高等学校教学用書

实变函数論

H. A. 福罗洛夫著

越民义
叶彦謙 譯

人民教育出版社

高等学校教学用书

实变函数論

H. A. 福罗洛夫著
越民义 叶彦謙譯

版社

本书是根据苏俄教育部国立教科书出版社（Государственное учебно-педагогическое издательство министерства просвещения РСФСР）出版的福罗洛夫（Н. А. Фролов）所著“实变函数論”（Теория функций действительного переменного）1953年版譯出的。原书經俄罗斯苏維埃联邦社会主义共和国教育部审定为师范学院教学参考书。

实 变 函 数 論

Н. А. 福罗洛夫著

越民义 叶彦謙譯

北京市书刊出版业营业許可証出字第2号

人民教育出版社出版（北京景山东街）

人 民 教 育 印 刷 厂 印 装

新华书店北京发行所发行

各 地 新 华 书 店 經 售

統一书号 K13010・148　开本 850×1168 1/32　印张 6 2/16

字数 144,000　印数 19,501—21,000　定价（6）￥0.60

1955年12月第1版　1963年11月北京第12次印刷

序　言

实变函數論是高等師範学校物理數学系必修的最重要学科之一，教師在自己的工作中經常会遇到的許多概念如集、实數、函數、極限、函數的連續性、集的測度等，都是这一学科的內容的構成部分。不知道实变函數的基礎理論，——其思想現已貫穿到整个數学領域之中.——就不可能使中等学校數学課的講授達到必需的科学水準。

作者遵照現行敎学大綱編寫这敎本，但亦有若干出入之处。在點集論这一章中加入了凝點的概念以及關於它的幾个定理。所有这些都是屬於不久以前的敎学大綱範圍之內的。在函數一章中研究了有界閉集上的連續函數的幾个性質。这些問題都屬於數学科國家考試大綱的範圍，虽然在实变函數論敎学大綱中幷未明白指出。在集的測度一章中，不研究集的若尔当測度，而更詳細地研究集的勒倍格測度。这使我有可能在本書中介紹勒倍格積分的概念，从而得以用不多的篇幅有力地充实了这一敎程。除此以外，如果不講勒倍格測度和積分，就很难使讀者对於我国若干学者的研究成果獲得一些明晰的概念，这些学者的工作是建立实变函數的理論的重要支柱。

最後，作者要对 Π. C. 諾維科夫教授、Н. В. 斯米尔諾夫教授、В. Н. 馬洛德舍姆講師和 А. Г. 舒科尔尼克講師表示衷心的感謝，因为他們曾看过我的原稿，幷提出一系列宝貴的批評和意見。

Н.　福罗洛夫

1953年於高尔基城。

目　錄

高等学校教学用书

实变函数論

H. A. 福罗洛夫著
越民义　叶彦謙譯

版社

目 錄

序　言

实变函數論是高等師範学校物理數学系必修的最重要学科之一，教師在自己的工作中經常会遇到的許多概念如集、实數、函數、極限、函數的連續性、集的測度等，都是这一学科的內容的構成部分。不知道实变函數的基礎理論，——其思想現已貫穿到整个數学領域之中，——就不可能使中等学校數学課的講授達到必需的科学水準。

作者遵照現行教学大綱編寫这教本，但亦有若干出入之处。在點集論这一章中加入了凝點的概念以及關於它的幾个定理。所有这些都是屬於不久以前的教学大綱範圍之內的。在函數一章中研究了有界閉集上的連續函數的幾个性質。这些問題都屬於數学科國家考試大綱的範圍，虽然在实变函數論教学大綱中并未明白指出。在集的測度一章中，不研究集的若尔当測度，而更詳細地研究集的勒倍格測度。这使我有可能在本書中介紹勒倍格積分的概念，从而得以用不多的篇幅有力地充实了这一教程。除此以外，如果不講勒倍格測度和積分，就很难使讀者对於我国若干学者的研究成果獲得一些明晰的概念，这些学者的工作是建立实变函數的理論的重要支柱。

最後，作者要对 П. С. 諾維科夫教授、Н. В. 斯米尔諾夫教授、В. Н. 馬洛德舍姆講師和 А. Г. 舒科尔尼克講師表示衷心的感謝，因为他們曾看过我的原稿，并提出一系列宝貴的批評和意見。

Н.　福罗洛夫

1953 年於高尔基城。

第一章　集的一般理論

§ 1. 集的概念

在定义任何一个概念時，我們必需利用其他預先已給的，更簡單一些的概念。例如，我們定义複數 $a+bi$ 为兩个实數 a 与 b 所作成的數对 (a, b)。这裏，在定义新的概念——複數——時，我們引用更簡單的概念"实數"，後者的意义假定是已經知道的。

要在这种意义之下來給出"集"这一概念的定义是办不到的，因为沒有更簡單的概念可以用來給集下定义了。集的概念是最原始的，它的涵义只能依靠各种各样的例子來說明。我們可以說到已給多角形的边所成之集，这頁書中的行所成之集，袋中的豌豆所成之集，全体自然數所成之集，全体有理數所成之集，等等。

因此，凡說到集，我們所指的就是某些对象的彙集。集所由構成的对象称为集的元素。集这个概念合多为一，合不同的对象——元素——为一个整体——集。

若 A 表示一集，x 是某一对象，則用記号

$$x \in A$$

表示 x 是集 A 的元素（屬於集 A，包含在 A 中），若 x 不屬於集 A，則記作

$$x \overline{\in} A.$$

任一元素或屬於已給之集，或不屬於它。

若以 x 作为集 A 的元素的一般标誌，則寫成：

$$A=\{x\}.$$

例如，若 r 表示任一有理數，而 R 表示全体有理數所成之集，則可寫成：

$$R=\{r\}.$$

如果能够列举出一集的一切元素，則可在花括弧內將它們接連不断地全部寫出來。例如，若 M 是三角形的边所成之集，而这些边分别記作 a, b 与 c, 則可寫：

$$M=\{a, b, c\}.$$

若 N 是全体自然數 $1, 2, 3, \cdots, n, \cdots$ 所成之集，則可寫：

$$N=\{1, 2, 3, \cdots, n, \cdots\}.$$

集有有限和無限兩种。若对於一集，"这集中包含多少元素?"这个問題是有意义的，就是說，若存在一个可以用來表示这集所含元素的總數的數字，則此集称为有限集，这時該數字是否確知並不重要，重要的是有这样的數字存在。例如，前面举过的——袋中的豌豆所成之集——是一个有限集的例子，因为很清楚，表示袋中豌豆的總數的數字一定存在，並且完全沒有必要去點數这袋豌豆以肯定这一事实。若一集不是有限集，就是說，任取一自然數 n 時，集中常可找出多於 n 个的元素來，則这集称为無限集。例如，自然數全体成一無限集。

有限集的一个特例是單元素集，就是只含一个元素的集。

不要把單元素集和它所含的唯一的元素混为一談。举例以明之。

設 M_1 是一位(十進位)正整數所成之集，M_2 是二位正整數所成之集。則集

$$A=\{M_1, M_2\}$$

只含兩个元素——集 M_1 与集 M_2。集

$$B=\{M_1\}$$

是單元素集，因为它以集 M_1 为唯一的元素。

若不區別單元素集B与它的唯一的元素M_1，就可以引出矛盾來：一方面，作为單元素集，B只含一个元素，另一方面，若把B看成就是M_1，B又包含十个元素了。

为了行文的簡單化和一般化，我們再引進空集，就是不含任何元素的集。我們用符号$\emptyset$來表示空集[1]。有時我們把具有某种性質的一切对象組成一集，而不知此种对象是否存在。如果後來發現这种对象並不存在，則該集就是空集了。

例如，設M是某一方程$F(y)=0$的解所成之集。若發現在某些条件成立時M是單元素集，而在另外一些条件成立時M是空集，那末这就意味着在第一种情形方程有唯一的解，而在第二种情形方程無解。

§ 2. 集的运算

部分，或子集　若集A的每一元素都含在集B之中，則A称为B的部分，或子集。这時我們記作：

$$A\subset B \text{ 或 } B\supset A.$$

用符号$\subset$表示着的關係称为内含關係。应当注意，用$\in$和用$\subset$表示的兩關係之間存在着原則性的區別。關係$x\in A$表示元素x屬於集A这一事实，因此它表示着与集的概念同样原始的概念，而關係$A\subset B$則表示集的一部分或子集的概念，这只不过是依靠定义引進來的概念而已。

若对於用$\in$和用$\subset$表示的兩關係不加區別，就很容易得出矛盾來。我們只須用前面已經举过的例子，即用集

$$B=\{M_1\}$$

[1] 为了使讀者不致於把空集和數字 0 相混，我們將原書中的符号 0 改为$\emptyset$（譯註）。

來說明好了，这裏 M_1 是一位自然數所成之集。

關係 $M_1 \in B$ 意味着 M_1 是集 B 的元素，並且現在 M_1 还是 B 的唯一的元素。

而關係 $M_1 \subset B$ 則將意味着 M_1 是集 B 的一部分，就是說，數 $0, 1, 2, \cdots, 9$ 將是集 B 之中的十个元素了。

特别，由子集的定义可知 $A \subset A$，就是說，集的部分可能和全集相同。当兩集 A 与 B 相同，就是說，当它們表示由同样那些元素組成的同一个集時，我們記作:

$$A = B.$$

因此，$A = B$ 意味着 $A \subset B$ 与 $B \subset A$。若 $A \subset B$ 而 $A \neq B$（A 不与 B 相同），則称 A 是 B 的眞子集。顯然，多元素集中的每一元素構成此集的眞子集。

空集是任何集的子集。实际上，若 A 是任給的集，0 是空集，則 $0 \subset A$，因若不然，則在 0 中至少含有一个元素不屬於 A，但因 0 是空集，其中自然不会有此种元素。

加法 所有那些至少含在已給諸集之一中的元素組成一集，称为已給諸集的和集。

这定义說明，集的加法就是把屬於已給諸集的一切元素聚成一个集，这集就称为諸集的和集。若某一元素同時包含在已給諸集的幾个集之中，則在和集中这元素只能出現一次（圖 1）。

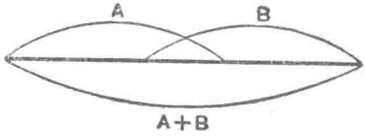

圖 1.

S 是兩集 A 与 B 的和集这件事，可以用下面的式子來表示:

$$S = A + B.$$

若所給之集（被加項）很多，則可採用求和符号 $\sum$。例如，若有集之集 $\{A_\alpha\}$，这裏用可以取不同數值的下标 α 來區别不同的集，則諸集 A_α 的和集 S 可記成:

$$S=\sum_{\alpha}A_{\alpha}.$$

集的加法举例。

1. 設

$$A=\{1,3,5,\cdots,2n-1,\cdots\},\quad B=\{2,4,6,\cdots,2n,\cdots\}.$$

則

$$A+B=\{1,2,3,4,\cdots,n,\cdots\}.$$

2. 設

$A=\{\alpha\}$,其中 $0\leqslant\alpha\leqslant2$, 又 $B=\{\beta\}$, 其中 $1\leqslant\beta\leqslant3$.

則 $A+B=\{x\}$, 其中 $0\leqslant x\leqslant3$.

由和集的定义可知集的加法具有与數的加法相同的性質,卽:

1. 可交換性:

$$A+B=B+A.$$

2. 可結合性:

$$(A+B)+C=A+(B+C).$$

这兩性質也說明了我們用"和集"这一名詞來表示由已給諸集的一切元素所組成的集是沒有語病的。

但是集的加法也具有一些數的加法所沒有的性質。

若 A 是 B 的部分, 卽 $A\subset B$, 則

$$A+B=B,$$

特別

$$A+A=A.$$

这在數的加法一般是不正確的。

通集 所有那些同時含在已給諸集的每一集中的元素組成一集,称为已給諸集的通集。

由这定义可知,已給諸集的通集是其中任一集的子集,卽它們的公共部分。

为了表示集 A 与集 B 的通集是 D (圖 2), 我們採用乘法的符号:

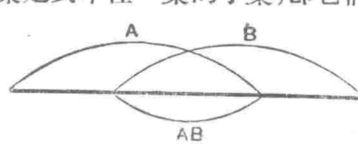

圖 2.