金榜图书
JINBANG BOOKS · SINCE 1997

2017 全国十二大考研辅导机构指定用书

考研数学 高数不过如此

主编◎章纪民（清华大学）

移动互联时代高效便捷的学习模式 双色印刷

预备知识 微分 积分 级数 常微分方程

别怕！凡是有点儿难度的考点，书中都有讲解视频，立刻扫描书中的二维码，可跟着先学习一遍！

记得先下载V研客扫码才会看到视频，登陆www.vyanke.com还有更多视频

西安交通大学出版社
XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY PRESS

013
910

金榜图书
JINBANG BOOKS · SINCE 1997

2017 全国十二大考研辅导机构指定用书

考研数学高数
不过如此

主编 ◎ 章纪民

本书专属：________________

我要认真、独立地学完本书内容。

西安交通大学出版社
XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

考研数学:高数不过如此 / 章纪民主编. —西安:西安交通大学出版社,2015.4
ISBN 978-7-5605-7326-7

Ⅰ. ①考… Ⅱ. ①章… Ⅲ. ①高等数学—研究生—入学考试—自学参考资料 Ⅳ. ①013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 110034 号

书　　名:考研数学:高数不过如此
主　　编:章纪民
出版发行:西安交通大学出版社
地　　址:西安市兴庆南路 10 号(邮编:710049)
电　　话:(029)82668315(总编办)
　　　　　(029)82668357　82667874(发行部)
经　　销:新华书店
印　　刷:保定市中画美凯印刷有限公司
版　　次:2015 年 8 月第 1 版
印　　次:2015 年 8 月第 1 次印刷
开　　本:787mm×1092mm　1/16
印　　张:17.75
字　　数:239 千字
书　　号: ISBN 978-7-5605-7326-7/O·503
定　　价:49.80 元

前言

本书是专为考研复习准备的书。

大学数学教学和考研最大的区别就是大学的数学教学以传授知识为目的，追求的是数学的系统性（或者自封闭性）。以知识点为介质，从定义到定理逐个讲解，证明，力图使学生知其然知其所以然。而我们考研是以学会做题为目的，知其然就足矣。

大学数学教学有强的一面，严谨；也有弱的一面，关注局部的知识，而缺少综合性，缺少知识点之间的联系。而考研最大的特点就是综合。往往在一道题里综合了几个知识点。毕竟微积分有这么多的知识，要在考研试卷的有限的题目上比较全面地呈现出来，只能依赖于综合了。

综合性是本书的一大特点。

既然是考研用书，我们在定义的引入、定理的证明上就不花太多功夫了。我们直接引入定义，介绍定理，然后着重讲解定理的使用以及使用时的禁忌。本书的读者应该已经学过微积分，还保存大学微积分的教材。若遇到关键地方，可以参阅微积分教材。

本书在内容编排上作了一些新的尝试。传统的考研复习书以及微积分教材的编写次序是

一元微分⇒一元积分⇒多元微分⇒多元积分

中间和最后介绍级数和微分方程。本书的编写次序是

预备知识

⇓

微分

⇓

积分

⇓

级数

⇓

微分方程

⇓

经济数学

在预备知识中，我们介绍了

实轴 R^1，平面 R^2 及空间 R^3 中的点，点与点的距离；集合及其分类；平面和空间向量的线性运算及非线性运算及其几何意义。

函数的概念及表示法，函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性；复合函数、反函数、分段函数和隐函数；基本初等函数的性质及其图形；初等函数；函数关系的建立。

平面与直线的表示方法 曲面与曲线的表示方法常见的曲面与曲线。

坐标系与坐标变换。

我们之所以把这些知识独立出来，是因为在考研中我们会用到这些知识，并且这些知识只要会用就行。我们把这些预备知识介绍了以后，就可以专注于考研知识的介绍，而不必分心。这样我们的系统就更连贯了。

在微分部分，我们连贯地介绍了一元函数和多元函数的极限、连续和微分，以及微分的应用。一元函数和多元函数既有许多相通之处，放在一起讲，可以彼此借鉴、融会贯通；他们也有区别，放在一起讲，又可以相互比较，对照。

同样，在积分部分，一元函数和多元函数的积分也放在一起连贯地介绍，目的与微分是相同的。

最后我们介绍级数、微分方程以及经济数学（差分方程和数学在经济上的应用）。

本书同时还列举了许多反例，以及定理运用是的禁忌，方便读者理解和使用定理。

本书的编排是一个创举，其目的就是给读者全新的体验。我希望我们的读者在看完本书后，会觉得：

考研，不过如此！

最后，祝大家考研成功！

编者

2015.8

本书部分常用符号

$\in$	属于
$\forall$	任意的
$\exists$	存在,有
$\lvert x \rvert$	x 的绝对值
$\lVert X-Y \rVert$	X,Y 间的距离
$\{x_n\}_{n=1}^{+\infty}$	数列,简记为$\{x_n\}$
$\ll$	远小于
$\gg$	远大于
$\sim$	等价无穷小
$\Leftrightarrow$	等价于,充分必要
$C(a,b)$ 类函数	区间(a,b) 上的连续函数
$C^{(2)}$ 类函数	二阶导数连续的函数
$\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$	曲面积分微元在 xy 面上的投影,$\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y = \cos \alpha \mathrm{d}S$

目 录

第一部分 预备知识

第二部分 微分学

第二部分　微分学

第二部分 微分学

第三部分 积分

第三部分　积分

第三部分 积分

第四部分 级数

第五部分 常微分方程

第六部分 微积分的经济学应用

第一部分　预备知识

第一章　实轴 $\mathbf{R}^1$，平面 $\mathbf{R}^2$ 及空间 $\mathbf{R}^3$

内容提要： 实轴 $\mathbf{R}^1$，平面 $\mathbf{R}^2$ 及空间 $\mathbf{R}^3$ 中的点，点与点的距离；集合及其分类；平面和空间向量的线性运算及非线性运算及其几何意义.

有理数：整数和分数.

无理数：无限不循环小数.

实数：有理数和无理数的全体，记作 $\mathbf{R}$.

实轴 $\mathbf{R}^1$：规定了原点，正方向和单位长度的直线叫数轴.

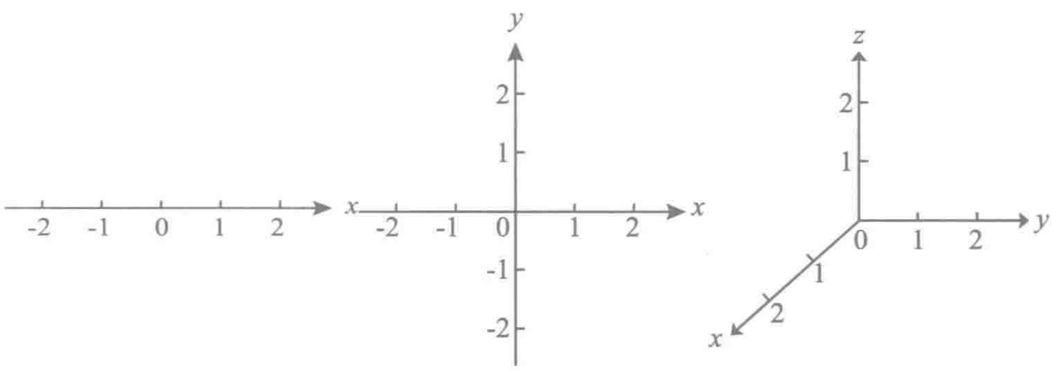


图 1－1

实轴上的点和实数是 1－1 对应的，即任意一个实数在实轴上有一个对应点；而实轴上的任意一个点都对应一个实数.

平面：$\mathbf{R}^2=\{(x,y)\mid x\in\mathbf{R},y\in\mathbf{R}\}$.

三维空间：$\mathbf{R}^3=\{(x,y,z)\mid x\in\mathbf{R},y\in\mathbf{R},z\in\mathbf{R}\}$.

第一节　点，距离

实轴 $\mathbf{R}^1$，平面 $\mathbf{R}^2$，空间 $\mathbf{R}^3$ 中的一个元素有时称为一个点，分别记作

$$\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^1,\boldsymbol{X}\in\mathbf{R}^2,\boldsymbol{X}\in\mathbf{R}^3$$

在实轴 $\mathbf{R}^1$ 上，两点 x,y 之间的距离为 $\|x-y\| = |x-y|$，其中 $|x|$ 为绝对值函数

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geqslant 0, \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

绝对值函数满足：

(1) 绝对值不等式：$-|x| \leqslant x \leqslant |x|$；

(2) 三角不等式：$\forall x, y \in \mathbf{R}^1$，有 $|x+y| \leqslant |x| + |y|$，$|x-y| \geqslant ||x| - |y||$.

在平面 $\mathbf{R}^2$ 上，两点 $\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}$ 之间的距离为

$$\|\boldsymbol{X}-\boldsymbol{Y}\| = \sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2},$$

其中 $\boldsymbol{X} = (x_1, y_1)$，$\boldsymbol{Y} = (x_2, y_2)$.

在空间 $\mathbf{R}^3$ 上，两点 $\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}$ 之间的距离为

$$\|\boldsymbol{X}-\boldsymbol{Y}\| = \sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2},$$

其中 $\boldsymbol{X} = (x_1, y_1, z_1)$，$\boldsymbol{Y} = (x_2, y_2, z_2)$.

无论是实轴 $\mathbf{R}^1$，平面 $\mathbf{R}^2$，空间 $\mathbf{R}^3$ 中，两点之间的距离均满足：

(1) 正定性：$\|\boldsymbol{X}-\boldsymbol{Y}\| \geqslant 0$，当且仅当 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{Y}$ 时，$\|\boldsymbol{X}-\boldsymbol{Y}\| = 0$；

(2) 对称性：$\|\boldsymbol{X}-\boldsymbol{Y}\| = \|\boldsymbol{Y}-\boldsymbol{X}\|$；

(3) 三角不等式：$\|\boldsymbol{X}-\boldsymbol{Y}\| \leqslant \|\boldsymbol{X}-\boldsymbol{Z}\| + \|\boldsymbol{Z}-\boldsymbol{Y}\|$.

第二节　集合

无论是实轴 $\mathbf{R}^1$，平面 $\mathbf{R}^2$，空间 $\mathbf{R}^3$ 中，满足一定性质的点放在一起，称为集合.

【例 2.1】 $A = \{x \in \mathbf{R}^1 \mid x > 0\}$，$B = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2+y^2 \leqslant 1\}$，$C = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid z > \sqrt{x^2+y^2}\}$ 分别为实轴 $\mathbf{R}^1$，平面 $\mathbf{R}^2$，空间 $\mathbf{R}^3$ 中的三个集合.

邻域：邻域是特殊的集合，

(1) 在数轴 $\mathbf{R}^1$ 上的点 x_0 的 $\delta(\delta > 0)$ 邻域是指点集

$$B(x_0, \delta) = \{x \in \mathbf{R}^1 \mid |x - x_0| < \delta\}.$$

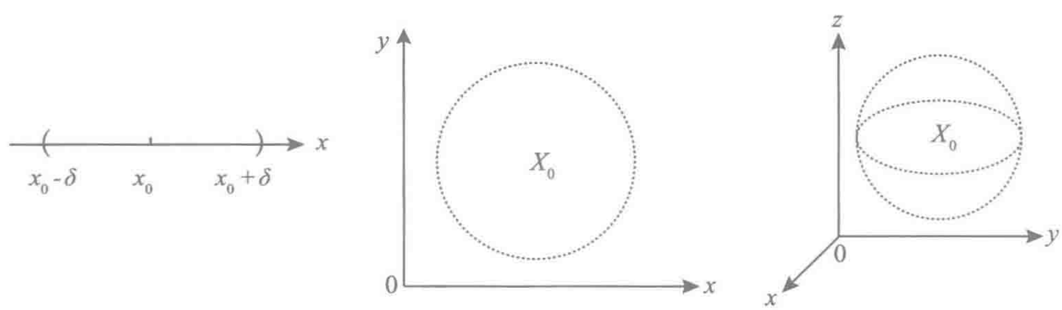
(2) 在平面 $\mathbf{R}^2$ 上的点 X_0 的 $\delta(\delta > 0)$ 邻域是指点集

$$B(\boldsymbol{X}_0, \delta) = \{\boldsymbol{X} \in \mathbf{R}^2 \mid \|\boldsymbol{X}-\boldsymbol{X}_0\| < \delta\}.$$

(3) 在空间 $\mathbf{R}^3$ 上的点 $\boldsymbol{X}_0$ 的 $\delta(\delta > 0)$ 邻域是指点集

$$B(\boldsymbol{X}_0, \delta) = \{\boldsymbol{X} \in \mathbf{R}^3 \mid \|\boldsymbol{X}-\boldsymbol{X}_0\| < \delta\}.$$

它们的图形分别为



实轴 $\mathbf{R}^1$ 上的邻域　　平面 $\mathbf{R}^2$ 上的邻域　　空间 $\mathbf{R}^3$ 上的邻域

图 1—2

去心邻域:实轴 $\mathbf{R}^1$,平面 $\mathbf{R}^2$,空间 $\mathbf{R}^3$ 上的去心邻域分别为

$$B_0(x_0,\delta)=\{x\in\mathbf{R}^1 \mid 0<|x-x_0|<\delta\}$$
$$B_0(\boldsymbol{X}_0,\delta)=\{\boldsymbol{X}\in\mathbf{R}^2 \mid 0<\|\boldsymbol{X}-\boldsymbol{X}_0\|<\delta\}$$
$$B_0(\boldsymbol{X}_0,\delta)=\{\boldsymbol{X}\in\mathbf{R}^3 \mid 0<\|\boldsymbol{X}-\boldsymbol{X}_0\|<\delta\}$$

设集合 $\Omega\subset\mathbf{R}^n$,点 $\boldsymbol{X}_0\in\mathbf{R}^n$,$(n=1,2,3)$,我们定义

(1) 内点:如果存在 $\delta>0$,使得 $\boldsymbol{X}_0$ 的某个邻域 $B(\boldsymbol{X}_0,\delta)\subset\Omega$,则称 $\boldsymbol{X}_0$ 是集合 Ω 的一个内点;

(2) 边界点:如果对于任意 $\delta>0$,同时满足

$$B(\boldsymbol{X}_0,\delta)\cap\Omega\neq\varnothing,B(\boldsymbol{X}_0,\delta)\cap(\mathbf{R}^n\backslash\Omega)\neq\varnothing$$

则称 $\boldsymbol{X}_0$ 为 Ω 的一个边界点,其中 $\mathbf{R}^n\backslash\Omega=\{\boldsymbol{X}\in\mathbf{R}^n \mid \boldsymbol{X}\notin\Omega\}$ 为集合 Ω 的余集;

(3) 开集:若集合 Ω 中的每一点均为内点,则称 Ω 为开集;

(4) 闭集:若集合 Ω 的余集 $\mathbf{R}^n\backslash\Omega$ 为开集,则称 Ω 为闭集;

(5) 内部:由集合 Ω 的所有内点构成的集合称为 Ω 的内部,记作 $\mathring{\Omega}$. $\mathring{\Omega}$ 是包含于 Ω 的最大开集;

(6) 边界:由集合 Ω 的所有边界点构成的集合称为 Ω 的边界,记作 $\partial\Omega$;

(7) 闭包:集合 Ω 的闭包 $\overline{\Omega}$ 为:$\overline{\Omega}=\Omega\cup\partial\Omega$;$\overline{\Omega}$ 为包含 Ω 的最小闭集;

(8) 有界集:存在 $M>0$,使得对于任意的 $\boldsymbol{X}\in\Omega$,都有 $\|\boldsymbol{X}\|\leqslant M$;

(9) 无界集:对于任意的 $M>0$,存在 $\boldsymbol{X}\in\Omega$,使得 $\|\boldsymbol{X}\|>M$.

在例 2.1 中,$A\subset\mathbf{R}^1$ 为无界开集,$B\subset\mathbf{R}^2$ 为有界闭集,$C\subset\mathbf{R}^3$ 为无界开集.

这些概念在后面会用到.

第三节　向量及其运算

3.1　向量

$\mathbf{R}^2$ 或 $\mathbf{R}^3$ 中,不仅具有大小,而且具有确定方向的量称为向量. 以 $\mathbf{R}^3$ 为例,

(1)$\mathbf{R}^3$ 向量的代数表示:

$$\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,a_3)=a_1\boldsymbol{i}+a_2\boldsymbol{j}+a_3\boldsymbol{k}$$

其中 $a_1,a_2,a_3\in\mathbf{R}^1$ 分别称为向量 $\boldsymbol{a}$ 的 x 分量,y 分量和 z 分量;

(2) 长短(模):$\|\boldsymbol{a}\|=\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}$;

(3) 方向:如果 $\boldsymbol{a}$ 是一个非零向量,则

$$(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)=\left(\frac{a_1}{\|\boldsymbol{a}\|},\frac{a_2}{\|\boldsymbol{a}\|},\frac{a_3}{\|\boldsymbol{a}\|}\right),$$

其中 α,β,γ 分别是向量 $\boldsymbol{a}$ 和 x,y,z 轴正向的夹角,$\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 的方向余弦.

显然有

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1.$$

3.2　向量的线性运算

(1) 向量的加减法:向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的和与差记为 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$. 向量的加法 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 服从平行四边形法则,向量的减法 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 服从三角形法则(如下图所示).

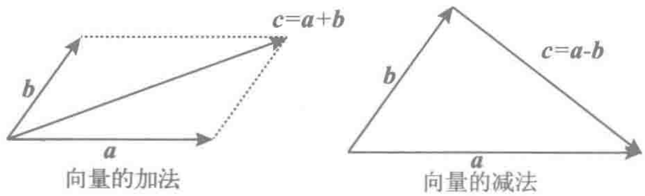


图 1－3

（2）向量的数乘：设 $\boldsymbol{a}$ 是一个非零向量，λ 是一个实数. 用实数乘以向量的运算 $\lambda\boldsymbol{a}$ 称为向量的数乘，它也是向量：

$\lambda\boldsymbol{a}$ 的模：$\|\lambda\boldsymbol{a}\| = |\lambda|\ \|\boldsymbol{a}\|$；

$\lambda\boldsymbol{a}$ 的方向：当 $\lambda > 0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}$ 的方向与 $\boldsymbol{a}$ 相同；当 $\lambda < 0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}$ 的方向与 $\boldsymbol{a}$ 相反；当 $\lambda = 0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}$ 是零向量.

（3）单位向量：若 $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}$（零向量），则 $\boldsymbol{a}^0 = \dfrac{\boldsymbol{a}}{\|\boldsymbol{a}\|}$ 是一个单位向量（$\|\boldsymbol{a}^0\| = 1$），并且有

$$\boldsymbol{a} = \|\boldsymbol{a}\|\boldsymbol{a}^0$$

3.3　向量的数量积和向量积

（1）$\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的数量积（点积）$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ 定义为：

$$\boxed{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = \|\boldsymbol{a}\|\ \|\boldsymbol{b}\|\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle}$$

其中 $\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle$ 表示向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的夹角.

$$\boxed{\text{若 } \boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}, \boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{0}, \text{则 } \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{b}}$$

$$\boxed{\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle = \frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{\|\boldsymbol{a}\|\ \|\boldsymbol{b}\|}}$$

$$\boxed{|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}| \leqslant \|\boldsymbol{a}\|\ \|\boldsymbol{b}\|}$$

$$\boxed{\|\boldsymbol{a}\| = \sqrt{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}}}$$

$$\boxed{\text{向量 } \boldsymbol{a} \text{ 在向量 } \boldsymbol{b} \text{ 上的投影的长度} (\boldsymbol{a})_{\boldsymbol{b}} = \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}^0 = \frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{\|\boldsymbol{b}\|}}$$

（2）$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的叉积（向量积）$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 是一个向量，其定义如下：

$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 的长度：$\|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\| = \|\boldsymbol{a}\|\ \|\boldsymbol{b}\|\sin\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle$；

$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 的方向：$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} \perp \boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} \perp \boldsymbol{b}$，且向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 以及 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 满足右手螺旋法则.

$$\boxed{\|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\| = \text{以向量 } \boldsymbol{a},\boldsymbol{b} \text{ 作邻边组成一个平行四边形的面积}}$$

$$\boxed{\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} = -\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}}$$

$$\boxed{(\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c} = \lambda\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}+\mu\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}}$$

$$\boxed{\text{若 } \boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}, \boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{0}, \text{则 } \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0} \Leftrightarrow \boldsymbol{a} \mathbin{/\!/} \boldsymbol{b}}$$

3.4　向量的混合积

向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 的混合积为 $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}$，记作 $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})$，它是一个实数.

$$\boxed{\text{以 } \boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c} \text{ 为棱作平行六面体的体积等于 } |(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})|}$$