

2017 全国十二大考研辅导机构指定用书

考研  
数学

高数

不过如此

主编 © 章纪民 (清华大学)

移动互联网时代高效便捷的学习模式 **双色印刷**

预备知识

微分


积分

级数

常微分方程

别怕!

凡是有点儿难度的考点, 书中都有讲解视频, 立刻扫描书中的二维码, 可跟着先学习一遍!

记得先下载  V研客扫码才会看到视频, 登陆 [www.vyanke.com](http://www.vyanke.com) 还有更多视频

013  
910



2017

全国十二大考研辅导机构指定用书

# 高等数学 高数

# 不过如此

主编 ◎ 章纪民

本书专属： \_\_\_\_\_

我要认真、独立地学完本书内容。

AP-7106

图书在版编目(CIP)数据

考研数学:高数不过如此 / 章纪民主编. —西安:西安交通大学出版社,2015.4  
ISBN 978-7-5605-7326-7

I. ①考… II. ①章… III. ①高等数学—研究生—入学考试—自学参考资料 IV. ①013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 110034 号

书 名:考研数学:高数不过如此  
主 编:章纪民  
出版发行:西安交通大学出版社  
地 址:西安市兴庆南路 10 号(邮编:710049)  
电 话:(029)82668315(总编办)  
(029)82668357 82667874(发行部)  
经 销:新华书店  
印 刷:保定市中画美凯印刷有限公司  
版 次:2015 年 8 月第 1 版  
印 次:2015 年 8 月第 1 次印刷  
开 本:787mm×1092mm 1/16  
印 张:17.75  
字 数:239 千字  
书 号:ISBN 978-7-5605-7326-7/O·503  
定 价:49.80 元

图书如有印装质量问题,请联系调换

电话:(010)51906740

版权所有 侵权必究

# 前 言

本书是专为考研复习准备的书。

大学数学教学和考研最大的区别就是大学的数学教学以传授知识为目的,追求的是数学的系统性(或者自封闭性)。以知识点为介质,从定义到定理逐个讲解,证明,力图使学生知其然知其所以然。而我们考研是以学会做题为目的,知其然就足矣。

大学数学教学有强的一面,严谨;也有弱的一面,关注局部的知识,而缺少综合性,缺少知识点之间的联系。而考研最大的特点就是综合。往往在一道题里综合了几个知识点。毕竟微积分有这么多的知识,要在考研试卷的有限的题目上比较全面地呈现出来,只能依赖于综合了。

综合性是本书的一大特点。

既然是考研用书,我们在定义的引入、定理的证明上就不花太多功夫了。我们直接引入定义,介绍定理,然后着重讲解定理的使用以及使用时的禁忌。本书的读者应该已经学过微积分,还保存大学微积分的教材。若遇到关键地方,可以参阅微积分教材。

本书在内容编排上作了一些新的尝试。传统的考研复习书以及微积分教材的编写次序是

一元微分 $\rightarrow$ 一元积分 $\rightarrow$ 多元微分 $\rightarrow$ 多元积分

中间和最后介绍级数和微分方程。本书的编写次序是



在预备知识中,我们介绍了

实轴  $\mathbb{R}^1$ , 平面  $\mathbb{R}^2$  及空间  $\mathbb{R}^3$  中的点,点与点的距离;集合及其分类;平面和空间向量的线性运算及非线性运算及其几何意义。

函数的概念及表示法,函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性;复合函数、反函数、分段函数和隐函数;基本初等函数的性质及其图形;初等函数;函数关系的建立。

平面与直线的表示方法 曲面与曲线的表示方法常见的曲面与曲线。

坐标系与坐标变换。

我们之所以把这些知识独立出来,是因为在考研中我们会用到这些知识,并且这些知识只要会用就行。我们把这些预备知识介绍了以后,就可以专注于考研知识的介绍,而不必分心。这样我们的系统就更连贯了。

在微分部分,我们连贯地介绍了一元函数和多元函数的极限、连续和微分,以及微分的应用。一元函数和多元函数既有许多相通之处,放在一起讲,可以彼此借鉴、融会贯通;他们也有区别,放在一起讲,又可以相互比较,对照。

同样,在积分部分,一元函数和多元函数的积分也放在一起连贯地介绍,目的与微分是相同的。最后我们介绍级数、微分方程以及经济数学(差分方程和数学在经济上的应用)。

本书同时还列举了许多反例,以及定理运用是的禁忌,方便读者理解和使用定理。

本书的编排是一个创举,其目的就是给读者全新的体验。我希望我们的读者在看完本书后,会觉得:

**考研,不过如此!**

最后,祝大家考研成功!

编者

2015.8

## 本书部分常用符号

$\in$	属于
$\forall$	任意的
$\exists$	存在,有
$ x $	$x$ 的绝对值
$\ X-Y\ $	$X, Y$ 间的距离
$\{x_n\}_{n=1}^{+\infty}$	数列,简记为 $\{x_n\}$
$\ll$	远小于
$\gg$	远大于
$\sim$	等价无穷小
$\Leftrightarrow$	等价于,充分必要
$C(a, b)$ 类函数	区间 $(a, b)$ 上的连续函数
$C^{(2)}$ 类函数	二阶导数连续的函数
$dx \wedge dy$	曲面积分微元在 $xy$ 面上的投影, $dx \wedge dy = \cos \alpha dS$

# 目 录

## 第一章 实轴 $\mathbf{R}^1$ , 平面 $\mathbf{R}^2$ 及空间 $\mathbf{R}^3$ /1

### 第一节 点, 距离/1

### 第二节 集合/2

### 第三节 向量及其运算/3

(数一要求, 数二、数三参考)

#### 3.1 向量/3

#### 3.2 向量的线性运算/3

#### 3.3 向量的数量积和向量积/4

#### 3.4 向量的混合积/4

#### 3.5 用空间直角坐标系进行向量运算/5

## 第二章 函数/8

### 第一节 函数的定义与性质/8

#### 1.1 函数的定义/8

#### 1.2 函数的简单性质/9

### 第二节 函数的运算/10

### 第三节 基本初等函数与初等函数/11

### 第四节 分段函数/13

## 第三章 曲线与曲面/15

### 第一节 平面/15

### 第二节 直线/16

### 第三节 点, 直线, 平面之间的关系/17

#### 3.1 点 $(x_1, x_2, x_3)$ 与点 $(y_1, y_2, y_3)$ 的关系/17

#### 3.2 点与平面的关系/17

#### 3.3 点 $(x_0, y_0, z_0)$ 与直线 $\frac{x-x_1}{l} = \frac{y-y_1}{m} = \frac{z-z_1}{n}$ 的关系/17

#### 3.4 两个空间平面的相互关系/17

#### 3.5 两条空间直线的相互关系/18

#### 3.6 直线与空间平面的关系/18

### 第四节 空间曲面/20

(仅数一要求)

#### 4.1 简单的二次曲面/20

#### 4.2 特殊空间曲面: 柱面、旋转面、锥面方程/21

### 第五节 曲线/24

## 第四章 坐标系与坐标变换/26

### 第一节 平面极坐标系/26

### 第二节 空间柱坐标系/28

(仅数一要求)

### 第三节 空间球坐标系/28

(仅数一要求)

## 第五章 极限/30

## 第一节 数列的极限/30

- 1.1 数列 $\{x_n\}_{n=1}^{+\infty}$ /30
- 1.2 数列的分类/30
- 1.3 数列的子列 $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{+\infty}$ /31
- 1.4 数列的运算—四则运算/31
- 1.5 数列的极限/31
- 1.6 数列极限运算性质/32
- 1.7 数列收敛的证明方法/33
- 1.8 数列极限不存在的证明方法/38
- 1.9 数列极限的性质/38

## 第二节 一元函数的极限/39

- 2.1 一元函数极限的概念/39
- 2.2 函数极限的运算性质/40
- 2.3 函数极限的性质/40
- 2.4 函数有极限的证明方法/41
- 2.5 函数极限的计算方法/41

## 第三节 多元函数的极限/46

- 3.1 多元函数的极限定义/46
- 3.2 多元函数的极限多样性/46
- 3.3 多元函数的极限的运算性质/47
- 3.4 多元函数的极限存在的证明/47

## 第四节 函数的连续性及连续函数的性质/48

- 4.1 函数在一点连续的概念/48
- 4.2 一元函数的连续性/48
- 4.3 有界闭区间上一元连续函数的性质/51
- 4.4 有界闭区域上多元连续函数的性质/52

## 第五节 近年考题/53

## 第六章 一元函数的导数与微分/56

## 第一节 一元函数导数与微分的定义/56

- 1.1 导数的定义/56
- 1.2 微分的定义/57
- 1.3 导数的几何意义:切线的斜率/57

## 第二节 一元函数导数的运算法则及初等函数的导数与微分/60

- 2.1 导数的四则运算法则/60
- 2.2 微分的四则运算法则/60
- 2.3 复合函数求导/60
- 2.4 初等函数的导数公式/61



**第三节 一元函数的高阶导数/63**

- 3.1 导函数/63
- 3.2 高阶导数/63
- 3.3 莱布尼茨公式/64

**第四节 近年考题/66**

**第七章 多元函数的偏导数与全微分/67**

**第一节 多元函数偏导数与全微分的定义/67**

- 1.1 二元函数偏导数/67
- 1.2 全微分/68
- 1.3 多元函数的方向导数/71 (仅数一要求)
- 1.4 多元函数的梯度/71 (仅数一要求)
- 1.5 偏导函数/73
- 1.6 多元函数连续,偏导存在,可微以及偏导函数连续之间的关系/73
- 1.7 高阶偏导数/73

**第二节 多元函数偏导的运算法则/73**

**第三节 隐函数,反函数及参数函数的微分/77**

- 3.1 隐函数的求导/77
- 3.2 反函数求导/79
- 3.3 参数函数/80

**第四节 近年考题/81**

**第八章 微分学的应用/83**

**第一节 微分中值定理/83**

- 1.1 微分中值定理/83
- 1.2 等式的证明/83
- 1.3 不等式的证明/84
- 1.4 存在性证明/86
- 1.5 其他题目/87

**第二节 泰勒公式/88**

- 2.1 一元函数的泰勒公式/88
- 2.2 常见函数的泰勒展开/88
- 2.3 二元函数的二阶泰勒公式/89 (仅数一要求)
- 2.4 直接展开与间接展开/89
- 2.5 泰勒展开的应用/92

**第三节 洛必达法则/95**

**第四节 一元函数的性态/97**

- 4.1 基本概念/97
- 4.2 一阶导数判断法/97
- 4.3 二阶导数判别法/98
- 4.4 渐近线/98
- 4.5 曲线作图/98
- 4.6 曲率与曲率半径/98

- 第五节 多元函数的极值与最值/104
- 5.1 基本概念/104
- 5.2 极值点的必要条件/104
- 5.3 极值点的充分条件/104
- 5.4 多元函数的条件极值与最值/106
- 第六节 几何应用/113
- 6.1 平面曲线的切线与法线/113
- 6.2 空间曲面的切平面与法线/115
- 6.3 空间曲线的切线和法平面/118
- 第七节 近年考题/120

第九章 一元函数的积分/123

- 第一节 一元函数的不定积分/123
- 1.1 基本概念/123
- 1.2 不定积分的基本性质/124
- 1.3 常见的积分公式/124
- 1.4 不定积分的计算方法/125
- 第二节 一元函数定积分的定义及性质/133
- 2.1 定积分的定义/133
- 2.2 定积分的性质/134
- 第三节 变限积分定义的函数/136
- 3.1 变限积分/136
- 3.2 有关变限积分定义的函数的问题/138
- 第四节 定积分的计算/141
- 4.1 牛顿—莱布尼兹公式/141
- 第五节 关于定积分的证明题/147
- 5.1 等式问题/147
- 5.2 不等式问题/150
- 第六节 一元函数的广义积分/155
- 6.1 基本概念/155
- 6.2 非负函数的广义积分收敛性判断/156
- 6.3 一般函数(可正负交错函数)的广义积分收敛性判断/157
- 第七节 近年考题/161

第十章 二重积分/164

- 第一节 定义和性质/164
- 1.1 二重积分的基本概念/164
- 1.2 简单性质:对积分区域的可加性,线性性,保序性,估值性,中值定理/164
- 第二节 二重积分的计算/167
- 2.1 直角坐标系下二重积分的计算——化成累次积分/167
- 2.2 在极坐标系下的二重积分化为二次积分/170
- 第三节 近年考题/171

- 第十一章 三重积分/173 (仅数一要求)
- 第一节 定义与性质/173
- 1.1 三重积分的概念/173
- 1.2 三重积分简单性质/173
- 第二节 三重积分的计算/174
- 2.1 三重积分在直角坐标系下的计算:累次积分法/174
- 2.2 坐标变换:柱坐标系/176
- 2.3 在球坐标系下的三重积分化为三次积分/177
- 第十二章 积分的应用/179
- 第一节 一元函数定积分的应用/179
- 1.1 平面区域的面积/179
- 1.2 曲线的弧长/179
- 1.3 旋转体体积/180
- 1.4 旋转曲面的表面积/181
- 第二节 二重积分的应用/181 (仅数一要求)
- 2.1 空间曲面面积/181
- 2.2 空间区域的体积/182
- 2.3 质量中心问题/183
- 第三节 三重积分的应用/184 (仅数一要求)
- 3.1 质量中心问题/184
- 3.2 转动惯量问题/184
- 3.3 万有引力问题/184
- 第四节 近年考题/185
- 第十三章 第一类曲线曲面积分/187 (仅数一要求)
- 第一节 第一类曲线积分/187
- 1.1 第一类曲线积分的定义与性质/187
- 1.2 第一类曲线积分的计算/187
- 第二节 第一类曲面积分/190
- 2.1 第一类曲面积分的定义与性质/190
- 2.2 第一类曲面积分的计算/190
- 第十四章 第二类曲线曲面积分/193 (仅数一要求)
- 第一节 第二类曲线积分/193
- 1.1 第二类曲线积分的定义与性质/193
- 1.2 第二类曲线积分的计算/193
- 第二节 第二类曲面积分/195
- 2.1 第二类曲面积分的定义与性质/195
- 2.2 第二类曲面积分的计算/196

## 第三节 场论/198

- 3.1 数量值函数的梯度,向量值函数的散度和旋度/198
- 3.2 三个基本公式:Green,Guass,Stokes 公式/199
- 3.3 计算问题/200
- 3.4 平面曲线积分与路径无关的条件/202
- 3.5 空间第二类曲线积分与路径无关/204

## 第四节 近年考题/205

## 第十五章 常数项级数/208

## 第一节 非负常数项级数/208

- 1.1 基本概念/208
- 1.2 级数的基本性质/208
- 1.3 收敛性的判断/209

## 第二节 一般常数项级数/216

- 2.1 基本概念/216
- 2.2 收敛级数的基本性质/216
- 2.3 收敛性的判断/216

## 第三节 近年考题/220

## 第十六章 函数项级数/222

## 第一节 函数项级数,幂级数/222

- 1.1 函数项级数的基本概念/222
- 1.2 幂级数及其收敛半径、收敛区间(指开区间)和收敛域/223
- 1.3 幂级数在其收敛区间内的基本性质/225
- 1.4 初等函数的幂级数展开式/226 (仅数一要求)
- 1.5 幂级数的和函数/229

## 第二节 傅里叶级数/232 (仅数一要求)

- 2.1 三角函数系 $\{1, \cos nt, \sin nt \mid n=1, 2, \dots\}$ 是 $[-\pi, \pi]$ 上的正交性/232
- 2.2 周期函数的傅里叶(Fourier)系数与傅里叶级数/232
- 2.3 半周期上定义的函数的延拓,正弦傅里叶级数,余弦傅里叶级数/233
- 2.4 狄利克雷定理/233

## 第三节 近年考题/236

- 第十七章 一阶常微分方程/238
- 第一节 基本概念/238
- 第二节 一阶常微分方程求解/239
- 2.1 变量可分离的方程求解/239
- 2.2 可化成分离变量方程的方程/240
- 2.3 一阶线性常微分方程求解/241
- 2.4 可化为一阶线性常微分方程的方程/242
- 2.5 全微分方程/243
- 第三节 高阶可降阶类型方程的求解/244 (数一、二要求)
- 3.1  $y^{(n)} = f(x)$ 型方程/244
- 3.2  $y'' = f(x, y')$ 型方程/244
- 3.3  $y'' = f(y, y')$ 型方程/245
- 第四节 近年考题/247
- 第十八章  $n$ 阶线性微分方程/249
- 第一节 解的性质及解的结构/249
- 第二节 常系数齐次线性微分方程/250
- 2.1  $n$ 阶线性常系数齐次方程的求解/250
- 第三节 简单的二阶常系数非齐次线性微分方程/252
- 第四节 常微分方程的应用/256
- 第五节 近年考题/259
- 第十九章 差分方程/260 (仅数三要求)
- 第一节 差分方程简介/260
- 第二节 一阶线性常系数差分方程的解法及其应用/261
- 第二十章 数学在经济学中的应用/263 (仅数三要求)
- 第一节 经济学中的函数/263
- 第二节 微积分在经济学中的应用/263
- 第三节 近年考题/264

# 第一部分 预备知识

## 第一章 实轴 $\mathbf{R}^1$ , 平面 $\mathbf{R}^2$ 及空间 $\mathbf{R}^3$

**内容提要:** 实轴  $\mathbf{R}^1$ , 平面  $\mathbf{R}^2$  及空间  $\mathbf{R}^3$  中的点, 点与点的距离; 集合及其分类; 平面和空间向量的线性运算及非线性运算及其几何意义.

有理数: 整数和分数.

无理数: 无限不循环小数.

实数: 有理数和无理数的全体, 记作  $\mathbf{R}$ .

实轴  $\mathbf{R}^1$ : 规定了原点, 正方向和单位长度的直线叫数轴.

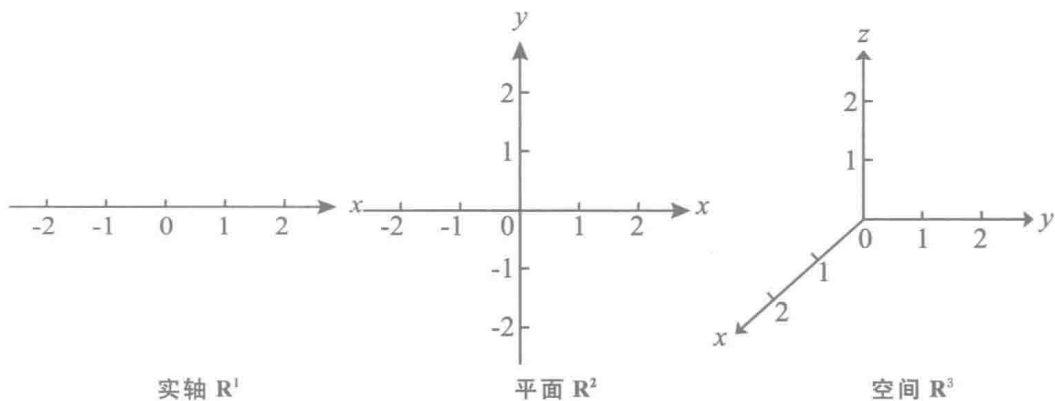


图 1-1

实轴上的点和实数是 1-1 对应的, 即任意一个实数在实轴上有一个对应点; 而实轴上的任意一个点都对应一个实数.

平面:  $\mathbf{R}^2 = \{(x, y) | x \in \mathbf{R}, y \in \mathbf{R}\}$ .

三维空间:  $\mathbf{R}^3 = \{(x, y, z) | x \in \mathbf{R}, y \in \mathbf{R}, z \in \mathbf{R}\}$ .

### 第一节 点, 距离

实轴  $\mathbf{R}^1$ , 平面  $\mathbf{R}^2$ , 空间  $\mathbf{R}^3$  中的一个元素有时称为一个点, 分别记作

$$x \in \mathbf{R}^1, X \in \mathbf{R}^2, X \in \mathbf{R}^3$$

在实轴  $\mathbf{R}^1$  上, 两点  $x, y$  之间的距离为  $\|x - y\| = |x - y|$ , 其中  $|x|$  为绝对值函数

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0, \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

绝对值函数满足:

(1) 绝对值不等式:  $-|x| \leq x \leq |x|$ ;

(2) 三角不等式:  $\forall x, y \in \mathbf{R}^1$ , 有  $|x + y| \leq |x| + |y|$ ,  $|x - y| \geq ||x| - |y||$ .

在平面  $\mathbf{R}^2$  上, 两点  $\mathbf{X}, \mathbf{Y}$  之间的距离为

$$\|\mathbf{X} - \mathbf{Y}\| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2},$$

其中  $\mathbf{X} = (x_1, y_1), \mathbf{Y} = (x_2, y_2)$ .

在空间  $\mathbf{R}^3$  上, 两点  $\mathbf{X}, \mathbf{Y}$  之间的距离为

$$\|\mathbf{X} - \mathbf{Y}\| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2},$$

其中  $\mathbf{X} = (x_1, y_1, z_1), \mathbf{Y} = (x_2, y_2, z_2)$ .

无论是实轴  $\mathbf{R}^1$ , 平面  $\mathbf{R}^2$ , 空间  $\mathbf{R}^3$  中, 两点之间的距离均满足:

(1) 正定性:  $\|\mathbf{X} - \mathbf{Y}\| \geq 0$ , 当且仅当  $\mathbf{X} = \mathbf{Y}$  时,  $\|\mathbf{X} - \mathbf{Y}\| = 0$ ;

(2) 对称性:  $\|\mathbf{X} - \mathbf{Y}\| = \|\mathbf{Y} - \mathbf{X}\|$ ;

(3) 三角不等式:  $\|\mathbf{X} - \mathbf{Y}\| \leq \|\mathbf{X} - \mathbf{Z}\| + \|\mathbf{Z} - \mathbf{Y}\|$ .

## 第二节 集合

无论是实轴  $\mathbf{R}^1$ , 平面  $\mathbf{R}^2$ , 空间  $\mathbf{R}^3$  中, 满足一定性质的点放在一起, 称为集合.

**【例 2.1】**  $A = \{x \in \mathbf{R}^1 \mid x > 0\}$ ,  $B = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ ,  $C = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid z > \sqrt{x^2 + y^2}\}$  分别为实轴  $\mathbf{R}^1$ , 平面  $\mathbf{R}^2$ , 空间  $\mathbf{R}^3$  中的三个集合.

邻域: 邻域是特殊的集合,

(1) 在数轴  $\mathbf{R}^1$  上的点  $x_0$  的  $\delta$  ( $\delta > 0$ ) 邻域是指点集

$$B(x_0, \delta) = \{x \in \mathbf{R}^1 \mid |x - x_0| < \delta\}.$$

(2) 在平面  $\mathbf{R}^2$  上的点  $X_0$  的  $\delta$  ( $\delta > 0$ ) 邻域是指点集

$$B(\mathbf{X}_0, \delta) = \{\mathbf{X} \in \mathbf{R}^2 \mid \|\mathbf{X} - \mathbf{X}_0\| < \delta\}.$$

(3) 在空间  $\mathbf{R}^3$  上的点  $X_0$  的  $\delta$  ( $\delta > 0$ ) 邻域是指点集

$$B(\mathbf{X}_0, \delta) = \{\mathbf{X} \in \mathbf{R}^3 \mid \|\mathbf{X} - \mathbf{X}_0\| < \delta\}.$$

它们的图形分别为

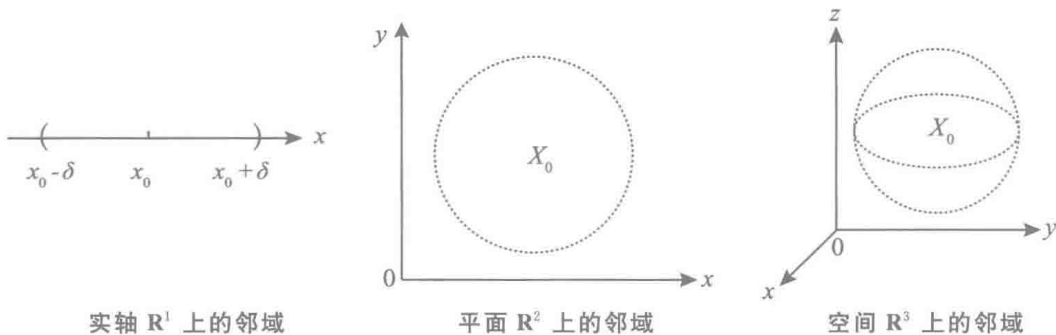


图 1-2

去心邻域: 实轴  $\mathbf{R}^1$ , 平面  $\mathbf{R}^2$ , 空间  $\mathbf{R}^3$  上的去心邻域分别为

$$B_0(x_0, \delta) = \{x \in \mathbf{R}^1 \mid 0 < |x - x_0| < \delta\}$$

$$B_0(\mathbf{X}_0, \delta) = \{\mathbf{X} \in \mathbf{R}^2 \mid 0 < \|\mathbf{X} - \mathbf{X}_0\| < \delta\}$$

$$B_0(\mathbf{X}_0, \delta) = \{\mathbf{X} \in \mathbf{R}^3 \mid 0 < \|\mathbf{X} - \mathbf{X}_0\| < \delta\}$$

设集合  $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ , 点  $\mathbf{X}_0 \in \mathbf{R}^n$ , ( $n = 1, 2, 3$ ), 我们定义

(1) 内点: 如果存在  $\delta > 0$ , 使得  $\mathbf{X}_0$  的某个邻域  $B(\mathbf{X}_0, \delta) \subset \Omega$ , 则称  $\mathbf{X}_0$  是集合  $\Omega$  的一个内点;

(2) 边界点: 如果对于任意  $\delta > 0$ , 同时满足

$$B(\mathbf{X}_0, \delta) \cap \Omega \neq \emptyset, B(\mathbf{X}_0, \delta) \cap (\mathbf{R}^n \setminus \Omega) \neq \emptyset$$

则称  $\mathbf{X}_0$  为  $\Omega$  的一个边界点, 其中  $\mathbf{R}^n \setminus \Omega = \{\mathbf{X} \in \mathbf{R}^n \mid \mathbf{X} \notin \Omega\}$  为集合  $\Omega$  的余集;

(3) 开集: 若集合  $\Omega$  中的每一点均为内点, 则称  $\Omega$  为开集;

(4) 闭集: 若集合  $\Omega$  的余集  $\mathbf{R}^n \setminus \Omega$  为开集, 则称  $\Omega$  为闭集;

(5) 内部: 由集合  $\Omega$  的所有内点构成的集合称为  $\Omega$  的内部, 记作  $\Omega^\circ$ .  $\Omega^\circ$  是包含于  $\Omega$  的最大开集;

(6) 边界: 由集合  $\Omega$  的所有边界点构成的集合称为  $\Omega$  的边界, 记作  $\partial\Omega$ ;

(7) 闭包: 集合  $\Omega$  的闭包  $\bar{\Omega}$  为:  $\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$ ;  $\bar{\Omega}$  为包含  $\Omega$  的最小闭集;

(8) 有界集: 存在  $M > 0$ , 使得对于任意的  $\mathbf{X} \in \Omega$ , 都有  $\|\mathbf{X}\| \leq M$ ;

(9) 无界集: 对于任意的  $M > 0$ , 存在  $\mathbf{X} \in \Omega$ , 使得  $\|\mathbf{X}\| > M$ .

在例 2.1 中,  $A \subset \mathbf{R}^1$  为无界开集,  $B \subset \mathbf{R}^2$  为有界闭集,  $C \subset \mathbf{R}^3$  为无界开集.

这些概念在后面会用到.

### 第三节 向量及其运算

#### 3.1 向量

$\mathbf{R}^2$  或  $\mathbf{R}^3$  中, 不仅具有大小, 而且具有确定方向的量称为向量. 以  $\mathbf{R}^3$  为例,

(1)  $\mathbf{R}^3$  向量的代数表示:

$$\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3) = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$$

其中  $a_1, a_2, a_3 \in \mathbf{R}^1$  分别称为向量  $\mathbf{a}$  的  $x$  分量,  $y$  分量和  $z$  分量;

(2) 长短(模):  $\|\mathbf{a}\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$ ;

(3) 方向: 如果  $\mathbf{a}$  是一个非零向量, 则

$$(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma) = \left( \frac{a_1}{\|\mathbf{a}\|}, \frac{a_2}{\|\mathbf{a}\|}, \frac{a_3}{\|\mathbf{a}\|} \right),$$

其中  $\alpha, \beta, \gamma$  分别是向量  $\mathbf{a}$  和  $x, y, z$  轴正向的夹角,  $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$  称为向量  $\mathbf{a}$  的方向余弦.

显然有

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

#### 3.2 向量的线性运算

(1) 向量的加减法: 向量  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  的和与差记为  $\mathbf{a} + \mathbf{b}$  与  $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ . 向量的加法  $\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$  服从平行四边形法则, 向量的减法  $\mathbf{c} = \mathbf{a} - \mathbf{b}$  服从三角形法则(如下图所示).



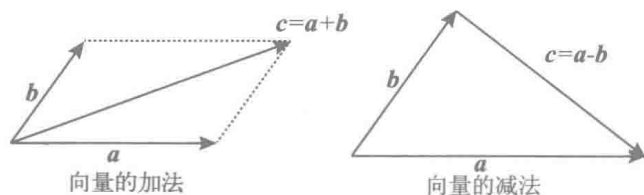


图 1-3

(2) 向量的数乘: 设  $a$  是一个非零向量,  $\lambda$  是一个实数. 用实数乘以向量的运算  $\lambda a$  称为向量的数乘, 它也是向量:

$\lambda a$  的模:  $\|\lambda a\| = |\lambda| \|a\|$ ;

$\lambda a$  的方向: 当  $\lambda > 0$  时,  $\lambda a$  的方向与  $a$  相同; 当  $\lambda < 0$  时,  $\lambda a$  的方向与  $a$  相反; 当  $\lambda = 0$  时,  $\lambda a$  是零向量.

(3) 单位向量: 若  $a \neq 0$  (零向量), 则  $a^0 = \frac{a}{\|a\|}$  是一个单位向量 ( $\|a^0\| = 1$ ), 并且有

$$a = \|a\| a^0$$

### 3.3 向量的数量积和向量积

(1)  $a$  和  $b$  的数量积 (点积)  $a \cdot b$  定义为:

$$a \cdot b = \|a\| \|b\| \cos\langle a, b \rangle$$

其中  $\langle a, b \rangle$  表示向量  $a$  和  $b$  的夹角.

$$\text{若 } a \neq 0, b \neq 0, \text{ 则 } a \cdot b = 0 \Leftrightarrow a \perp b$$

$$\cos\langle a, b \rangle = \frac{a \cdot b}{\|a\| \|b\|}$$

$$|a \cdot b| \leq \|a\| \|b\|$$

$$\|a\| = \sqrt{a \cdot a}$$

$$\text{向量 } a \text{ 在向量 } b \text{ 上的投影的长度 } (a)_b = a \cdot b^0 = \frac{a \cdot b}{\|b\|}$$

(2)  $a, b$  的叉积 (向量积)  $a \times b$  是一个向量, 其定义如下:

$a \times b$  的长度:  $\|a \times b\| = \|a\| \|b\| \sin\langle a, b \rangle$ ;

$a \times b$  的方向:  $a \times b \perp a, a \times b \perp b$ , 且向量  $a, b$  以及  $a \times b$  满足右手螺旋法则.

$$\|a \times b\| = \text{以向量 } a, b \text{ 作邻边组成一个平行四边形的面积}$$

$$a \times b = -b \times a$$

$$(\lambda a + \mu b) \times c = \lambda a \times c + \mu b \times c$$

$$\text{若 } a \neq 0, b \neq 0, \text{ 则 } a \times b = 0 \Leftrightarrow a \parallel b$$

### 3.4 向量的混合积

向量  $a, b, c$  的混合积为  $(a \times b) \cdot c$ , 记作  $(a, b, c)$ , 它是一个实数.

$$\text{以 } a, b, c \text{ 为棱作平行六面体的体积等于 } |(a, b, c)|$$