面向中等职业教育改革规划创新教材
中等职业教育课程改革项目研究成果

（上）

基础数学

JICHU SHUXUE

主编　李彪　张仁华　李春生

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

面向中等职业教育改革规划创新教材
中等职业教育课程改革项目研究成果

基础数学

（上）

主　编　李　彪　张仁华　李春生
副主编　熊　云　刘毛生

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内 容 简 介

本教材是依据最新的江西省中等职业学校数学教学大纲，共分5章内容进行讲解，针对中职学生特点，教材内容的选择突出职业特色，充分发挥计算机，互联网等现代多媒体技术的优势，重视现代教育技术与课程的整合，教材具有开放性和弹性，可根据各专业专题内容要求完善基础内容，保证实用为主，传承数学思想和文化，也具有科学性与可读性.

本教材针对性强、实用性强，适合中等职业学校学生使用。

图书在版编目（CIP）数据

基础数学．上／李彪，张仁华，李春生主编．—北京：北京理工大学出版社，2012.8

ISBN 978-7-5640-6676-5

Ⅰ.①基… Ⅱ.①李… ②张… ③李… Ⅲ.①数学课-中等专业学校-教材 Ⅳ.①G634.601

中国版本图书馆CIP数据核字（2012）第196625号

出版发行／北京理工大学出版社
社　　址／北京市海淀区中关村南大街5号
邮　　编／100081
电　　话／（010）68914775（办公室）　68944990（批销中心）　68911084（读者服务部）
网　　址／http：//www.bitpress.com.cn
经　　销／全国各地新华书店
印　　刷／北京通县华龙印刷厂
开　　本／710毫米×1000毫米　1/16
印　　张／15.75
字　　数／308千字
版　　次／2012年8月第1版　2012年8月第1次印刷
印　　数／1～3000册　　　责任校对／陈玉梅
定　　价／26.20元　　　　责任印制／王美丽

前　　言

依据职业教育基础课程教学的基本要求和专业人才培养目标与规格的要求，结合江西省最新中等职业学校数学教学大纲编写了此职业教育系列丛书的《基础数学（上册）》．本书包括集合与数理逻辑用语、不等式、函数的概念和性质、指数函数和对数函数、三角函数共5章内容．

数学教学大纲强调数学是研究空间形式和数量关系的科学，是科学和技术的基础，是人类文化的重要组成部分，是中等职业学校学生必修的一门公共基础课．本课程的任务是：使学生掌握必要的数学基础知识，具备必需的相关技能与能力，为学习专业知识、掌握职业技能、继续学习和终身发展奠定基础．针对上述的指导思想，整个编写过程贯彻了如下特色：

一、把培养数学的思维方式作为教学目标之一

我们按照数学思维方式编写每一节内容，尽可能多地设立了“观察”“实验”“抽象”“探索”“猜测”“分析”“论证”“应用”等小标题，使学生在学习数学知识的同时，受到数学思维方式的熏陶，潜移默化地培养学生的数学思维，提高学生的素质．

二、注重培养学生学习数学的兴趣

（1）精选大量的数学故事、数学趣话、数学实例，穿插在数学教材中，把代数、几何与三角等数学知识巧妙地揉合在生动有趣的故事之中，让学生好奇，感兴趣，主动地阅读、思考、赏析．

（2）在教材中设立了“观察”“认一认”“说一说”“想一想”“辨一辨”“试一试”“动脑筋”等小标题，让学生在课堂上积极地看、说、做、想数学问题，真正地让学生成为学习的主体，积极地参与到学习探索的整个过程．

三、数学内容的阐述注重时代性与传统性结合

我们处于信息时代，计算器、计算机已普及．能用计算器或计算机计算的地方，一律使用计算器或计算机，不再讲述相关计算原理或查表之类的内容，从过去侧重于计算转变成侧重于实际应用，精简了内容．

本书是在校本教材编辑委员会直接领导下，由李彪、张仁华、李春生、熊云

和刘毛生五位老师负责具体编写，其中李彪编写第一章集合与数理逻辑用语，张仁华编写第二章不等式，李春生编写第三章函数的概念和性质，熊云编写第四章指数函数和对数函数，刘毛生编写第五章三角函数. 编写目的紧紧围绕创建一个有特色的中等职业数学教育，实现一个因地因时因人的和谐教学氛围。

由于编者水平有限，加上时间关系，错误遗漏在所难免，敬请读者和同行批评指正，以供再版时修订。

本书编写组

目　录

第一章 集合与数理逻辑用语

本章主要讲述集合的初步知识与常用逻辑用语知识两部分.集合概念及其基本理论称为集合论,是近代数学的一个重要基础,集合论及其所反映的数学思想,在越来越广泛的领域中得到应用.

逻辑是研究思维形式及规律的一门基础学科,学习数学,需要全面理解概念,正确地进行表述、推理和判断,这就离不开对逻辑知识的掌握和运用.在日常生活、学习、工作中,基本的逻辑知识也是认识问题、研究问题不可缺少的工具,是人们重要的文化素质.

一 集 合

理发师的头由谁来理

在一个小镇上,有一个理发师公开宣布:他给而且只给小镇上所有不给自己理发的人理发,现在要问:这位理发师的头由谁来理?如果理发师的头由别人给他理,即理发师自己不给自己理发,那么按规定这位理发师的头应该由自己理.如果理发师的头由他自己理,按规定他只给那些不给自己理发的人理发,那么理发师的头不能由他自己理,即理发师的头应该由别人来理.这就产生了矛盾:理发师的头既不能由别人理,也不能由他自己理,这位理发师的规定是一个悖论.

这类问题,我们可以举出大量的例子.原来在康托尔创立集合论的时候,有一个既基本又明显的问题一直困扰着数学家们.集合论的研究对象是集合,那么何谓集合?对集合的定义我们一直只能给出一个原始的描述.这在朴素的集合论中还可以行得通,可是随着数学的发展,发现单凭直观经验建立起来的集合概念是靠不住的.正当康托尔的集合论开始为大家所接受时,1902 年,罗素提出了集合上的悖论.这一悖论是如此清晰,数学家几乎没有辩驳的余地.这正如一盆冷水浇下来,使数学家们目瞪口呆.罗素悖论是相当简明的,他把所有集合分为两类,第一类中的集合以其自身为元素,第二类中的集合不以自身为元素,假令第一类集合所组成的集合为 P,第二类所组成的集合为 Q,于是有

$$P=\{A\mid A\in A\},Q=\{A\mid A\notin A\}.$$

问:$Q\in P$ 还是 $Q\in Q$? 若 $Q\in P$,那么根据第一类集合的定义,必有 $Q\in Q$,但是 Q 中任何集合都有 $A\notin A$ 的性质,因为 $Q\in Q$,所以 $Q\notin Q$,引出矛盾.若$Q\in Q$,根据第一类集合的定义,必有 $Q\in P$,而显然$P\cap Q=\varnothing$,所以 $Q\notin Q$,还是矛盾.这就是著名的"罗素悖论".

"理发师的头由谁来理"的故事,就是罗素悖论的通俗表述.下面用罗素悖论来说明一下.设小镇上那些不给自己理发的人的全体组成集合 C,由题意知这位理发师只给且仅给集合 C 中的人理发.如果这位理发师属于集合 C,那么由集合 C 的定义可知,理发师不能给自己理发.另一方面,由题意,理发师应该给自己理发.反之,如果这位理发师不属于集合 C,那么由集合 C 的定义可知,理发师应给自己理发,但由题意,理发师不给自己理发,所以这是一个罗素悖论.

1.1 集合的概念

观察

(1) 你所在班级的所有同学组成一个班集体.

(2) 我国古代的四大发明.

(3) "金砖国家"(BRICS)的所有成员国.

(4) 到一个角的两边距离相等的所有的点.

(5) 1～20 内的所有素数(质数).

抽象

从上述例子看到,我们常常要考虑由一些对象组成的整体,我们用集合这个词来表达它,即集合是指由一些确定的对象组成的整体,而每一个对象称为这个集合的一个元素.

在上述例子中,你所在的班级的全体同学就是一个集合,这个班的每个学生是一个元素.我国古代的四大发明:指南针、火药、造纸术、活字印刷术都是这个集合的元素.

说一说

在上述(3)、(4)、(5)中,集合是什么? 它的元素是什么?

你能说出一个集合的例子吗? 它的元素是什么呢?

评注

(1) 组成集合的对象都是确定的.例如,金砖国家的所有成员国,谁是成员国,

谁不是成员国，都是明确的.

(2) 由一些对象组成集合时，每个对象不要重复出现. 例如，你所在的班级的花名册上，每位同学的名字只写一次.

(3) 由于集合是由一些事物组成的整体，因此不用计较这些事物的排列次序. 例如，由 1、2、3 组成的集合与由 2、1、3 组成的集合是同一个集合.

以上三条分别说明了集合中元素的确定性、互异性、无序性.

想一想

以下语句是否能确定一个集合？为什么？

(1) 你所在班级中的高个子同学.

(2) 你所在校园中的大树.

(3) 平方数等于 -1 的数的全体.

抽象

平方数等于 -1 的数是不存在的，因此平方数等于 -1 的数的集合不含任何元素. 我们把不含任何元素的集合称为空集，记作 $\varnothing$.

记一记

集合通常用大写英文字母 $A,B,C,\cdots$ 来表示.

有几个常用的集合，用固定字母的黑体来表示：

所有自然数组成的集合记作 $\mathbf{N}$，称为自然数集. 请注意：0 也是自然数.

所有正整数组成的集合记作 $\mathbf{N}_+$ ($\mathbf{N}^*$) 或 $\mathbf{Z}^+$，称为正整数集.

所有整数组成的集合记作 $\mathbf{Z}$，称为整数集.

所有有理数组成的集合记作 $\mathbf{Q}$，称为有理数集.

所有实数组成的集合记作 $\mathbf{R}$，称为实数集.

集合的元素通常用小写英文字母 $a,b,c,\cdots$ 来表示.

辨一辨

0 是自然数，我们就说 0 属于 $\mathbf{N}$；$\frac{1}{5}$ 不是整数，我们就说 $\frac{1}{5}$ 不属于 $\mathbf{Z}$.

一般地，给了一个集合 A，如果 a 是 A 的元素，就说 a 属于 A，记作

$$a\in A;$$

读作"a 属于 A". 如果 b 不是 A 的元素，就说 b 不属于 A，记作

$$b\notin A.$$

试一试

你能将符号“$\in$”或“$\notin$”正确填入下列空格吗?

0 ________ $\mathbf{N}^*$;　　-7 ________ $\mathbf{N}$;　　3.141 5 ________ $\mathbf{Q}$;

$\sqrt{2}$ ________ $\mathbf{Q}$;　　$\frac{1}{2}$ ________ $\mathbf{Z}$;　　π ________ $\mathbf{R}$;

0 ________ $\varnothing$;　　0 ________ $\mathbf{Z}$;　　1 ________ $\varnothing$.

认一认

你所在的班级人数是有限的,像这种含有有限个元素的集合叫做有限集.

自然数有无穷多个,像 $\mathbf{N}$ 这种含有无限个元素的集合,叫做无限集.

说一说

举出几个有限集和无限集的例子.

练习

1. 下面所说的事物能否组成集合?如果能,请找出该集合的元素是什么?

(1) 大于 3 小于 11 的偶数;

(2) 我国的小河流;

(3) 你所在班级的全体班干部;

(4) 小于 20 并且能被 3 整除的自然数(能被 3 整除也就是能被 3 除尽.例如,6 能被 3 整除,这时 6 可以写成 $6=2\times3$ 或 $6=3\times2$.一般地,如果整数 n 能写成 $n=3m$ 的形式,其中,m 也是整数,那么称 n 能被 3 整除)

(5) 小于 20 并且被 3 除余数为 1 的自然数;

(6) 平方等于 4 的实数;

(7) 与 0 接近的实数的全体;

(8) 平方等于 -2 的实数.

2. 判断下列各题所表示的关系是否正确.

(1) $-1\in\mathbf{N}$;　　(2) $-2\notin\mathbf{Z}$;　　(3) $\frac{1}{4}\in\mathbf{Q}$;

(4) $-\sqrt{7}\in\mathbf{Q}$;　　(5) $0.3\notin\mathbf{Q}$;　　(6) $1+\sqrt{3}\notin\mathbf{R}$.

3. 用符号“$\in$”或“$\notin$”填入空格.

(1) $\frac{1}{2}$ ________ $\mathbf{Z}$;　　(2) 1.414 ________ $\mathbf{Q}$;

(3) -3 ________ $\mathbf{N}$;　　(4) π ________ $\mathbf{R}$.

4. 举出几个空集的例子.

1.2 集合的表示法

中国古代的四大名著组成的集合可以表示成：

{《西游记》,《红楼梦》,《三国演义》,《水浒传》}.

因为集合是一个整体，所以必须要用大括号把所有的元素括起来.每个元素之间用逗号隔开.

一般地，对于有些集合，我们可以把它的元素一一列举出来，并且放在一个大括号内，这种表示集合的方法称为列举法.

因为集合具有互异性和无序性的特点，所以用列举法表示一个集合时，每个元素只写一次，并且不计较排列的次序.

试一试

(1) 用列举法表示大于 2 小于 10 的全体奇数.

(2) 用列举法表示小于 100 的自然数全体构成的集合.

当你表示第(2)题中的集合时，会发现小于 100 的自然数有 100 个，要全部写出来的话，很长也很麻烦.其实我们可以列出几个元素作为代表，其他元素用省略号表示，这个集合可以表示为

$$\{0,1,2,\cdots,99\}.$$

像这样，当一个集合的元素较多，或者它是无限集时，可以只列出几个代表元素，其他元素用省略号表示，并且把它们放在一个大括号内.要注意写出的元素必须让人明白省略号表示哪些元素.

想一想

大于 2 的实数组成的集合怎样表示？用列举法表示行吗？如果不行，怎么办？

抽象

大于 2 的实数组成的集合有无穷多个元素，而且无法一一列举出来，因此无法用列举法表示这个集合，所以我们想办法找出这个集合所具有的特性：第一，它们都是实数；第二，它们都大于 2.于是我们可以把这个集合表示成

$$\{x \in \mathbf{R} \mid x > 2\}.$$

其中，大括号内竖线左边的 $x \in \mathbf{R}$ 表示这个集合的代表元素 x 是集合 $\mathbf{R}$ 的一个元素，竖线右边写的是这个集合元素的特征性质.这种表示集合的方法称为描述法.

注：在某种约定下，x 的取值集合是实数时，可省去不写，上述集合可以表示为

$$\{x \mid x > 2\}.$$

试一试

(1) 用描述法表示由大于-1的全体整数构成的集合.

(2) 用描述法表示由小于 3 的全体实数构成的集合.

(3) 用描述法表示不等式 $x-5>0$ 的解集.

抽象

不等式 $x-5>0$ 的所有解组成的集合称为它的解集,具有的特性是 $x>5$,因此不等式 $x-5>0$ 的解集可以表示成

$$\{x \mid x>5\}.$$

一个整数如果能被 2 整除(即其为 2 的倍数),就称它为偶数. 例如:

$-6=2\times(-3)$, $-4=2\times(-2)$, $-2=2\times(-1)$,

$0=2\times 0$, $2=2\times 1$, $4=2\times 2$, $6=2\times 3$,…

因此,-6,-4,-2,0,2,4,6,…都是偶数.

所有偶数组成的集合称为偶数集,它可以表示成

$$\{\cdots,-6,-4,-2,0,2,4,6,\cdots\},$$

也可以表示成

$$\{n \mid n=2m, m\in \mathbf{Z}\},$$

还可以简洁地表示成

$$\{2m \mid m\in \mathbf{Z}\}.$$

其中,大括号内竖线左边的 $2m$ 是偶数的一般形式,竖线右边指出字母 m 的取值范围.

想一想

一个整数如果被 2 除余数为 1,就称它为奇数. 所有奇数组成的集合称为奇数集. 你会用几种方式表示奇数集?

示范

例 1 用列举法表示下列集合.

(1) $\{x \mid x^2+3x+2=0\}$;

(2) $\{x \mid x$ 是大于-1小于 3 的整数$\}$.

解 (1) $\{-1,-2\}$;(2) $\{0,1,2\}$.

例 2 用描述法表示下列集合.

(1) 绝对值等于 1 的实数全体构成的集合;

(2) 不等式 $2x+5>13$ 的解集.

解 (1) $\{x \mid |x|=1\}$;

(2) $2x+5>13$,

移项得

$$2x>13-5,$$

即 $$2x>8.$$

两边同除以 2,得

$$x>4,$$

因此,不等式 $2x+5>13$ 的解集是

$$\{x \mid x>4\}.$$

练习

1. 用列举法表示下述集合.

(1) 大于 0 小于 6 的整数全体构成的集合;

(2) 一年中有 31 天的月份全体构成的集合;

(3) 方程 $2x-3<0$ 的解集;

(4) 16 的算术平方根构成的集合;

(5) 由大于 -2 并且小于 2 的自然数组成的集合;

(6) 方程 $x^2+5x-6=0$ 的解集;

(7) 不大于 500 的所有自然数构成的集合.

2. 用描述法表示下列集合.

(1) 不大于 500 的所有自然数构成的集合;

(2) 不等式 $2x-3<0$ 的解集;

(3) 绝对值等于 2 的实数的全体;

(4) 所有正奇数构成的集合.

3. 用适当的方法表示下列集合.

(1) 绝对值小于 2 的实数全体构成的集合;

(2) 能被 3 整除的自然数构成的集合;

(3) 被 3 除余数为 1 的自然数构成的集合;

(4) 平行四边形全体构成的集合;

(5) 梯形全体构成的集合;

(6) 矩形全体构成的集合;

(7) 菱形全体构成的集合;

(8) 正方形全体构成的集合.

4. 用列举法表示下述集合.

(1) $\left\{x \in \mathbf{Z} \mid -\dfrac{5}{2}<x<\dfrac{12}{5}\right\}$;

(2) $\{2k+1 \mid -2<k<5 \text{ 且 } k \in \mathbf{Z}\}$.

1.3 集合之间的关系

思考

下述两个集合有什么关系?

(1) 你所在的班级的所有同学;

(2) 你所在的小组的所有同学.

发现

你所在的小组的每个成员都是你所在的班级的成员.

抽象

一般地,如果集合 A 中的每一个元素都是集合 B 的元素,那么 A 叫做 B 的一个子集,记作

$$A\subseteq B \text{ 或 } B\supseteq A,$$

读作"A 包含于 B",或"B 包含 A".

想一想

任何两个集合之间都有包含关系吗?

回答是否定的.例如:$A=\{1,3\}$,$B=\{1,2,4\}$.由于 A 中有一个元素 3 不属于 B,因此 A 不是 B 的子集.又由于 B 中有一个元素 2(或者 4)不属于 A,因此 B 不是 A 的子集,从而 A 与 B 之间不存在包含关系.

当集合 A 与集合 B 不存在子集关系时,记作

$$A\not\subseteq B \text{ 或 } A\not\supseteq B,$$

读作"A 不包含于 B",或"A 不包含 B".

试一试

(1) 设 $A=\{1,2\}$,$B=\{1,2,3\}$,则________是________的子集,记作________$\subseteq$________.

(2) 将符号"$\subseteq$"或"$\supseteq$"填入空格.

$\mathbf{N}_+$ ________ $\mathbf{N}$;$\mathbf{N}$ ________ $\mathbf{Z}$;$\mathbf{Z}$ ________ $\mathbf{Q}$;$\mathbf{Q}$ ________ $\mathbf{R}$.

(3) 设 $A=\{x\,|\,x^2-25=0\}$,$B=\{-5\}$,则________是________的子集,记作________$\supseteq$________.

(4)如果 $A=\{1,2\}$,$B=\{2,3,5\}$,则 A ________ B.

评注

(1)由于 A 的每一个元素都属于 A，因此 A 是 A 的子集，即 $A\subseteq A$. 这表明，任何一个集合都是它本身的子集.

(2) 规定：空集是任何集合的子集.

试一试

设 $A=\{1,2,3\}$，你能写出 A 的所有子集吗？请按照下列线索写.

(1) 含零个元素的子集有哪些？

(2) 含一个元素的子集有哪些？

(3) 含两个元素的子集有哪些？

(4) 含三个元素的子集有哪些？

(5) A 有含四个及四个以上元素的子集吗？

对于上述集合 $A=\{1,2,3\}$，同学们已经试写出：$\varnothing$，$\{1\}$，$\{2\}$，$\{3\}$，$\{1,2\}$，$\{1,3\}$，$\{2,3\}$，$\{1,2,3\}$，这些都是 A 的子集. 前 7 个子集与 A 的关系有什么共同点？

抽象

上述例子中，对于 A 的前 7 个子集的每一个，A 中至少有一个元素不属于它. 例如，2 不属于子集 $\{1,3\}$，我们就说前 7 个子集是 A 的真子集.

一般地，如果 A 是集合 B 的子集，并且 B 至少有一个元素不属于 A，那么 A 叫做 B 的真子集，记作

$$A\subsetneqq B \text{ 或 } B\supsetneqq A.$$

读作"A 真包含于 B"，或"B 真包含 A".

想一想

在集合 $\mathbf{N}^*$，$\mathbf{N}$，$\mathbf{Z}$，$\mathbf{Q}$，$\mathbf{R}$ 中，哪些集合之间存在真子集的关系？

为了形象地比较不同集合之间的关系，常用一条封闭的曲线的内部表示一个集合. 它既可以表示一个独立的集合(如图 1－1 所示)，也可以表示集合与集合之间的关系. 如果集合 A 是集合 B 的真子集，则可以把表示 A 的区域画在 B 的区域的内部(如图 1－2 所示). 这种图形通常叫做维恩图.

从图 1－3 可以得知：如果集合 A 是集合 B 的真子集，并且 B 是 C 的真子集，那么 A 也是 C 的真子集，即如果 $A\subsetneqq B$，且 $B\subsetneqq C$，那么 $A\subsetneqq C$.