ 且非负定. 故

(1) 因为 $\varphi(t)$ 连续,所以 $\omega(t)=\exp\{\varphi(t)-1\}$ 也连续;

(2) $\omega(0)=\exp\{\varphi(0)-1\}=1$;

(3) $$\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\omega(t_k-t_j)z_k\bar{z}_j=\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\exp\{\varphi(t_k-t_j)-1\}z_k\bar{z}_j$$

$$=\mathrm{e}^{-1}\sum_{m=0}^{+\infty}\frac{1}{m!}\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}[\varphi(t_k-t_j)]^m z_k\bar{z}_j\geqslant 0.$$

综合(1)~(3)得,$\omega(t)$ 也为特征函数.

**例 7** 设 $X\sim N(0,1)$,$Y\sim N(0,1)$ 且相互独立. 又设 $Z=X\cos\alpha-Y\sin\alpha$, $W=X\sin\alpha+Y\cos\alpha$. 试证:随机变量 $(Z,W)^{\mathrm{T}}$ 服从二维正态分布,并求其概率密度函数 $f_{ZW}(z,w)$.

**证明** 因为 $X\sim N(0,1)$,$Y\sim N(0,1)$ 且相互独立,故 $(X,Y)^{\mathrm{T}}$ 服从二维正

态分布. 而

$$\begin{pmatrix} Z \\ W \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \boldsymbol{A} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix},$$

故$(Z,W)^{\mathrm{T}}$服从二维正态分布,且$(Z,W)^{\mathrm{T}}$的数学期望为

$$\begin{pmatrix} EZ \\ EW \end{pmatrix} = \boldsymbol{A} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$(Z,W)^{\mathrm{T}}$的协方差阵为

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

从而$(Z,W)^{\mathrm{T}}$的概率密度为$f_{ZW}(z,w)=\dfrac{1}{2\pi}\mathrm{e}^{-\frac{z^2+w^2}{2}}$.

**例 8** 已知二维正态随机变量$(X,Y)^{\mathrm{T}}$服从$N(\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{B})$,其中$\boldsymbol{\mu}=(0,0)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$. 试求$(X,Y)^{\mathrm{T}}$的概率密度和特征函数.

**解** $|\boldsymbol{B}|=1$,$\boldsymbol{B}^{-1}=\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$,所以$(X,Y)^{\mathrm{T}}$的概率密度

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi}\exp\left\{-\frac{1}{2}(x,y)\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right\} = \frac{1}{2\pi}\exp\left\{-x^2+xy-\frac{y^2}{2}\right\}.$$

$(X,Y)^{\mathrm{T}}$的特征函数为

$$\begin{aligned}\varphi(\boldsymbol{t}) &= \exp\left\{\mathrm{i}\,\boldsymbol{\mu}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{t}-\frac{1}{2}\boldsymbol{t}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{t}\right\} = \exp\left\{-\frac{1}{2}(t_1,t_2)\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix}\right\} \\ &= \exp\left\{-\frac{1}{2}(t_1^2+2t_1t_2+2t_2^2)\right\}.\end{aligned}$$

**例 9** 设随机变量$X_1,X_2,X_3,X_4$相互独立且服从同一正态分布$N(\mu,\sigma^2)$,试用特征函数法求$Z=\dfrac{1}{6}X_1+\dfrac{1}{6}X_2+\dfrac{1}{3}X_3+\dfrac{1}{3}X_4$的分布.

**解** 由$X_i\sim N(\mu,\sigma^2)$可知$\varphi_{X_i}(t)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mu t-\frac{\sigma^2t^2}{2}}$,$i=1,2,3,4$. 由于$X_1,X_2,X_3,X_4$相互独立,根据特征函数的性质可得随机变量$Z$的特征函数为

$$\varphi_Z(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\mu\left(\frac{t}{6}+\frac{t}{6}+\frac{t}{3}+\frac{t}{3}\right)-\frac{\sigma^2}{2}\left(\frac{t^2}{36}+\frac{t^2}{36}+\frac{t^2}{9}+\frac{t^2}{9}\right)} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\mu t-\frac{5\sigma^2}{2\times 18}t^2}.$$

$\varphi_Z(t)$为正态分布$N\left(\mu,\dfrac{5\sigma^2}{18}\right)$的特征函数,所以由唯一性定理,$Z\sim N\left(\mu,\dfrac{5\sigma^2}{18}\right)$.

**例 10** 设4维随机矢量$\boldsymbol{X}=(X_1,X_2,X_3,X_4)^{\mathrm{T}}\sim N(\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{B}_X)$,其中

$$\boldsymbol{\mu}=(1,-1,0,1)^{\mathrm{T}},\quad \boldsymbol{B_X}=\begin{bmatrix}2&1&0&0\\1&2&1&0\\0&1&2&1\\0&0&1&2\end{bmatrix}.$$

(1) 求 $\widetilde{\boldsymbol{X}}=(X_1,X_4)^{\mathrm{T}}$ 的分布；

(2) 求 $\boldsymbol{Y}=(2X_1,X_2+X_3,X_3-X_4)^{\mathrm{T}}$ 的分布；

(3) 写出 $\boldsymbol{Y}$ 的特征函数.

**解** (1) $\widetilde{\boldsymbol{X}}=(X_1,X_4)^{\mathrm{T}}$ 服从均值向量为 $\boldsymbol{\mu}=(1,1)^{\mathrm{T}}$，协方差矩阵为

$$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}2&0\\0&2\end{bmatrix}$$

的二维正态分布.

(2) 因为

$$\boldsymbol{Y}=\begin{bmatrix}Y_1\\Y_2\\Y_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&0&0&0\\0&1&1&0\\0&0&1&-1\end{bmatrix}\begin{pmatrix}X_1\\X_2\\X_3\\X_4\end{pmatrix}=\boldsymbol{CX},$$

且秩 $\mathrm{R}(\boldsymbol{C})=3$，所以 $\boldsymbol{Y}$ 服从三维正态分布 $\boldsymbol{Y}\sim N(\boldsymbol{\mu_Y},\boldsymbol{B_Y})$，其中

$$\boldsymbol{\mu_Y}=\boldsymbol{C\mu}=\begin{bmatrix}2\\-1\\-1\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{B_Y}=\boldsymbol{CB_XC}^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}8&2&0\\2&6&2\\0&2&2\end{bmatrix}.$$

(3) $$\begin{aligned}\Phi_Y(\boldsymbol{t})&=\exp\left\{\mathrm{i}\,\boldsymbol{\mu}_Y^{\mathrm{T}}\boldsymbol{t}-\frac{1}{2}\boldsymbol{t}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B_Y t}\right\}\\&=\exp\left\{\mathrm{i}(2t_1-t_2-t_3)-\frac{1}{2}(8t_1^2+6t_2^2+2t_3^2+4t_1t_2+4t_2t_3)\right\}.\end{aligned}$$

**例 11** 设 $X_1,X_2,X_3$ 独立同分布于 $N(0,1)$，证明

$$Y_1=\frac{1}{\sqrt{2}}(X_1-X_2),\quad Y_2=\frac{1}{\sqrt{6}}(X_1+X_2-2X_3),$$

$$Y_3=\frac{1}{\sqrt{3}}(X_1+X_2-X_3)$$

也独立同分布于 $N(0,1)$.

**证明** $\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{AX}$，其中

$$A=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0\\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}}\end{bmatrix}.$$

因 $X_1,X_2,X_3$ 独立同分布于 $N(0,1)$，所以 $X_1,X_2,X_3$ 的协方差矩阵是单位矩阵. 由正态随机矢量的性质可知 $\boldsymbol{Y}$ 服从三维正态分布. 计算得 $\boldsymbol{Y}$ 的期望向量和协方差矩阵为

$$\boldsymbol{\mu}_Y=\boldsymbol{A\mu}=\boldsymbol{0},\quad \boldsymbol{AIA}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{I}.$$

故 $\boldsymbol{Y}\sim N(\boldsymbol{0},\boldsymbol{I})$，从而 $Y_1,Y_2,Y_3$ 独立同分布于 $N(0,1)$.

**例 12** 设 $(X_1,X_2)^{\mathrm{T}}\sim N(\mu_1,\mu_2;\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$，$Z=\frac{X_1-\mu_1}{\sigma_1}+\frac{X_2-\mu_2}{\sigma_2}$，求 $Z$ 的特征函数与分布密度.

**解** 利用多元特征函数性质，由 $Z=\frac{X_1}{\sigma_1}+\frac{X_2}{\sigma_2}-\frac{\mu_1}{\sigma_1}-\frac{\mu_2}{\sigma_2}$，得

$$\varphi_Z(t)=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t\left(\frac{\mu_1}{\sigma_1}+\frac{\mu_2}{\sigma_2}\right)}\varphi_X(t).$$

而

$$\varphi_X(t)=\exp\left\{\mathrm{i}\left(\frac{\mu_1}{\sigma_1}+\frac{\mu_2}{\sigma_2}\right)t-\frac{1}{2}(2+2\rho)t^2\right\}$$

其中 $X=\frac{x_1}{\sigma_1}+\frac{x_2}{\sigma_2}$，$EX=\frac{\mu_1}{\sigma_1}+\frac{\mu_2}{\sigma_2}$，$DX=2+2\rho$，故

$$\varphi_Z(t)=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t\left(\frac{\mu_1}{\sigma_1}+\frac{\mu_2}{\sigma_2}\right)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t\left(\frac{\mu_1}{\sigma_1}+\frac{\mu_2}{\sigma_2}\right)-\frac{1}{2}(2+2\rho)t^2}=\mathrm{e}^{-(1+\rho)t^2}.$$

由唯一性定理知 $Z\sim N(0,2(1+\rho))$.

**例 13** 已知 $X\sim N(0,1)$，$U$ 与 $X$ 相互独立，$P\{U=0\}=P\{U=1\}=\frac{1}{2}$，令

$$Y=\begin{cases}X, & U=0,\\ -X, & U=1.\end{cases}$$

证明：$Y\sim N(0,1)$，但 $(X,Y)$ 不服从二维正态分布.

**证明** $\varphi_Y(t)=E(\mathrm{e}^{\mathrm{i}tY})=P\{U=0\}\cdot E(\mathrm{e}^{\mathrm{i}tX})+P\{U=1\}\cdot E(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}tX})=\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t^2}$，所以，$Y\sim N(0,1)$.

$$\begin{aligned}\varphi_{XY}(s,t)&=E(\mathrm{e}^{\mathrm{i}sX+\mathrm{i}tY})=P\{U=0\}\cdot E(\mathrm{e}^{\mathrm{i}sX+\mathrm{i}tX})+P\{U=1\}\cdot E(\mathrm{e}^{\mathrm{i}sX-\mathrm{i}tX})\\&=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(s^2+t^2)}(\mathrm{e}^{-st}+\mathrm{e}^{st}).\end{aligned}$$

由于 $\varphi_{XY}(s,t)$ 不是二维正态分布的特征函数，因此 $(X,Y)$ 不服从二维正态分布.