度量空间的拓扑学

杨忠强　杨寒彪　编著

科学出版社

度量空间的拓扑学

杨忠强　杨寒彪　编著

科学出版社
北　京

内 容 简 介

本书主要是以度量空间为基础进行拓扑学性质的探究. 对于读者而言, 以度量空间为基础可以降低拓扑学的入门难度. 与此同时本书也介绍了对于拓扑学而言相对重要的结果, 特别是其他中文书籍相对较少涉及的拓扑学维数论, 无限维拓扑学等的相关结果也在本书中有所体现. 此外, 重视拓扑学和其他学科的结合是本书的一个特点. 本书从基本的集合论知识起步, 先介绍了度量空间、连续映射、度量空间的连通性和紧性, 然后介绍了可分度量空间、完备度量空间、Baire 空间, 还包含了这些结论在分析学中的应用、Cantor 集的拓扑特征及其万有性; 进一步, 本书定义了拓扑空间, 并把度量空间的拓扑学知识推广到了更一般的拓扑空间中, 并定义了仿紧性, 证明了一些可度量化定理等. 最后本书证明了 Michael 选择定理、Dugundji 扩张定理、Brouwer 不动点定理和 Anderson 定理.

本教材主要面向数学专业本科生和低年级研究生, 也可以作为对拓扑学有兴趣的研究者的参考书.

图书在版编目(CIP)数据

度量空间的拓扑学/杨忠强, 杨寒彪编著. —北京: 科学出版社, 2017.3
ISBN 978-7-03-051617-6

Ⅰ. ①度… Ⅱ. ①杨… ②杨… Ⅲ. ①度量空间②拓扑 Ⅳ. ①O177.3 ②O189

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017) 第 018969 号

责任编辑: 李静科 / 责任校对: 邹慧卿
责任印制: 张 伟 / 封面设计: 陈 敬

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码: 100717
http://www.sciencep.com

北京教图印刷有限公司印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2017 年 3 月第 一 版 开本: 720 × 1000 1/16
2017 年 3 月第一次印刷 印张: 21 3/4
字数: 428 000

定价: 128.00 元
(如有印装质量问题, 我社负责调换)

前　　言

本书的主要目的是为本科生和研究生提供度量空间的拓扑学的入门材料; 同时为拓扑学专业的研究生提供关于维数论和无限维拓扑学的入门材料. 相对于国内一般的点集拓扑学教材而言, 本教材的重点是度量空间的拓扑学, 这恰好是拓扑学在其他数学分支应用中最重要的部分, 同时满足了在一个相对比较短的篇幅内以比较低的起点上给出一些深刻的拓扑学定理的要求. 另外, 本教材提供的拓扑学维数论在国内出版的教材中较少涉及; 无限维拓扑学, 特别是 Anderson 定理 (即 Hilbert 空间 ℓ^2 同胚于无限可数个实直线的乘积) 在国内出版的中文书籍中还没有出现. 作者的另一个期待是本书能尽量体现拓扑学和其他数学分支的联系, 例如, 证明存在充分多的处处连续处处不可导的函数, 对 Cantor 集的探讨, 对 Euclidean 空间 $\mathbb{R}^n$ 的拓扑性质的讨论, 证明 Michael 选择定理、Brouwer 不动点定理和 Brouwer 域不变性定理等.

本书由十章组成. 第 1 章给出本书需要的集合论知识. 第 2 章定义度量空间、连续映射和其他基本概念并给出这些概念的性质, 同时我们也给出大量例子. 第 3 章和第 4 章分别定义度量空间的连通性和紧性, 研究这两类度量空间的基本性质, 特别是给出 Cantor 集的拓扑特征. 第 5 章研究可分度量空间, 特别是证明了含 Cantor 空间在内的一些空间的万有性质. 第 6 章定义和研究完备度量空间与可完备度量空间并给出其在分析上的应用. 第 7 章定义拓扑空间, 探讨第 2—6 章的各种概念在更一般的拓扑空间中的变化, 并给出拓扑空间一些特有的性质, 例如, 仿紧性; 证明了一些经典的度量化定理. 在第 8 章, 我们的目的是证明 Michael 选择定理、Dugundji 扩张定理和 Brouwer 不动点定理, 前两个结论是联系拓扑学和分析学的重要桥梁, 后者是拓扑学中的最重要的结果之一. 为此, 我们定义拓扑线性空间、单纯复形等概念. 第 9 章讨论维数论. 我们定义三种维数并给出它们重合的条件. 利用这些结果我们证明 Euclidean 空间 $\mathbb{R}^n$ 是互相不同胚的和 Brouwer 域不变性定理 —— 一个在很多数学分支中有用的定理. 本书的最后一章给出无限维拓扑学引论, 其主要目的是证明 Anderson 定理, 证明这个结果所使用的工具在今天的无限维拓扑学研究中仍然生机勃勃.

本书的前七章已经在汕头大学本科生和研究生教学中多次使用, 后面三章也在拓扑专业研究生教学中多次使用.

本书的绝大多数结论及其证明都来源于一些经典的书籍, 作者的主要工作是选择和作自认为恰当的陈述. 个别的结论和证明作者没有在其他的地方发现. 第 1 章

主要参考了 [10] 和 [20]. 第 2—7 章主要参考了 [1],[4],[9], [13], [17]. 第 8 章主要参考了 [2], [11] [12], [16], [19]. 第 9 章主要参考了 [4], [5], [11], [12], [16]. 第 10 章主要参考了 [11], [16]. 书籍 [4] 和 [11] 给出了本书涉及的绝大多数结论的历史, 读者可以参考.

阅读完本书后, 如果你想继续学习拓扑学, [4] 给出了关于一般拓扑学经典内容再学习的材料; [11] 和 [12] 是进一步学习无限维拓扑学的很好教材; [16] 是一本最新出版的关于维数论和绝对收缩核理论的深刻而全面的书, 对学习和研究都会有很大的帮助, 可惜的是作者酒井克朗教授在出版前删去了该书草稿中包含的关于无限维拓扑学的内容, 我们期待着他下一本书的出版. [13] 和 [14] 是学习代数拓扑学的好教材. [5] 给出了维数论的全面陈述. 另外, 本书中包含一些没有给出证明的陈述, 但告知了包含这些证明的文献. 为读者进一步学习相应的内容提供了方便.

本书第 8 章和第 10 章由杨寒彪完成, 其余由杨忠强完成. 杨寒彪负责最后审定.

已故的王国俊教授引领我进入拓扑学这个数学领域, 并在其后给了我很多帮助和鼓励, 谨以此书敬献给恩师王国俊教授! 感谢四川大学的刘应明院士和日本筑波大学的酒井克朗教授对我们学习拓扑学提供的帮助! 西安工业大学的张丽丽教授, 汕头大学的罗军博士 (现为重庆大学特聘研究员) 和徐斐教授给本书的初稿提出了很多非常有价值的建议和修改意见, 我们表示感谢! 博士生杨鎏同学为本书绘制了插图, 汕头大学的历届本科生和研究生也对本书初稿提出了很多修改意见, 作者们一并感谢!

作者们感谢下列基金对本书出版的支持: 中央财政支持地方高校发展专项资金 “汕头大学数学省级攀登重点学科建设”, 国家自然科学基金 (项目编号: 11471202, 11526159), 广东省创新强校工程 (汕头大学精品教材), 广东省自然科学基金 (项目编号: 2016A030310002), 广东省创新强校工程 (广东省教学质量与教学工程立项建设项目).

由于作者们学疏才浅, 不当和错误在所难免, 请读者不惜赐教!

杨忠强[1]

2016 年 8 月 1 日

[1] 通讯地址: 广东省汕头市汕头大学理学院数学系, 515063. E-mail: zqyang@stu.edu.cn

目　　录

第 1 章 公理集合论简述

集合论是现代数学的基础. 本章将给出本书所需要的基本集合论知识. 按照现在的教材体系, 集合论知识在高中数学课本中已经出现, 在大学的各门课程中又进行了加深, 特别是 "实变函数" 课程中定义了基数等. 因此, 我们希望, 作为这些课程的后续课程, 我们给出的集合论知识能在此基础上有所提高. 我们选择一种介于公理化方法和朴素方法之间的方法介绍集合论知识. 具体而言, 我们没有给出逻辑知识, 虽然, 一般来讲, 公理化集合论需要很强的逻辑知识. 另外, 对于一些如果用公理化方法将会很麻烦的地方, 我们进行了朴素处理. 当然, 我们也兼顾公理化方法和朴素方法, 一方面用公理的方法给出严格的陈述, 另一方面又用朴素的语言给出解释. 关于集合论的系统知识见 [8], [10], [20].

读者如果不想学习公理集合论, 你可以简单浏览一下 1.1 节, 知道本书的一些记号, 然后继续看 1.2 节—1.4 节即可. 对于大多数读者已经熟悉的一些集合论知识, 我们放在了练习中, 希望大家复习.

1.1 集合论公理

本节将给出集合论公理和一些基本概念. 所谓公理化方法就是用公理 (即被认为是正确的论断) 给出一些概念的性质. 集合论中两个最重要的不定义概念为: **集合**和**集合的元素**. 也就是说, 下面的两个论断不需要给出定义:

第一, Z 是一个集合;

第二, 集合 a 是集合 A 的元素, 记作, $a \in A$ 或者 $A \ni a$.

因为读者已经熟悉这两个概念的朴素说明, 我们在此不再进一步地说明. 本书中, 几乎所有的研究对象都是集合, 所以, 小写的英文字母 a, b, c 等, 大写的英文字母 A, B, C 等, 花写的英文字母 $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$ 等, 带下标的字母 $a_2, B_3, \mathcal{C}_4$ 等, 希腊字母 $\alpha, \beta, \Gamma, \Delta$ 等都可以表示集合. 注意, "元素" 并不是一个集合论概念, 更不是一个不定义概念. 所以, 你可以说, 集合 a 是集合 A 的一个元素, 但是, 你不可以说, 集合 a 是一个元素! 在很多教科书中, 为了强调, 有时称一个由集合组成的集合为族. 但是, 按照一般公理化集合论的观点, 所有的集合都是由集合组成的. 本书中, 为了和大家的习惯一致, 我们有时也称一些集合为族, 也就是说, **族**是集合的同义词. 另外, 对于个别不是集合的类, 我们用多个黑体字母表示, 例如, **SET** 表示所有集合构成的类.

在本书中, 用 $a \notin A$ 或者 $A \not\ni a$ 记 $a \in A$ 不成立, 表示 a 不是集合 A 的元素. 以后, 我们也用类似的方法表示否定, 例如，$3 \not\leqslant 2$, $a \neq b$ 等.

下面我们用公理给出这两个概念的基本性质, 这个公理体系被称为 **Zermelo-Fraenki 选择公理系统**, 简记为 **ZFC 系统**.

公理 1.1.1 (外延性公理)　对于任意的两个集合 X, Y, $X = Y$ 的充分必要条件是对任意的集合 Z,

$$Z \in X \text{ 当且仅当 } Z \in Y.$$

外延性公理说明集合是由该集合的元素确定的, 这个公理是下面很多集合唯一性的保障. 而下面的公理 1.1.2—公理 1.1.7, 公理 1.1.9—公理 1.1.10 将保障存在充分多的集合.

公理 1.1.2 (空集存在公理)　存在集合 X 使得对于任意的集合 Z,

$$Z \notin X.$$

由外延性公理, 满足上面条件的集合 X 是唯一的.

定义 1.1.1　称满足上面公理的唯一集合为**空集**, 记为 $\varnothing$. 不是空集的其他集合称为**非空集合**.

公理 1.1.3 (对集存在公理)　对于任意的两个集合 a, b, 存在集合 X 使得对任意的集合 x,

$$x \in X \text{ 当且仅当 } x = a \text{ 或者 } x = b.$$

定义 1.1.2　对于任意的两个集合 a, b, 我们称满足上面公理的唯一集合为由 a, b 组成的**对集**, 记为 $\{a, b\}$. 当 $a = b$ 时, 我们用 $\{a\}$ 记 $\{a, b\}$, 称 $\{a\}$ 为**单点集**. 显然, $\{a, b\} = \{b, a\}$. 设 a, b 是集合, 我们使用

$$(a, b) \text{ 记集合 } \{\{a\}, \{a, b\}\}.$$

由三次对集存在公理知, 后者确实是一个集合. 称 (a, b) 是由 a, b 组成的**序对集**.

和对集不同, 我们有下面的结论.

定理 1.1.1　对任意的集合 a, b, x, y, $(a, b) = (x, y)$ 当且仅当 $x = a$ 且 $y = b$. 特别地, 当 $a \neq b$ 时, $(a, b) \neq (b, a)$.

证明　显然, 当 $x = a, y = b$ 时, 有 $(a, b) = (x, y)$. 现在假设 $(a, b) = (x, y)$, 即 $\{\{a\}, \{a, b\}\} = \{\{x\}, \{x, y\}\}$. 我们考虑下面 3 种情况来证明这时 $x = a, y = b$.

情况 A. $\{a\} = \{x\}, \{a, b\} = \{x, y\}$. 显然 $a = x$ 成立. 如果 $a = b$, 那么, $y = a = b$. 所以有 $a = x, b = y$ 成立. 如果 $a \neq b$, 那么 $y \neq a$, 否则, $b \notin \{a\} = \{x, y\}$, 与 $b \in \{a, b\} = \{x, y\}$ 矛盾. 所以, $y = b$.

情况 B. $\{a\}=\{x,y\},\{a,b\}=\{x\}$. 这时, 由第一个等式和定义, 有 $x=a$ 且 $y=a$; 由第二个等式和定义, 有 $a=x$ 且 $b=x$. 所以 $x=a,y=b$ 成立.

情况 C. 否则, 这时, 必然有 $\{a\}=\{x\}=\{x,y\}=\{a,b\}$. 所以, 仿情况 B 可以验证 $x=a,y=b$ 也成立. □

进一步, 我们可以定义

$$(x_1,x_2,x_3)=((x_1,x_2),x_3);$$
$$(x_1,x_2,x_3,x_4)=((x_1,x_2,x_3),x_4);$$
$$\cdots\cdots$$
$$(x_1,x_2,\cdots,x_n,x_{n+1})=((x_1,x_2,\cdots,x_n),x_{n+1}).$$

公式是一个逻辑学概念, 简单叙述如下. 首先是**原始公式**, 即下面的两类公式:

(1) $x=y$;

(2) $x\in y$.

命题连接词包括

$$\textbf{非}:\ \neg p,\ \textbf{且}:\ p\wedge q,\ \textbf{或}:\ p\vee q,\ \textbf{蕴含}:\ p\to q,\ \textbf{等价}:p\Leftrightarrow q.$$

量词包括

$$\textbf{任意量词}:\ \forall x\ \phi,\ \textbf{存在量词}:\ \exists x\ \phi.$$

公式是原始公式经过有限次命题连接词和量词复合所能得到的全体.

如果一个变量 x 出现在一个公式 ϕ 中且在 x 的前面没有量词 $\forall x$ 和 $\exists x$, 那么, 我们称 x 为公式 ϕ 的**自由变量**. 如果 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是公式 ϕ 的全部自由变量, 我们记这个公式为 $\phi(x_1,x_2,\cdots,x_n)$. 不含自由变量的公式称为**句子**. 在公理化集合论发展的早期, 人们曾认为对任意的公式 $\phi(x)$,

$$\{x:\phi(x)\}$$

是集合. 但著名的 **Russell 悖论**否定了这种想法. 事实上, 假定如此, 那么

$$Z=\{x:x\notin x\}$$

是一个集合. 但, 容易看到, 这时, $Z\in Z$ 当且仅当 $Z\notin Z$. 矛盾!

对任意的公式 $\phi(x,p_1,\cdots,p_n)$, 称

$$\{x:\phi(x,p_1,\cdots,p_n)\}$$

为一个**可由变量** $p_1,\cdots,p_n$ **定义的类**. 如果 ϕ 仅含一个自由变量 x, 那么, 上面的类称为**可定义的类**. 集合一定是类. 事实上, 设 A 是一个集合, 那么

$$A=\{x:x\in A\}.$$

所以, A 是类. 但是, Russell 悖论说明类不一定是集合. **SET** 表示所有集合构成的类. 后面的正则性公理将显示它不是集合. 我们需要下面的公理.

公理 1.1.4 (分离性公理)　设 X 是集合, $\phi(x,u)$ 是一个公式, 那么对任意的 u, 存在集合 Y 使得对任意的集合 x,

$$x \in Y \text{ 当且仅当 } (x \in X) \wedge \phi(x,u).$$

显然, 满足上面条件的集合 Y 是唯一的, 记作

$$\{x \in X : \phi(x,u)\}.$$

分离性公理有很多推论.

定理 1.1.2　对任意的非空集合 X, 存在唯一集合 Y 使得对任意的集合 y,

$$y \in Y \text{ 当且仅当对任意的 } x \in X, \text{ 有 } y \in x.$$

证明　因为 X 不是空集, 所以存在 $x_0 \in X$. 那么,

$$Y = \{y \in x_0 : \forall x\ (x \in X) \to (y \in x)\}.$$

注意到,

$$\phi(x) : \forall x\ (x \in X) \to (y \in x)$$

是一个公式. 因此, 由分离性公理 Y 是一个集合. 显然, Y 是我们需要的集合. 唯一性由外延性公理立即得到. □

定义 1.1.3　满足上面定理的唯一集合 Y 称为集合 X 的**交**, 记作

$$\bigcap X \text{ 或者 } \bigcap_{x \in X} x.$$

当 $X = \{x_1, x_2\}$ 时, 我们用 $x_1 \bigcap x_2$ 代替 $\bigcap X$. 当 $x_1 \bigcap x_2 = \varnothing$ 时, 我们说集合 x_1, x_2 **不相交**; 当 $x_1 \bigcap x_2 \neq \varnothing$ 时, 我们说集合 x_1, x_2 **相交**.

注 1.1.1　我们不能证明空集的交存在! 所以, 以后我们谈到集合的交时一般指非空集合的交. 但在特定的情况下, 我们可以专门定义空集的交.

定理 1.1.3　对任意的集合 X, Y, 存在唯一的集合 Z 使得对任意的集合 z,

$$z \in Z \text{ 当且仅当 } z \in X \text{ 但 } z \notin Y.$$

证明　显然,

$$Z = \{z \in X : z \notin Y\} = \{z \in X : \neg(z \in Y)\}$$

满足要求. 由外延性公理, 满足上面定理的集合 Z 由集合 X, Y 确定. □

定义 1.1.4 满足上面定理的唯一集合 Z 称为集合 X 与集合 Y 的**差**, 记作

$$X \setminus Y.$$

但分离性公理并不能得到并集的存在性, 我们需要又一个公理.

公理 1.1.5 (并集存在公理) *对任意的集合 X, 存在集合 Y 使得对任意的集合 y,*

$$y \in Y \text{ 当且仅当存在 } x \in X \text{ 使得 } y \in x.$$

由外延性公理, 满足上面公理的集合 Y 由集合 X 确定.

定义 1.1.5 我们称满足上面公理的唯一集合 Y 为集合 X 的**并**, 记作

$$\bigcup X \text{ 或者 } \bigcup_{x \in X} x.$$

显然, $\bigcup\varnothing = \varnothing$. 设 $x_1, x_2, \cdots, x_n, x_{n+1}$ 是集合, 令

$$\{x_1, x_2, x_3\} = \bigcup\{\{x_1, x_2\}, \{x_3\}\};$$

$$\cdots\cdots$$

$$\{x_1, x_2, \cdots, x_n, x_{n+1}\} = \bigcup\{\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}, \{x_{n+1}\}\}.$$

通常, 我们用

$$x_1 \bigcup x_2 \bigcup \cdots \bigcup x_n \text{ 或者 } \bigcup_{i=1}^{n} x_i \text{ 代替 } \bigcup\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}.$$

那么

$$\{x_1, x_2, \cdots, x_n\} = \{x_1\} \bigcup \{x_2\} \bigcup \cdots \bigcup \{x_n\}.$$

也许你会认为, 我们不需要对集存在公理而用 $\{x_1\}\bigcup\{x_2\}$ 定义 $\{x_1, x_2\}$ 即可保障对集 $\{x_1, x_2\}$ 的存在性. 但, 事实上是不对的, 因为没有对集存在公理, 对于集合 x, $\{x\}$ 将不能按照上面的方式定义.

同样, 我们用

$$x_1 \bigcap x_2 \bigcap \cdots \bigcap x_n \text{ 或者 } \bigcap_{i=1}^{n} x_i \text{ 代替 } \bigcap\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}.$$

下面, 我们将给出幂集公理, 为此, 我们需要一个定义.

定义 1.1.6 设 X, Y 是集合, 如果对任意的集合 x, 由 $x \in X$ 可以推出 $x \in Y$, 则称 X 是 Y 的**子集** 或者 X **包含于** Y 或者 Y **包含** X, 记作 $X \subset Y$ 或者 $Y \supset X$. 否则, 记为 $X \not\subset Y$ 或者 $Y \not\supset X$. 如果 $X \subset Y$ 且存在集合 $y \in Y$ 使得 $y \notin X$, 则说 X 是 Y 的**真子集**. 记作 $X \subsetneq Y$.①

①有的教科书中用 $X \subseteq Y$ 表示 X 是 Y 的子集, 用 $X \subset Y$ 表示 X 是 Y 的真子集.

下面是幂集公理.

公理 1.1.6 (幂集公理) 对任意的集合 X, 存在集合 Y 使得对任意的集合 Z,

$$Z \in Y \text{ 当且仅当 } Z \subset X.$$

定义 1.1.7 我们把满足上面条件的集合 Y 称为集合 X 的**幂集**, 它由 X 唯一确定, 记为 $P(X)$.

幂集公理是说, 集合的子集的全体是集合.

利用幂集公理, 我们可以定义集合的乘积. 对于集合 X, Y, 可能你知道, $X \times Y$ 应该是由所有的序对集 (x, y) 组成, 这里, $x \in X, y \in Y$. 但, 问题是 $X \times Y$ 为什么是一个集合? 我们需要幂集公理. 首先, 对任意的 $x \in X, y \in Y$, 按定义, $\{x, y\} \subset X \bigcup Y$. 因此, $\{x, y\} \in P(X \bigcup Y)$. 同理, $\{x\} \in P(X) \subset P(X \bigcup Y)$. 所以

$$(x, y) = \{\{x\}, \{x, y\}\} \in P(P(X \bigcup Y)).$$

再应用分离性公理, 我们知道

$$X \times Y = \{(x, y) \in P(P(X \bigcup Y)) : x \in X, y \in Y\}$$

是集合.

定义 1.1.8 设 X, Y 是集合, 称集合 $X \times Y$ 为集合 X, Y 的 **Cartesian 乘积**, 简称为**乘积**. 同样, 我们可以定义有限乘积. 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是集合,

$$X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n) : x_1 \in X_1, x_2 \in X_2, \cdots, x_n \in X_n\}$$

被称为集合 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 的**乘积**. 特别地, 当 $X_1 = X_2 = \cdots = X_n = X$ 时, 我们用 X^n 表示上面的集合. 同时, 为了方便, 我们约定 $X^0 = \{\varnothing\}$.

定义 1.1.9 设 X, Y 是集合, $X \times Y$ 中的任何子集 R 被称为由 X 到 Y 的一个**关系**. 令

$$\mathrm{dom}(R) = \{x \in X : \text{ 存在 } y \in Y \text{ 使得 } (x, y) \in R\},$$
$$\mathrm{ran}(R) = \{y \in Y : \text{ 存在 } x \in X \text{ 使得 } (x, y) \in R\}.$$

显然, $\mathrm{dom}(R), \mathrm{ran}(R)$ 分别是集合 X, Y 的子集, 分别称为关于 R 的**定义域**和**值域**. 如果由 X 到 Y 的关系 f 满足下面的条件, 我们称 f 为一个由 X 到 Y 的**映射**:

(i) $\mathrm{dom}(f) = X$;

(ii) 对任意的 $x \in X, y_1, y_2 \in Y$, 如果 $(x, y_1), (x, y_2) \in f$, 那么, $y_1 = y_2$.

显然, 如果 f 是由 X 到 Y 的映射, 那么, 对任意的 $x \in X$, 存在唯一的 $y \in Y$ 使得 $(x, y) \in f$. 我们用 $f(x)$ 记这个唯一的 y, 称之为在 f 下 x 的**像**. 我们用

$$f : X \to Y$$

表示 f 是由 X 到 Y 的映射. 用 Y^X 表示由 X 到 Y 的映射全体, Y^X 是一个集合, 见练习 1.1.E. 为了方便, 我们约定, $Y^{\varnothing}=\{\varnothing\}$.

我们可以仿照上面定义由类到类的映射.

公理 1.1.7 (替换公理) 对任意的集合 X 和任意的类 Y, 如果 $f: X \to Y$ 是映射, 那么 $\mathrm{ran}(f)$ 是集合.

上面的替换公理通俗地讲就是, 集合的像是集合. 它是不可缺少的. 下面的正则公理保证了不会存在 "畸形" 集合.

公理 1.1.8 (正则公理) 不存在集合 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 使得

$$x_1 \in x_2 \in \cdots \in x_n \in x_1.$$

设 x 是一个集合, 我们称集合

$$x+1=x\bigcup\{x\}$$

为集合 x 的**后继集合**. 进一步, 定义

$$x+2=(x+1)+1,\ x+3=(x+2)+1, \cdots$$

由正则公理得

定理 1.1.4 对任意的集合 x 和自然数 $n \neq 0$, 有 $x+n \neq x$.

到目前为止, 我们的公理不能保证 "无限集" 的存在性. 所以, 我们需要无限集公理.

公理 1.1.9 (无限集公理) 存在集合 X 使得

$$\varnothing \in X,\ 对任意的\ x \in X,\ 有\ x+1 \in X.$$

好像这个公理与无限集无关, 但我们后面在严格定义了无限集后将证明满足这个条件的集合必然是无限的. 一般来说, 称上面的公理体系为 **Zermelo-Fraenki 系统**, 简记为 **ZF 系统**. 最后, 引入一个饱受争议的公理, 完成了 ZFC 系统的公理陈述.

公理 1.1.10 (选择公理) 设 X 是集合且 $\varnothing \notin X$, 那么, 存在映射 $f: X \to \bigcup X$ 使得对任意的 $x \in X$, 有

$$f(x) \in x.$$

注意, 对于 $X=\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ 是有限集的特殊情况, 选择公理中的结论可以由前面的公理得到. 选择公理之所以饱受争议是因为凡必须用选择公理才能证明的结论, 其证明都不是很自然. 但是, 如果没有选择公理, 很多我们熟悉的数学结

论将不再成立. 对于一般拓扑学, 选择公理也是不可缺少的. 关于选择公理的进一步讨论, 我们将在 1.4 节给出.

练　习　1.1

1.1.A. 设 X_1, X_2 是非空集合. 证明

$$\bigcup X_1 \bigcup \bigcup X_2 = \bigcup (X_1 \bigcup X_2); \quad \bigcap X_1 \bigcap \bigcap X_2 = \bigcap (X_1 \bigcup X_2).$$

1.1.B. 设 A, B, C 是集合. 证明

(1) $A \bigcap (B \bigcup C) = (A \bigcap B) \bigcup (A \bigcap C)$, $A \bigcup (B \bigcap C) = (A \bigcup B) \bigcap (A \bigcup C)$;

(2) $A \bigcap B = B \bigcap A, A \bigcup B = B \bigcup A$;

(3) $A \bigcap \varnothing = \varnothing, A \bigcup \varnothing = A$;

(4) $A \subset B$ 当且仅当 $A \bigcap B = A$ 当且仅当 $A \bigcup B = B$.

(5) $A = B$ 当且仅当 $A \subset B$ 且 $B \subset A$.

1.1.C. 设 A, B 是集合. 证明

$$A \bigcap \bigcup B = \bigcup_{b \in B} (A \bigcap b), \quad A \bigcup \bigcap B = \bigcap_{b \in B} (A \bigcup b).$$

1.1.D. 设 A, B 是集合. 证明

$$A \setminus \bigcup B = \bigcap_{b \in B} (A \setminus b) \quad A \setminus \bigcap B = \bigcup_{b \in B} (A \setminus b).$$

上面的两个公式被称为 **de Morgan 对偶律**.

1.1.E. 设 X, Y 是集合. 证明 Y^X 是集合.

1.2　集合上的几种特殊关系

上一节, 我们已经定义了集合上的关系和一种特殊的关系 —— 映射. 本节, 我们将再定义 3 种特殊的关系: 等价关系、偏序关系和良序关系. 我们将研究这 4 种关系的基本性质.

映射对我们是非常重要的概念. 下面我们给出一些基本的概念和符号. 设 X, Y 是集合, $f: X \to Y$ 是映射. 对任意的 $A \subset X, B \subset Y$, 定义

$$f(A) = \{f(a) \in Y : a \in A\}; \quad f^{-1}(B) = \{x \in X : f(x) \in B\}.$$

当 $B = \{b\}$ 是单点集时, 我们用

$$f^{-1}(b) \text{ 代替 } f^{-1}(\{b\}).$$

由分离性公理, $f(A), f^{-1}(B)$ 分别是 Y, X 的子集, 分别称为在 f 下集合 A 的**像**和在 f 下集合 B 的**逆像**. 注意到, 在这个定义下, $f: P(X) \to P(Y)$ 和 $f^{-1}: P(Y) \to P(X)$ 是两个映射. 这样, 我们使用了同一个记号 f 表示两个不同的映射, 但一般不会由此引起混淆, 如果有必要, 我们用 $f: X \to Y$ 和 $f: P(X) \to P(Y)$ 区别它们. 如果

$$f(X) = \mathrm{ran}(f) = Y,$$

那么, 我们称 f 是**满射**. 如果对任意的 $x_1, x_2 \in X$,

$$x_1 \neq x_2 \text{ 能推出 } f(x_1) \neq f(x_2),$$

那么, 我们称 f 是**单射**. 如果 f 既是单射又是满射, 那么, 我们称 f 是**双射**或者**一一对应**. 当 f 是一一对应时, 我们可以定义

$$f^{-1} = \{(y, x) \in Y \times X : (x, y) \in f\}.$$

容易验证 $f^{-1}: Y \to X$ 是一个映射而且也是一一对应. f^{-1} 称为 f 的**逆映射**.

设 X, Y, Z 是集合, $f: X \to Y$ 和 $g: Y \to Z$ 是映射. 定义

$$g \circ f = \{(x, z) \in X \times Z : \exists\, y (y \in Y) \wedge (f(x) = y) \wedge (g(y) = z)\}.$$

那么, $g \circ f$ 是 X 到 Z 的映射, 称为映射 f 和 g 的**复合**. 设 $f: X \to Y$ 是一个映射, $A \subset X$, 定义

$$f|A = f \bigcap (A \times Y).$$

那么, $f|A : A \to Y$ 是一个映射, 称为映射 f 在 A 上的**限制**. 对任意的集合 X,

$$\mathrm{id}_X = \{(x, x) \in X \times X : x \in X\}$$

是 X 到 X 的映射, 称为 X 上的**恒等映射**. 如果没有混淆, 恒等映射也记为 $\mathrm{id}: X \to X$. 对任意的的集合 X, Y 和 $c \in Y$, 我们定义映射

$$\{(x, c) \in X \times Y : x \in X\}$$

为**常值映射**. 这个常值映射一般也记作 $c: X \to Y$.

我们熟悉的映射 $f: X \to Y$ 的定义是: 对任意的 $x \in X$, 指定了唯一的 $y = f(x) \in Y$ 与之对应. 我们的定义和这个定义本质上是一样的. 我们的定义仅仅是比较严格, 这里的定义比较方便, 或者具体地说, 我们的定义就是这个定义的严格化. 一般来说, 我们会给出映射的记号, 例如, f, ϕ 等. 但是, 有时为了简单, 我们