GAODENG SHUXUE
JICHUBAN

高等数学（基础版）

（第二版）

主　编　贾　全　曾晓兰
副主编　廖光荣　王智勇

四川大学出版社

高等数学（基础版）

GAODENG SHUXUE JICHUBAN

（第二版）

主　编　贾　全　曾晓兰
副主编　廖光荣　王智勇

四川大学出版社

责任编辑：毕　潜
责任校对：唐　飞
封面设计：墨创文化
责任印制：王　炜

图书在版编目(CIP)数据

高等数学：基础版 / 贾全，曾晓兰主编. —2 版.
—成都：四川大学出版社，2014. 6
ISBN 978-7-5614-7815-8

Ⅰ. ①高…　Ⅱ. ①贾…　②曾…　Ⅲ. ①高等数学-高等学校-教材　Ⅳ. ①013

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2014）第 140368 号

书名　高等数学(基础版)(第二版)

主　　编	贾　全　曾晓兰
出　　版	四川大学出版社
地　　址	成都市一环路南一段 24 号 (610065)
发　　行	四川大学出版社
书　　号	ISBN 978-7-5614-7815-8
印　　刷	郫县犀浦印刷厂
成品尺寸	185 mm×260 mm
印　　张	12. 25
字　　数	304 千字
版　　次	2014 年 7 月第 2 版
印　　次	2014 年 7 月第 1 次印刷
印　　数	0 001～3 000 册
定　　价	22. 00 元

◆读者邮购本书，请与本社发行科联系。
电话：(028)85408408/(028)85401670/
(028)85408023　邮政编码：610065
◆本社图书如有印装质量问题，请寄回出版社调换。
◆网址：http://www.scup.cn

前　　言

高等数学是高职学生必修的一门重要课程. 高等数学的思想、内容和方法已成为现代文化的重要组成部分. 因此，从全面提高科学素质来说，高等数学是一门重要的基础课，把握其思想方法能极大提升学生的认知能力；从综合职业能力的培养来说，高等数学又是学习后续课程以及社会生活、生产不可或缺的一门工具课.

本书是编者在多年的教学实践的基础上，针对高职学生基础状况及未来发展需要，在第一版的基础上编写的. 本书注重教材的基础性，着重使学生能够掌握基本概念，形成基本数学思想，会用基本方法解决基本数学问题，并且能进行知识的迁移，把数学方法和数学思想应用于其他领域，达到解决实际问题的目的. 针对多数高职院校数学课课时较少的现状，在保证知识结构的完整性、科学性的同时，本书力求做到理论清晰、推理简明扼要、淡化证明、知识要点明确、重视几何意义等，便于教师讲授导学及学生自学. 据此，编者希望学生通过本学科的学习，能够认识到数学知识除了有其逻辑特点外，还有其相应的结构；同时，通过本学科的学习，能够理解解决问题需要相应的规则. 我们希望通过教学，帮助学生建立正确的观念，激发其学习兴趣，从而不仅会学数学，而且会用数学.

根据实际需要，我们把高等教学教材分成高等数学（基础版）和高等数学（专业版）. 本书是高等数学（基础版），主要内容有一元微积分和微分方程. 本书每节都编写了有助于掌握基本知识和方法的习题，每章末尾还设计了复习题，目的是强化全章知识，综合使用所学知识，达到提升能力的目的. 本次改版，我们在第一版的基础上，对相关内容进行了适当的调整. 同时为了方便读者学习，我们还增加了各章节习题和复习题的参考答案.

本书由贾全、曾晓兰担任主编，廖光荣、王智勇担任副主编. 魏齐完成了全书的图形制作. 贺海燕、巫中一、魏齐、聂思兵、黄黎明参与了本书的大纲编写与制订，并在本教材的编写过程中，提出了许多宝贵意见.

本书的编写分工（按章序）如下：第一章由廖光荣编写，第二、三章由王智勇编写，第四章由曾晓兰编写，第五、六章由贾全编写. 全书由贾全、曾晓兰统稿.

在本书的编写过程中，得到了内江职业技术学院有关领导和学院基础部的大力支持与帮助，在此表示衷心感谢！

由于编者水平有限，时间比较仓促，本书在编写中存在的不足之处，敬请同行和读者批评指正。

编　者

2014 年 6 月

目　录

第一章　函数与极限

学习要求：

一、复习函数的基本概念和性质；

二、理解复合函数的概念，熟练掌握复合函数的分解；

三、理解极限的概念，了解无穷小的概念和性质；

四、能熟练地求一些简单极限；

五、理解函数连续的概念及初等函数的连续性.

极限是高等数学中最重要的基本概念，它是导数(或微分)、积分等概念的基础. 连续函数又是高等数学研究的主要对象. 本章我们将在复习和加深函数概念及性质的基础上，首先介绍函数极限的概念，然后讨论函数极限的性质、运算法则，最后介绍函数连续性的概念.

§1－1　初等函数

函数是数学中最重要的基本概念之一，也是高等数学的主要研究对象. 本节我们将在中学数学的基础上，进一步阐明函数的一般定义、函数的基本性质以及与函数概念有关的一些基本知识.

一、函数的概念

1. 定义

设 x 和 y 是两个变量，D 是一个给定的数集，如果对于每个数 $x \in D$，变量 y 按照一定法则总有唯一确定的数值与其对应，则称 y 是 x 的函数，记作 $y = f(x)$. 数集 D 称为该函数的定义域，x 称为自变量，y 称为因变量.

当自变量 x 取数值 x_0 时，因变量 y 按照某一法则 f 所取定的数值称为函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处的函数值，记作 $f(x_0)$. 此时，我们也称函数 $y = f(x)$ 在 x_0 处有定义或有意义. 当自变量 x 遍取定义域 D 的每个数值时，对应的函数值的全体组成的数集 $W = \{y \mid y = f(x), x \in D\}$ 称为函数的值域.

2. 定义域的求解原则

(1) 分母不为零；

(2) 开偶次方根时，被开方式大于或等于零；

(3) 对数的真数大于零；

(4) 满足三角函数或反三角函数的定义；

(5) 有两项以及两项以上原则需满足时，求各原则满足的交集.

例 1 求 $y=\sqrt{4-x^2}+\ln(x^2-1)$的定义域.

解 因为 $4-x^2\geqslant 0$ 且 $x^2-1>0$，所以有

$$-2\leqslant x\leqslant 2 \text{ 且 } x<-1 \text{ 或 } x>1.$$

因此，函数 $y=\sqrt{4-x^2}+\ln(x^2-1)$的定义域为$[-2,-1)\cup(1,2]$.

二、函数的表示法

函数的表示法就是反映函数的对应法则的方法. 若函数的对应法则是用一个公式或者解析式来表示，这种表示法称为**解析法**. 若函数的对应法则用表格来表示，这种表示法称为**表格法**. 若函数的对应法则是通过坐标上的一段图形来表示，这种表示法称为**图像法**.

一般地，我们可以把函数 $y=f(x)(x\in D)$ 的图像看作一个有序数对的集合：

$$C=\{(x,y)\mid y=f(x),\ x\in D\},$$

集合 C 中的每一个元素对应直角坐标平面上一个点，从而，点集 C 就是描述这个函数的图像(或轨迹).

三、分段函数

用两个以上表达式表达的函数关系，即对于自变量 x 的不同的取值范围，有着不同的对应法则，这样的函数通常称为分段函数. 它是一个函数，而不是几个函数. 分段函数的定义域是各段对应法则 x 的取值范围的并集，值域也是各段对应法则 y 的取值范围的并集.

例如，$f(x)=\begin{cases}x+1, & x\geqslant 1,\\ x-1, & x<1.\end{cases}$ $x=1$ 称为分段点.

又如,符号函数

$$\operatorname{sgn}x=\begin{cases}-1, & x<0,\\ 0, & x=0,\\ 1, & x>0\end{cases}$$

和取整函数

$$[x]=n,\quad n\leqslant x<n+1,\quad n=0,\pm1,\pm2,\cdots,$$

都是分段函数. 它们的图像如图 1－1 和图 1－2 所示.

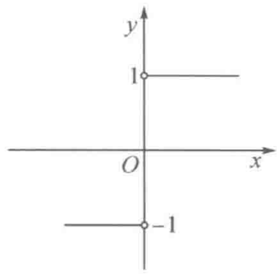


图 1－1

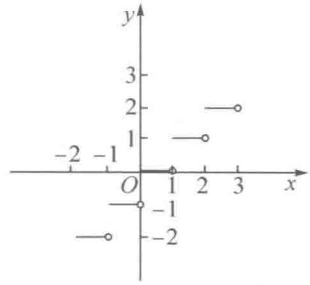


图 1－2

四、反函数

设函数 $y=f(x)$ $(x\in D)$ 的值域是 W，根据这个函数中 x，y 的对应关系，用 y 把 x 表示出来，得到 $x=f^{-1}(y)$. 若对于 y 在 W 中的每一个值，通过 $x=f^{-1}(y)$，x 在 D 中都有唯一的值和它对应，那么，$x=f^{-1}(y)$ 就表示 y 是自变量，x 是因变量的函数. 这样的函数 $x=f^{-1}(y)$ $(y\in W)$ 称为函数 $y=f(x)(x\in D)$ 的反函数(函数 $y=f(x)$ 则称为直接函数). 反函数 $x=f^{-1}(y)$ 的定义域、值域分别是函数 $y=f(x)$ 的值域、定义域.

由于习惯上 x 表示自变量，y 表示因变量，于是我们约定 $y=f^{-1}(x)$ 也是直接函数 $y=f(x)$ 的反函数.

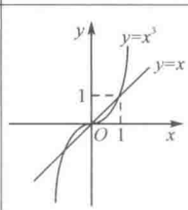
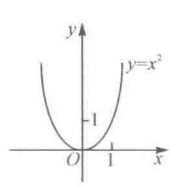
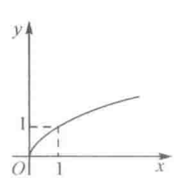
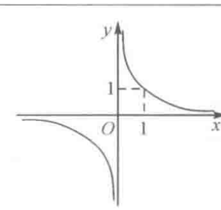
函数 $y=f(x)$ 的两种形式的反函数 $x=f^{-1}(y)$ 与 $y=f^{-1}(x)$，我们后面都要用到. 需要说明的是，函数 $y=f(x)$ 与它的反函数 $x=f^{-1}(y)$ 具有相同的图像，而与反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图像是关于直线 $y=x$ 对称的.

五、初等函数

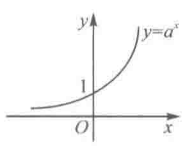
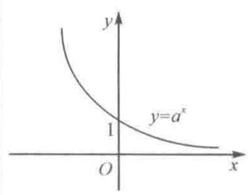
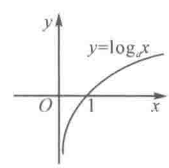
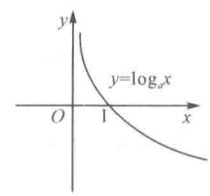
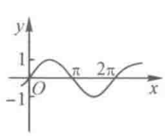
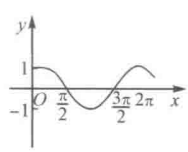
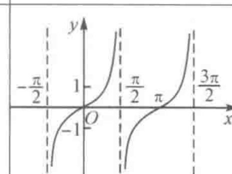
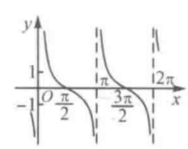
1. 基本初等函数

幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数统称基本初等函数. 其图像和性质见表 1－1.

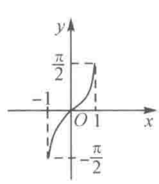
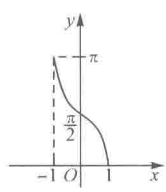
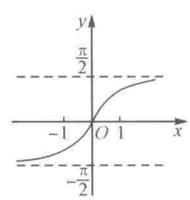
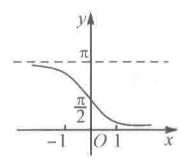
表 1－1　初等函数的图像及性质

函数	幂函数　$y=x^a$			
	$a=1,3$	$a=2$	$a=\frac{1}{2}$	$a=-1$
图像				

续表 1－1

函数	幂函数　$y=x^{a}$			
	$a=1,3$	$a=2$	$a=\frac{1}{2}$	$a=-1$
定义域	$(-\infty,+\infty)$	$(-\infty,+\infty)$	$[0,+\infty)$	$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$
值域	$(-\infty,+\infty)$	$[0,+\infty)$	$[0,+\infty)$	$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$
奇偶性	奇函数	偶函数	非奇非偶	奇函数
单调性	单调递增	在$(-\infty,0]$内单调递减 在$[0,+\infty)$内单调递增	单调递增	在$(-\infty,0)$,$(0,+\infty)$ 内分别单调递减
函数	指数函数 $y=a^{x}(a>0,a\neq1)$		对数函数 $y=\log_{a}x(a>0,a\neq1)$	
	$a>1$	$0<a<1$	$a>1$	$0<a<1$
图像				
定义域	$(-\infty,+\infty)$	$(-\infty,+\infty)$	$(0,\infty)$	$(0,\infty)$
值域	$(0,+\infty)$	$(0,+\infty)$	$(-\infty,+\infty)$	$(-\infty,+\infty)$
单调性	单调递增	单调递减	单调递增	单调递减
函数	三角函数			
	$y=\sin x$ (正弦函数)	$y=\cos x$ (余弦函数)	$y=\tan x$ (正切函数)	$y=\cot x$ (余切函数)
图像				
定义域	$(-\infty,+\infty)$	$(-\infty,+\infty)$	$\left(k\pi-\frac{\pi}{2},k\pi+\frac{\pi}{2}\right)$ $(k\in\mathbf{Z})$	$[k\pi,(k+1)\pi]$ $(k\in\mathbf{Z})$
值域	$[-1,1]$	$[-1,1]$	$(-\infty,+\infty)$	$(-\infty,+\infty)$
奇偶性	奇函数	偶函数	奇函数	奇函数
周期性	$T=2\pi$	$T=2\pi$	$T=\pi$	$T=\pi$

续表 1－1

函数	三角函数			
	$y=\sin x$（正弦函数）	$y=\cos x$（余弦函数）	$y=\tan x$（正切函数）	$y=\cot x$（余切函数）
单调性 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$	单调递增	单调递减	单调递增	单调递减
单调性 $\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$	单调递减	单调递减	单调递增	单调递减
单调性 $\left(\pi,\frac{3\pi}{2}\right)$	单调递减	单调递增	单调递增	单调递减
单调性 $\left(\frac{3\pi}{2},2\pi\right)$	单调递增	单调递增	单调递增	单调递减
函 数	反三角函数			
	$y=\arcsin x$（反正弦函数）	$y=\arccos x$（反余弦函数）	$y=\arctan x$（反正切函数）	$y=\text{arccot}\,x$（反余切函数）
图像				
定义域	$[-1,1]$	$[-1,1]$	$(-\infty,+\infty)$	$(-\infty,+\infty)$
值域	$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$	$[0,\pi]$	$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$	$(0,\pi)$
单调性	单调递增	单调递减	单调递增	单调递减
$f(-x)$	$\arcsin(-x)=-\arcsin x$	$\arccos(-x)=\pi-\arccos x$	$\arctan(-x)=-\arctan x$	$\text{arccot}(-x)=\pi-\text{arccot}\,x$

因后面学习的需要，我们再介绍三角函数中的另两个函数.

$$y=\sec x,\quad \left(D=\left\{x \mid x\neq k\pi+\frac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}\right\}\right).$$

$$y=\csc x,\quad \left(D=\{x \mid x\neq k\pi,k\in\mathbf{Z}\}\right).$$

其中，$\sec x=\dfrac{1}{\cos x}$，$\csc x=\dfrac{1}{\sin x}$.

2. 简单函数

为了讨论问题方便，我们将由基本初等函数与常数经过有限次的四则运算得到的关系式称为简单函数. 如 $y=x^2+1$，$y=x-\tan x$，$y=x(1-\ln x)$ 和 $y=\dfrac{x(1-\ln x)}{2x+5}$ 等.

3. 复合函数

若 $y = f(u)$，$u = \varphi(x)$，当 $\varphi(x)$的值域落在 $f(u)$的定义域内时，称 $y = f[\varphi(x)]$是由中间变量 u 复合成的复合函数.

例 2 $y = \sqrt{u}$，$u = 2 + \sin x$ 可复合成 $y = \sqrt{2 + \sin x}$.

注意：$y = \sqrt{u}$，$u = \sin x - 2$ 就不能复合.

例 3 $y = \arctan 2^{\sqrt{x}}$ 可以看做是 $y = \arctan u$，$u = 2^v$，$v = \sqrt{x}$ 复合成的复合函数.

例 4 将下列复合函数分解成基本初等函数或简单函数.

(1) $y = \sin^2 \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$；

(2) $y = \ln(\tan e^{x^2+2\sin x})$.

解 (1) 最外层是二次乘方，即幂函数 $y = u^2$；次外层是正弦函数，即 $u = \sin v$；从外向里第三层是幂函数，即 $v = w^{-\frac{1}{2}}$；最里层是多项式或简单函数，即 $w = x^2 + 1$. 所以，分解得 $y = u^2$，$u = \sin v$，$v = w^{-\frac{1}{2}}$，$w = x^2 + 1$.

(2) 最外层是对数函数，即 $y = \ln u$；次外层是正切函数，即 $u = \tan v$；从外向里第三层是指数函数，即 $v = e^w$；最里层是简单函数，即 $w = x^2 + 2\sin x$. 所以，分解结果是 $y = \ln u$，$u = \tan v$，$v = e^w$，$w = x^2 + 2\sin x$.

正确地分解复合函数对我们解决后面复合函数求导以及积分有重要作用.

4. 初等函数

通常把由基本初等函数和常数经过有限次四则运算或有限次复合步骤所构成的并用一个解析式表达的函数，称为初等函数.

例如，$y = \ln(\sin x + 4)$，$y = e^{2x}\sin(3x + 1)$，$y = \sqrt[3]{\sin x}$，… 都是初等函数. 初等函数虽然是常见的重要函数，但是在工程技术中，非初等函数也会经常遇到. 例如符号函数，取整函数 $y = [x]$等分段函数就是非初等函数.

初等函数是常见的函数，它是微积分研究的主要对象. 在微积分的运算中，常常需要把一个初等函数分解成基本初等函数来研究，学会分析初等函数的结构对我们解决问题十分重要.

六、建立函数关系举例

运用数学工具去解决实际问题，往往需要找出问题中变量之间的函数关系，然后对它加以研究. 而函数关系的建立并无一定的法则可循，只能根据具体问题作具体分析和处理.

下面我们通过几个实例来了解建立函数关系的过程，这也是培养我们综合运用知识以及分析问题和解决问题能力的不可缺少的基本训练之一.

例 5 一球的半径为 R，作外切于球的圆锥(如图 1－3 所示)，试将圆锥的体积表示为圆锥高 h 的函数.

解　设圆锥的体积为 V，底半径为 r，则从立体几何知识可知

$$V=\frac{1}{3}\pi r^2 h.$$

现在要把 r 用 h 表示出来. 由图可知 $\mathrm{Rt}\triangle SBC \backsim \mathrm{Rt}\triangle SOA$，且 $SB=\sqrt{h^2+r^2}$，$SO=h-R$，故得

$$\frac{\sqrt{h^2+r^2}}{h-R}=\frac{r}{R},$$

即
$$r^2=\frac{R^2 h}{h-2R}.$$

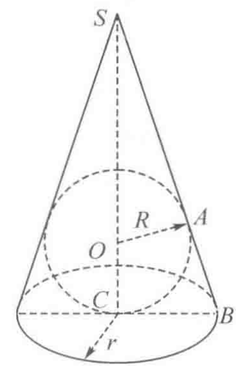


图 1－3

以此代入得

$$V=\frac{\pi R^2 h^2}{3(h-2R)},\quad 2R<h<+\infty.$$

这就是所求的函数.

例6　某工厂生产某产品年产量为若干台，每台售价为300元，当年产量超过600台时，超过部分只能打8折出售，这样可出售200台，如果再多生产，则本年就销售不出去了. 试写出本年的收益函数模型.

解　设某产品年产量为 x 台，收益函数为 $y(x)$. 因为产量超过600台时，售价要打8折，而超过800台时，多余部分本年销售不出去，从而没有效益，因此，把产量划分为三个阶段来考虑收益. 根据题意，有

$$y(x)=\begin{cases}300x, & 0\leqslant x\leqslant 600,\\ 300\times 600+0.8\times 300(x-600), & 600<x\leqslant 800,\\ 300\times 600+0.8\times 300\times 200, & x>800.\end{cases}$$

即收益函数模型为

$$y(x)=\begin{cases}300x, & 0\leqslant x\leqslant 600,\\ 180000+240(x-600), & 600<x\leqslant 800,\\ 228000, & x>800.\end{cases}$$

习题 §1－1

一、判断题

1. $y=\sqrt{x^2}$ 与 $y=x$ 相同.　(　　)
2. $y=(2^x+2^{-x})\ln(x+\sqrt{1+x^2})$ 是奇函数.　(　　)
3. 凡是分段表示的函数都不是初等函数.　(　　)
4. $y=x^2(x>0)$ 是偶函数.　(　　)
5. 两个单调增函数之和仍为单调增函数.　(　　)

6. 实数域上的周期函数的周期有无穷多个. ( )

7. 复合函数 $y=f[g(x)]$的定义域即为 $g(x)$ 的定义域. ( )

8. $y=f(x)$ 在(a,b) 内处处有定义，则 $y=f(x)$ 在(a,b) 内一定有界. ( )

二、选择题

1. 下列函数中既是奇函数又是单调增加的函数是( ).

A. $y=\sin^3 x$ B. $y=x^3+1$

C. $y=x^3+x$ D. $y=x^3-1$

2. 设 $f(x)=4x^2+bx+5$，若 $f(x+1)-f(x)=8x+3$，则 b 应为( ).

A. 1 B. -1

C. 2 D. -2

3. $f(x)=\sin(x^2-x)$ 是( ).

A. 有界函数 B. 周期函数

C. 奇函数 D. 偶函数

三、计算下列各题

1. 求 $y=\sqrt{3-x}+\arcsin\dfrac{3-2x}{5}$ 的定义域.

2. 已知 $f[\varphi(x)]=1+\cos x$，$\varphi(x)=\sin\dfrac{x}{2}$，求 $f(x)$.

3. 设 $f(x)=x^2$，$g(x)=e^x$，求 $f[g(x)]$，$g[f(x)]$，$f[f(x)]$，$g[g(x)]$.

4. 设 $\varphi(x)=\begin{cases}|x|, & |x|<1,\\ 0, & |x|\geqslant 1.\end{cases}$ 求 $\varphi(\frac{1}{5})$，$\varphi(-\frac{1}{2})$，$\varphi(-2)$，并作出函数 $y=\varphi(x)$ 的图形.

四、指出下列函数的复合过程

1. $y=\sqrt{x^2-3x-2}$. 2. $y=e^{\sin(x+3)}$. 3. $y=\ln(2+\tan^2 x)$.

五、某种产品每台售价 90 元，成本为 60 元，厂家为鼓励销售商大量采购，决定凡是订购量超过 100 台以上的，多出的产品实行降价，其中降价比例为每多出 100 台降价 1 元 / 台，但最低售价为 75 元 / 台.

1. 把每台的实际售价 p 表示为订购量 x 的函数.

2. 把利润 L 表示为订购量 x 的函数.

3. 当一商场订购 1000 台时，厂家可获利多少?

§1－2 极限的概念

本节我们将研究函数在自变量按某种方式变化的过程中，因变量随之而变的变化趋势，从而引出极限的概念. 我们先阐明整标函数，即数列的极限概念，再比照数列极限，讲述函数极限及其性质. 然后在此基础上讨论函数的连续性.

一、数列极限的描述性定义

引例　考察下列数列在无穷项后的变化情况(见图 1－4)：

(1)$1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \cdots,\ \frac{1}{n},\ \cdots$;

(2)$1,\ -\frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ -\frac{1}{4},\ \cdots,\ (-1)^{n+1}\frac{1}{n},\ \cdots$;

(3)$1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n,\ \cdots$;

(4)$1,\ 0,\ 1,\ 0,\ \cdots,\ \frac{1+(-1)^{n+1}}{2},\ \cdots$.

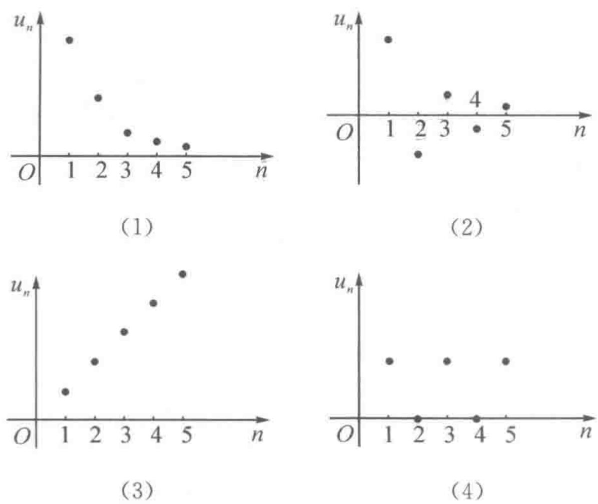


图 1－4

由图 1－4 不难得出，数列 $1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \cdots,\ \frac{1}{n},\ \cdots$ 的无穷项后大于零且无限接近于零；数列 $1,\ -\frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ -\frac{1}{4},\ \cdots,\ (-1)^{n+1}\frac{1}{n},\ \cdots$ 的无穷项后，大于零和小于零交替地无限接近于零；而数列(3)、(4) 的无穷项后就没有一个确定的常数无限接近，其中数列(3) 的项越来越大而没有一个确定的常数无限接近，数列(4) 取值 0 或 1，也没有无限接近一个确定的常数. 由此，引出数列极限的描述性定义，见表 1－2.

表 1－2　数列极限的描述性定义

	描述性定义	极限记号
数列 $\{u_n\}$ 的极限	对于数列 $\{u_n\}$，若当自然数 n 无限增大时，通项 u_n 无限接近于某个确定的常数 A，则称 A 为当 n 趋于无穷时数列 $\{u_n\}$ 的极限	$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=A$ 或 $u_n\to A(n\to\infty)$
	若常数 A 不存在，数列 $\{u_n\}$ 的极限不存在	$\lim\limits_{n\to\infty}u_n$ 不存在

引例中的数列(1)的极限表示为 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}=0$；数列(2)的极限也存在，记为 $\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{1}{n}=0$；而数列(3)和(4)的极限均不存在.

二、函数极限的描述性定义

数列为一整标函数 $u_n=f(n)$，其自变量的取值变化只有一种变化，即 $n\to\infty$. 函数 $y=f(x)$ 的自变量的变化情况有六种.

函数 $y=f(x)$ 的自变量可能的变化如下：

(1)x 的绝对值无限增大，即 x 沿 x 轴的方向和反方向取值，记为 $x\to\infty$；

(2)x 沿 x 轴的方向取值，记为 $x\to+\infty$；

(3)x 沿 x 轴的反方向取值，记为 $x\to-\infty$；

(4)x 无限接近于一个常数 x_0，即 x 大于 x_0 和小于 x_0 而无限接近 x_0，记为 $x\to x_0$；

(5)x 大于 x_0 而无限接近 x_0，记为 $x\to x_0^+$；

(6)x 小于 x_0 而无限接近 x_0，记为 $x\to x_0^-$.

函数极限与数列极限的意义类似. 我们将自变量的各种变化情况下函数极限的描述性定义列于表 1－3.

表 1－3 函数极限的描述性定义

类型	描述性定义	极限记号
$x\to\infty$ 时函数 $f(x)$ 的极限	设函数 $y=f(x)$ 在 $\|x\|>b$(b 为某个正实数)时有定义，如果当自变量 x 的绝对值无限增大时，相应的函数值无限接近于某一个固定的常数 A，则称 A 为 $x\to\infty$(读作"x 趋于无穷")时函数 $f(x)$ 的极限	$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$ 或 $f(x)\to A(x\to\infty)$
$x\to+\infty$ 时函数 $f(x)$ 的极限	设函数 $y=f(x)$ 在$(a,+\infty)$(a 为某个实数)内有定义，如果当自变量 x 无限增大时，相应的函数值 $f(x)$ 无限接近于某一个固定的常数 A，则称 A 为 $x\to+\infty$(读作"x 趋于正无穷")时函数 $f(x)$ 的极限	$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$ 或 $f(x)\to A(x\to+\infty)$
$x\to-\infty$ 时函数 $f(x)$ 的极限	设函数 $y=f(x)$ 在$(-\infty,a)$(a 为某个实数)内有定义，如果当自变量$\|x\|$无限增大且 $x<0$ 时，相应的函数值 $f(x)$ 无限接近于某一个固定的常数 A，则称 A 为 $x\to-\infty$(读作"x 趋于负无穷")时函数 $f(x)$ 的极限	$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$ 或 $f(x)\to A(x\to-\infty)$
$x\to x_0$ 时函数 $f(x)$ 的极限	设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的邻近小区间(其中 $x\neq x_0$)内有定义，如果当自变量 x 在小区间内无限接近于 x_0 时，相应的函数值 $f(x)$ 无限接近于某一个固定的常数 A，则称 A 为当 $x\to x_0$(读作"x 趋近于 x_0")时函数 $f(x)$ 的极限	$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ 或 $f(x)\to A(x\to x_0)$

续表1-3

类型	描述性定义	极限记号
$x\to x_0^-$ 时函数 $f(x)$ 的极限	设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的左邻小区间内有定义，如果当自变量 x 在左邻小区间内从 x_0 左侧无限接近于 x_0 时，相应的函数值 $f(x)$ 无限接近于某个固定的常数 A，则称 A 为当 x 趋近于 x_0 时函数 $f(x)$ 的左极限	$\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=A$ 或 $f(x)\to A(x\to x_0^-)$ 或 $f(x_0-0)=A$
$x\to x_0^+$ 时函数 $f(x)$ 的极限	设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的右邻小区间内有定义，如果当自变量 x 在右邻小区间内从 x_0 右侧无限接近于 x_0 时，相应的函数值 $f(x)$ 无限接近于某个固定的常数 A，则称 A 为当 x 趋近于 x_0 时函数 $f(x)$ 的右极限	$\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=A$ 或 $f(x)\to A(x\to x_0^+)$ 或 $f(x_0+0)=A$

由表1-2和表1-3中所有极限概念的共同特点可知，当自变量 x 在某种变化时，y 无限趋于一个确定的常数 A(简单来说，就是两个无限逼近和一个常数). 否则，若这一个确定的常数 A 不存在，称该函数在自变量的这种变化下的极限不存在.

例 1　考察极限 $\lim\limits_{x\to\infty}e^x$.

解　由指数函数 $y=e^x$ 的图像(如图1-5所示)知 $\lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0$，而 $\lim\limits_{x\to+\infty}e^x=+\infty$(极限不存在).

因而，$\lim\limits_{x\to\infty}e^x$ 不存在.

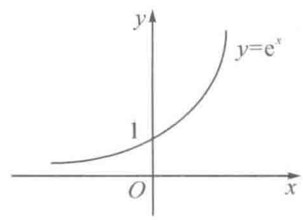


图1-5

例 2　考察极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\arctan x$.

解　观察反正切函数 $y=\arctan x$ 的图像(如图1-6所示)，知 $\lim\limits_{x\to-\infty}\arctan x=-\dfrac{\pi}{2}$，$\lim\limits_{x\to+\infty}\arctan x=\dfrac{\pi}{2}$.

但当 $x\to\infty$ 时，函数没有一个确定的常数无限接近，所以当 $x\to\infty$ 时，函数极限不存在.

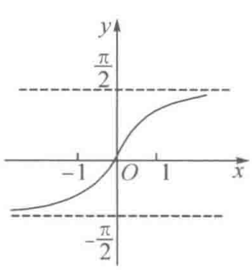


图1-6

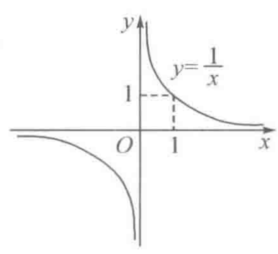


图1-7

例 3　考察极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}$.

解　由函数 $y=\dfrac{1}{x}$ 的图像(如图1-7所示)，容易得出 $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x}=0$，而且 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0$. 故 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0$.