国家出版基金项目
NATIONAL PUBLICATION FOUNDATION

Elsevier Handbook of the Philosophy of Science

爱思唯尔科学哲学手册

逻辑哲学（下）

Philosophy of Logic

英文本丛书主编
[以色列]道·加比 (Dov Gabbay)
[加拿大]保罗·撒加德 (Paul Thagard)
[加拿大]约翰·伍兹 (John Woods)

中译本丛书主编
郭贵春　殷　杰

本卷主编
[美　国]戴尔·杰凯特 (Dale Jacquette)

本卷译者
刘　杰　郭建萍

北京师范大学出版集团
BEIJING NORMAL UNIVERSITY PUBLISHING GROUP
北京师范大学出版社

国家出版基金项目
NATIONAL PUBLICATION FOUNDATION

"十二五"
国家重点图书
出版规划项目

Elsevier Handbook of the Philosophy of Science

爱思唯尔
科学哲学手册

逻辑哲学（下）

Philosophy of Logic

英文本丛书主编
[以色列]道·加比(Dov Gabbay)
[加拿大]保罗·撒加德(Paul Thagard)
[加拿大]约翰·伍兹(John Woods)

中译本丛书主编
郭贵春 殷 杰

本卷主编
[美 国]戴尔·杰凯特(Dale Jacquette)

本卷译者
刘 杰 郭建萍

北京师范大学出版集团
BEIJING NORMAL UNIVERSITY PUBLISHING GROUP
北京师范大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

逻辑哲学／郭贵春，殷杰主编．刘杰，郭建萍 译．—北京：北京师范大学出版社，2015.12
(爱思唯尔科学哲学手册)
ISBN 978-7-303-19189-5

I．①逻… II．①郭…②殷… III．①逻辑哲学 IV．① B81-05

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2015）第 164890 号

营销中心电话 010-58805072 58807651
北师大出版社学术著作与大众读物分社 http://xueda.bnup.com

LUOJI ZHEXUE
出版发行：北京师范大学出版社 www.bnup.com
北京市海淀区新街口外大街 19 号
邮政编码：100875
印　　刷：北京盛通印刷股份有限公司
经　　销：全国新华书店
开　　本：787 mm × 1092 mm　1/16
印　　张：97.75
字　　数：1436 千字
版　　次：2015 年 12 月第 1 版
印　　次：2015 年 12 月第 1 次印刷
定　　价：380.00 元

策划编辑：饶　涛　　责任编辑：王建虹　韩　拓
美术编辑：王齐云　　装帧设计：王齐云
责任校对：陈　民　　责任印制：马　洁

本书受国家教育部人文社会科学重点研究基地
山西大学科学技术哲学研究中心资助

Philosophy of Logic (ISBN:9780444515414)
Edited by Dale Jacquette, Dov M. Gabbay, Paul Thagard and John Woods

This edition of Philosophy of Logic by Dale Jacquette, Dov M. Gabbay, Paul Thagard and John Woods is published by arrangement with ELSEVIER BV of Radarweg 29, 1043 NX Amsterdam, Netherlands.

中文简体版 ISBN: 978-7-303-19189-5

中文简体版由 ELSEVIER BV 授权北京师范大学出版社出版发行
北京市版权局著作权合同登记号:图字 01-2015-4365

勒文海姆—司寇仑定理

H. D. 艾宾浩斯

1. 引 言

1915 年，利奥波·勒文海姆(Leopold Löwenheim)证明，每个可满足的一阶语句都有一个可数模型[勒文海姆，1915]。他的结论被看作模型论的开始。因为它的证明相当复杂且偏离了那个时代的逻辑重点，所以它没有立即得到承认(参见[巴德萨(Badesa)，2004])。

当托拉尔夫·司寇仑(Thoralf Skolem)把勒文海姆的定理概括为现在熟知的勒文海姆—司寇仑(Löwenheim-Skolem)定理时，形势发生了变化，即对一阶语句的可数集，提供了一些简化的证明[司寇仑，1920；司寇仑，1923；司寇仑，1929]和一个意想不到的后承：在他 1923 年的论文中，他通过把策梅罗(Zermelo)的分离公理构建为对每一可定义的一阶性质 ε 和任何集合 S 都存在着由具有性质 ε 的集合 S 中的元素 x 构成的集合 $\{x\in S \mid \varepsilon(x)\}$ 的要求，而且进程与替代公理相似，从而给出策梅罗—弗兰克尔(Zermelo-Fraenkel)公理系统 ZF(或当选择公理被包含进去时，公理系统为 ZFC)的第一个构想。他以其精

确性、简单性及充分有力性(sufficient strength)证明他的提议是合理的。ZF(C)作为一个一阶语句的可数系统，他使用勒文海姆—司寇仑定理，从而表示这个系统——如果是完全可满足的——有一个可数模型，如$\mathcal{M}$。作为一个ZF(C)的模型，$\mathcal{M}$满足所有ZF(C)的定理，尤其是这一定理说明有许多不可数集，因此还有难以计数的集合。这种看起来的不相容性被称作司寇仑悖论。不仅公理集合论的先驱策梅罗和弗兰克尔，而且年轻的代表人如冯·诺依曼(von Neumann)和哥德尔(Gödel)也清楚地懂得，它是把旧的系统与20世纪30年代产生的以一阶逻辑为核心的现代数理逻辑分开的重要分水岭。

司寇仑第一次非常清楚地详细说明一阶逻辑有两个双重特征：一方面，强得足以通过模仿集合论术语中数学的概念实现整个集合论、进而整个数学的公式化。另一方面，它缺乏确定重要结构所需的表达能力，尤其是他们的基数。第一个方面，伴随着哥德尔的完全性定理，导致20世纪30年代一阶逻辑的兴起。至于后一个方面，结果是由勒文海姆—司寇仑定理(及其概括)阐述的一阶
588 逻辑的不足，暗示了一种方法论的丰富性，使得这个定理成为一阶模型论的关键事实。20世纪60年代末，林斯特龙(Lindström)[1969]成功地证明一阶逻辑在它提供的方法论可能性上是最理想的：遵循哥德尔完全性定理及勒文海姆—司寇仑定理的逻辑不能严格地强于一阶逻辑。

勒文海姆—司寇仑定理可以被重新构建为一种特殊的类的转移定理：

> 如果一个句子(集)有一个基数κ的模型，那么它有一个基数μ的模型。

假设以这种方式，它导致多种可能的勒文海姆—司寇仑类定理：一种可能改变κ、μ和逻辑。或者一种可能通过假设基数κ的模型$\mathcal{A}$，询问基数μ的模型(如果它存在)是否在某种指定的意义上能被选为与$\mathcal{A}$相关，也就是说，是$\mathcal{A}$的一个延伸或一个基础，从而寻求更强的转移结果。面对这样的事实，即勒文海姆—司寇仑定理对一阶模型定理来说是最重要的，相应的定理可能清楚地显示了考虑中逻辑模型论的可能性。

对一种逻辑的语句集Φ，我们用$spec(\Phi)$表示Φ的谱(spectrum)，即它的

模型的基数类。勒文海姆—司寇仑型定理见证了谱的某种闭包性质。从这个意义上说，对一个给定逻辑转移结果的探究与描述其谱的问题相关。

这篇论文试图绘出一幅有关勒文海姆—司寇仑现象已经获得的图画。内容如下：

在§2我们介绍一些基本的术语，并描绘勒文海姆和司寇仑相结合对其他一些逻辑的直接扩充所得的原初结果。

§3处理一阶逻辑和无穷语言的较强的转移定理。它们是所谓勒文海姆—司寇仑—塔斯基(Tarski)定理的变种。这部分是结合一阶逻辑的谱问题得出的结论。

§4探究从"大"到"小"的特殊转移。第一部分研究集合论中的反射原理(reflection principles)，提供一种从"类的大小"到"集合的大小"的转移。第二部分研究有穷模型属性(finite model property)，提供一种从"无穷"到"有穷"的转移。

§5寻求那些包含固定基数运算符的逻辑中转移定理的有效性。这个问题导致一个更普遍的包含一些基数的一阶转移定理类型。

经过对各种逻辑关于转移定理有效性的考虑，§6把勒文海姆数字和汉夫(Hanf)数字当作一种衡量哪种转移定理有效的程度的方式。它从介绍一种适合于一般逻辑系统理论的框架开始。

§7在这个框架内，描述了两个结论，这两个结论显示了勒文海姆—司寇 589
仑定理的一般特点。第一个结论探讨林斯特龙型定理，为一阶逻辑向上和向下转移的本质作用提供论证。第二个结论探讨"近似一阶的(nearly first-order)"逻辑的一般的勒文海姆—司寇仑定理，这种"近似一阶的"是一种因把某种简单性强加于语法和语义上的集合论条件而更精确的属性。

在探讨过迄今为止的基数转移后，我们来关注始于无穷基数的情况。最后，§8转向有穷基数的研究。

结论的陈述由参考文献的特定信息补充。关于一阶勒文海姆—司寇仑现象的系统研究在如[常(Chang)和基斯勒(Keisler)，1973]或[霍奇(Hodges)，1993]那里能够找到。

2. 勒文海姆—司寇仑定理

2.1 记号的约定

自然数集0，1，2，…由 ω 表示。

词汇 τ 包含关系符号 R，…，函数符号 f，…，和/或常项 c，…每个 $R\in\tau$ 有一个元数(arity) $ar(R)\geq 1$，每个 $f\in\tau$ 有一个元数 $ar(f)\geq 1$。词汇 τ 如果只包含关系符号，那么，它是关系的(relational)。

为了定义一阶逻辑 FO，我们确定一个一阶变量的可数集 $V=\{x_i \mid i\in\omega\}$。

一阶 τ 公式照常被定义而且可能包含同一符号。FO[τ]是一个(一阶)τ 公式集。没有自由变元的公式称作句子。我们用 $\varphi(x_1, \cdots, x_n)$ 或者，简短点，用 $\varphi(\bar{x})$，表示公式 φ，这里变量在 φ 中自由地出现在 x_1，$\cdots x_n$ 之中。缩写词 $\bar{x}$ 通常指适当长度的元组(tuples)。

一个公式的量词秩(the quantifier rank)是出现在其中的嵌套量词的最大数。

对一个句子 φ 和一元关系符号 U 来说，φ^U 表示 φ 到 U 的相对化。是把 φ 中的所有量词都相对化到 U 而得。直观上讲，φ^U 表明 φ 在 U 上成立。

$\tau=\{R, \cdots, f, \cdots, c, \cdots\}$，$\tau$ 结构$\mathcal{A}$的形式是：

$$\mathcal{A}=(A, R^{\mathcal{A}}, \cdots, f^{\mathcal{A}}, c^{\mathcal{A}}, \cdots)$$

$A\neq\phi$ 是$\mathcal{A}$的论域，并且，对 $R\in\tau$，$f\in\tau$，及 $c\in\tau$，我们分别得到$R_{\mathcal{A}}\subseteq A^{ar(R)}$，$f^{\mathcal{A}}$：$A^{ar(f)}\to A$，且，$c^{\mathcal{A}}\in A$。

τ 结构$\mathcal{A}$是 τ 结构 B 的一个子结构，记为：$\mathcal{A}\subseteq\mathcal{B}$，如果 $A\subseteq B$ 并且$\mathcal{A}$和$\mathcal{B}$重合于 A。在这种情况下，A 在$\mathcal{B}$中是 τ 封闭的，亦即对 $c\in\tau$ 来说，$c\in A$ 而且对 $f\in\tau$ 来说 A 在$f^{\mathcal{B}}$下封闭。

如果 σ 是是一个词汇且 $\sigma\supseteq\tau$，一个 τ 结构$\mathcal{A}$和一个 σ 结构$\mathcal{B}$，我们写为：

$$\mathcal{A}=\mathcal{B}\upharpoonright\tau$$

如果 $A=B$ 且$\mathcal{A}$和$\mathcal{B}$在 τ 上一致，那么，我们称$\mathcal{A}$为$\mathcal{B}$的约简(reduct)(τ-约简)且$\mathcal{B}$为$\mathcal{A}$的扩充 。

590 对于基数词 κ，当 A 的基数 $|A|$ 等于 κ 时，$\mathcal{A}$的势为 κ。

给定一个 τ 结构$\mathcal{A}$，变量集 V 的$\mathcal{A}$-指派 α 是从 V 到$\mathcal{A}$的域 A 的一个映射。

对于$\mathcal{A}$，α 和 $\varphi \in FO[\tau]$，表明，$\varphi = \varphi(\bar{x})$，我们写为：

$$(\mathcal{A},\ \alpha) \models \varphi \quad 或 \quad A \models \varphi(\alpha(\bar{x}))$$

如果$(\mathcal{A},\ \alpha)$在通常意义上满足 φ 或是 φ 的一个模型(变量 $\bar{x}$ 由 $\alpha(\bar{x})$解释)。

设 $\bar{a} \in A$(是 $\bar{a} \in A^{length\ of\ \bar{a}}$的简写)，

$$\mathcal{A} \models \varphi(\bar{a})$$

意味着，$(\mathcal{A},\ \alpha) \models \varphi$，对于任何$\mathcal{A}$-指派 α，$\alpha(\bar{x}) = \bar{a}$。

φ 是一个句子的情况下，我们简写为$\mathcal{A} \models \varphi$。

通过定义，$(\mathcal{A},\ \alpha)$是一阶 τ-公式集 Φ 的模型，很明确：如果$(\mathcal{A},\ \alpha)$是所有$\varphi \in \Phi$ 的模型，那么，$(\mathcal{A},\ \alpha) \mid = \Phi$。

τ 公式或一个 τ 公式集如果有一个模型，那么它是可满足的。

如果一个集合是有穷的或者是可数无穷的，那么它是可数的。如果 κ 是一个基数，κ^+ 表示 κ 的基数后续项(cardinal successor)，也就是，最小的基数 $> \kappa$。

2.2 定理和它的证明

以下概述的勒文海姆—司寇仑定理的证明遵循这一个简单的理念：给定一阶语句集 Φ 的一个大模型$\mathcal{A}$，我们能通过选择$\mathcal{A}$的域 A 的一个小子集来建构 Φ 的一个小模型$\mathcal{B}$，并根据$\mathcal{A}$中为真的一阶存在断言例子来封闭它。如果 B 是闭包，就能把 B 定义为域$\mathcal{B}$中$\mathcal{A}$的子结构。

勒文海姆—司寇仑定理．如果 Φ 是一阶 τ 语句的可数集，它是可满足的(比如，通过 τ-结构$\mathcal{A}$)，那么，Φ 有一个可数的模型(这个模型能被选为$\mathcal{A}$的一个子结构)。

证明．我们可能假设 τ 也是可数的。为了阐明主要思想，我们首先处理这个特例，其中，带有二元的 R 的 $\tau = \{R\}$和 $\Phi = \{\forall x \exists yRxy\}$。令

$$\mathcal{A} \models \forall x \exists yRxy.$$

为了获得一个可数的子结构$\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$，$\mathcal{B} \models \forall x \exists yRxy$，我们开始于 A 的一个非空的可数子集$B_0$，比如，

$$B_0 = \{a_0\},$$

其中$a_0 \in A$，并且，通过选择定义 A 的可数子集的升链 $B_0 \subseteq B_1 \subseteq B_2 \cdots$，对任一$i \in \omega$，$B_{i+1}$在 B_i 之上，这样，对所有 $b \in B_i$，集合B_{i+1}包含一些满足$(b, b') \in R^{\mathcal{A}}$的 b'。令 $B := \cup_{i \in \omega} B_i$。因为$\tau$是关系的，所以 B 在$\mathcal{A}$中是$\tau$-封闭的，并且，因此是$\mathcal{A}$的可数子结构$\mathcal{B}$的域。通过建构，得到$\mathcal{B} \models \forall x \exists yRxy$。

591 链(chain)$B_0 \subseteq B_1 \subseteq B_2 \cdots$的定义能通过选择$\mathcal{A}$中 $\forall x \exists yRxy$ 的所谓司寇仑函项以稍微不同的形式给出，也就是一个函数 $h: A \to A$，使得对所有 $a \in A$，

$$h(a) := \text{有 } b \text{ 使得} \mathcal{A} \models Rab.$$

然后，我们能把 B_{i+1}定义为B_i 和它在 h 下的像的并，并且 B 是 h 下$\mathcal{A}$中 B_0 的闭包。

如果 Φ 包含带有无量词 φ 的形式为$\forall \bar{x} \exists \bar{y} \varphi(\bar{x}, \bar{y})$的句子(所谓 $\prod_2$-句子或司寇仑标准模式中的句子)，我们就能像上面那样讨论。在司寇仑 1920 年的证明中，他把一般情况缩减为这种特殊情况。在这里我们概述一种在后面将要提到的稍微不同的方式。

令τ是可数的，$\Phi \subseteq \mathrm{FO}[\tau]$，并且$\mathcal{A} \models \Phi$。令$\Sigma$是所有 $\exists y \psi(\bar{x}, y)$ 形式的公式的集，其中ψ是一个任意的τ-公式。Σ是可数的，对于

$$\exists y \psi(\bar{x}, y) =: \chi \in \Sigma$$

运用 A 的一个固定元素 a_0，我们定义一个司寇仑函项 $h_\chi : A^{\text{length of } \bar{x}} \to A$，如下：

$$h_\chi(\bar{a}) := \begin{cases} a_0, \text{如果} \mathcal{A} \models \neg \exists y \psi(\bar{a}, y) \\ \text{另外，有 } b \text{ 使得} \mathcal{A} \models \psi(\bar{a}, b) \end{cases}$$

对所有 $i \in w$ 及 $B := \cup_{i \in \omega} B_i$ 来说，我们通过规定

$$B_{i+1} := B_i \cup \{h_x(\bar{a}) \mid \chi \in \sum, \bar{a} \in B_i\}$$

构建链 $B_0 \subseteq B_1 \subseteq B_2 \cdots \subseteq A$ 及 B_0 如上，很容易表明 B 是τ-封闭的，因此，归纳出 B 域 $\mathcal{A}$ 的一个(可数的)子结构 $\mathcal{B}$。通过对公式成分的归纳，能证明对所有 $\varphi(\bar{x})$ 和所有 $\bar{b} \in B$，

$$\mathcal{A} \models \psi(\bar{b}) \text{ 当且仅当 } \mathcal{B} \models \varphi(\bar{b})$$

当 $\mathcal{A} \models \Phi$ 时，我们则得到 $\mathcal{B} | = \Phi$。

我们的论证(如同在[司寇仑，1920]中一样)运用了选择公理，即在 h_χ 的

定义中。这个论证在[司寇仑，1923]中，通过在自然数集中构建链 $B_0 \subseteq B_1 \subseteq B_2 \cdots$，利用它们的自然良序构建序列避开选择公理。因此，当开始于 Φ 的模型 $\mathcal{A}$ 时，它导向一个其域为自然数集的可数模型 $\mathcal{B}$。我们将不关注选择公理，而在 ZFC 中将予以讨论。

正如在引言中提到的，勒文海姆—司寇仑定理阐述了一阶逻辑的弱点，同时在一阶模型论中发挥了必不可少的作用。为了对后一方面予以阐述，我们说明了稠密开序(dense open orderings)的 $T \subseteq \mathrm{FO}[\{<\}]$理论，也就是，关于稠密的且没有最小或最大元素的序的理论(像有理数的序)，在任一句子 $\varphi \in \mathrm{FO}[\{<\}]$，$\varphi \in T$ 或 $\neg \varphi \in T$ 的意义上，是完全的。因为归谬法(reductio ad absurdum)假设对某个句子 φ 既不是 $\varphi \in T$ 又不是 $\neg \varphi \in T$。那么，$T \cup \{\varphi\}$ 和 $T \cup \{\neg \varphi\}$ 都是可满足的。通过勒文海姆—司寇仑定理，他们分别有可数模型 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$。根据康托尔(Cantor)定理，任何两个可数的稠密开序都是同构的。因此，$\mathcal{A} \models \varphi$ 当且仅当 $\mathcal{B} \models \varphi$，是矛盾的。 592

2.3 一些直接的扩充

以上给出的勒文海姆—司寇仑定理的证明能被直接扩充到一些更强的逻辑中。我们给出两个例子。

带有无穷量词的逻辑。令 Q 是一个新的一元量词符号而且通过允许对任一变项 x 从 φ 过渡到 $Qx\varphi$ 的规则来扩充这些形成一阶公式的规则。通过

$\mathcal{A} \models Qx\varphi(\bar{a},x)$，当且仅当，有无穷多 $b \in A$，使得 $\mathcal{A} \models \varphi(\bar{a},b)$。

来扩充满足关系。所得到的逻辑 FO(Q)强于一阶逻辑。例如，尽管，FO(Q)中的句子 $\neg Qx x = x$ 有这种属性，但没有其模型仅仅是有穷集的 $\Phi \subseteq \mathrm{FO}[\varphi]$。为了证明 FO(Q)中的勒文海姆—司寇仑定理，我们照上面的证明进行，假设 Σ 也包含形式为 $Qy\psi(\bar{x},y)$ 的相应公式，且给 B_{i+1} 加可数多满足 $\mathcal{A} \models \psi(\bar{a},b)$的 b，假使 $\bar{a} \in B_i$ 且 $\mathcal{A} \models Qy\psi(\bar{a},b)$。

弱二阶逻辑。二阶逻辑 SO 不满足类似勒文海姆—司寇仑定理的定理。例如，不计同构，实数的有序域是(有穷)集 Φ 的唯一模型，这个模型包含有序域公理和完全性公理(认为论域的每一非空的向左受限的子集，有一个下确界

(infimum))。因此，Φ 有幂 $2^{\aleph_0}$ 的唯一模型。

如果我们考虑弱二阶逻辑 WSO，那么，事情就会变化。在 WSO 中，不出现函数变项，关系变项取值于有穷关系。WSO 具有勒文海姆—司寇仑定理。FO 的证明利用简单的事实，即有穷的关系只包含有穷多的元素，以类似于从 FO 扩充到 FO(Q)的方法扩充到 WSO。

3. 勒文海姆—司寇仑—塔斯基定理

3.1 下降的勒文海姆—司寇仑—塔斯基定理

我们从定义开始。令 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 为 τ-结构。$\mathcal{B}$ 是 $\mathcal{A}$ 的初等子结构(且 $\mathcal{A}$ 是 $\mathcal{B}$ 的基本扩充)，记为：$\mathcal{B} \preccurlyeq \mathcal{A}$，如果 $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ 且对所有 $\varphi(\bar{x}) \in FO[\tau]$ 且 $\bar{b} \in B$ 来说，

$$\mathcal{B} \models \varphi(\bar{b}) \text{ 当且仅当 } \mathcal{A} \models \varphi(\bar{b})$$

如果 $\mathcal{B} \preccurlyeq \mathcal{A}$，那么，即使允许来自于 B 的参数，$\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 也满足相同的一阶
593 τ-句子。一般说来，初等子结构关系强于子结构关系。例如，有理数的域 $\mathcal{Q}$是实数域$\mathcal{R}$的子结构，但不是初等子结构，如，2 是$\mathcal{R}$中的平方，但不是$\mathcal{Q}$的。

有了对较高基数的简单概括，以上给出的勒文海姆—司寇仑定理的证明就得出以下更强的形式，这种形式追溯到塔斯基[塔斯基和沃特(Vaught)1957]：

定理. 对任一 τ-结构 $\mathcal{A}$ 和任一无穷基数 λ，如果 $|FO[\tau]| \leq \lambda \leq |A|$，那么，就有 τ 结构 $\mathcal{B}$，使得

$$\mathcal{B} \preccurlyeq \mathcal{A} \text{ 且 } |B| = \lambda$$

$\mathcal{B}$ 能被选择，使得，对基数 $\leq \lambda$ 的 A 的给定子集 X，$X \subseteq B$。

此外，还有对某些无穷逻辑的扩充。对于一给定的无穷基数 κ，令逻辑 $L_{\kappa+\omega}$ 像一阶逻辑那样被定义，但是允许在基数 $\leq \kappa$ 的公式集上合取和析取，直到所得到的公式只包含有穷多的自由变项。对 $L_{\kappa+\omega}$ 的每一公式 φ，有 $|\tau| \leq \kappa$ 的词汇 τ，使得 $\varphi \in L_{\kappa+\omega}|\tau|$；而且，$\varphi$ 至多有 κ 多子公式。

照例，我们把 $L_{\aleph_1\omega}$ 写为 $L_{\omega_1\omega}$。

勒文海姆—司寇仑—塔斯基定理的严格模拟早已在可数事例中失效了。例

如，因为每一实数 x 都能被可数多的形式为 $x < \rho$ 或 $\rho < x$（ρ 为有理数）①的不等式所描述，所以实数有序域$\mathcal{R}$的任一 $\mathsf{L}_{\omega 1 \omega}$ 初等子结构 $\mathcal{B}$（如 $\{+, \cdot, 0, 1, <\}$-结构）包含所有实数。

然而，有一种更弱的形式：假设，比如，有一关系的 τ，$L_{\kappa+\omega}[\tau]$ 的句子 φ，及 φ 的模型 $\mathcal{A}$，我们能像在勒文海姆—司寇仑定理的证明中那样，把它们当作 $\mathsf{L}_{\kappa+\omega}[\tau]$ 所有公式 $\exists y\psi(\bar{x}, y)$ 的集Σ，其中，ψ 是 φ 的子公式或这样一个公式的否定。Σ有基数 $\leq \kappa$。关注于 φ 的子公式及其否定，因此就得到无穷逻辑下降的勒文海姆—司寇仑定理的关系形式。

无穷逻辑的下降的勒文海姆—司寇仑定理．设 κ 为无穷的，$|\tau| \leq \kappa$，且 φ 是 $L_{\kappa+w}[\tau]$ 中的一个句子。如果 $\mathcal{A}$ 是一个 τ-结构，$\mathcal{A} \models \varphi$ 且 $\kappa \leq \lambda \leq |A|$，那么，有一个 τ-结构 $\mathcal{B}$，使得

$$\mathcal{B} \subseteq A, \mathcal{B} \models \varphi, \text{ 且 } |B| = \lambda$$

如果 τ 不是关系的，那么对于 $f, c \in \tau$，我们用公式 $\exists y f(\bar{x}) = y$ 及 $\exists y c = y$ 来扩充Σ。在这里需要假设 $|\tau| \leq \kappa$。

为了给出一个应用，我们考虑简单的群，即没有非平凡正规子群(nontrivial normal subgroups)的群。简单群的类能被 $L_{\omega 1 \omega}$ 的句子公理化。通过前面的定理，每一简单群 $\mathcal{G}$都有一可数的简单子群。

3.2 上升的勒文海姆—司寇仑—塔斯基定理 594

目前为止给出的转移定理处理向下的转移。另一种方向又如何呢？在一阶情况下，它能通过运用紧致性定理而被证明。在 § §6 和 7 中，我们将看到向上的转移与紧致性以各种方式相关联。

我们从一个简单的实例开始：如果 Φ 是一阶 τ-句子集，且 $\mathcal{A}$ 是 Φ 的一个无穷模型，那么，根据一阶逻辑的紧致性定理，给出幂 $\geq \lambda$ 的新常项集 C，这个集合

$$\Phi \cup \{\neg c = C' \mid c, C' \in C, c \neq C'\}$$

---

① 比如，对 $\rho = 2/3$ 来说，$x < \rho$ 能被表示为 $x + x + x < 1 + 1$。

有一个模型，即 $\mathcal{B}$。很明显，$|B| \geq \lambda$。如果我们不关注 Φ，而是关注 Φ 的模型 $\mathcal{A}$ 的所谓的初等图(elementary diagram) ED($\mathcal{A}$)，我们会获得更多。结合 $a \in A$ 的新常项 a，我们规定：

$$\mathrm{ED}(\mathcal{A}):=\{\varphi(\bar{a}) \mid \varphi(\bar{x}) \in FO[\tau], \bar{a} \in A, \mathcal{A} \models \varphi(\bar{a})\}。$$

(注意：$\Phi \subseteq \mathrm{ED}(\mathcal{A})$。)那么，选择相应的模型($B,(a^B)a \in A$)，其中 $|B| \geq \lambda$，使得 $a^{\mathcal{B}}=a$ ($a \in A$)，即，使得 $\mathcal{A} \preceq \mathcal{B}$。如果 $|A| \leq \lambda$ 且 $FO[\tau] \leq \lambda$，那么，我们把下降的勒文海姆—司寇仑—塔斯基定理应用到 $\mathcal{B}$ 及 $X:=A$，得到 $\mathcal{D}$, $\mathcal{A} \preceq \mathcal{D} \preceq \mathcal{B}$ 且 $|D|=\lambda$。因此，我们已经从[塔斯基和沃特，1957]中证明了以下定理：

上升的勒文海姆—司寇仑—塔斯基定理．令$\mathcal{A}$是一个无穷 τ-结构而且 $\lambda \geq \max\{|A|,|FO[\tau]|\}$。那么，有 τ-结构 B，

$$\mathcal{A} \preceq \mathcal{B} \text{ 且 } |B|=\lambda \qquad \dashv$$

目前考虑的一阶逻辑的扩充不允许相应的向上转移：对任一无穷的 κ，逻辑 $\mathrm{L}_{\kappa+\omega}$ 允许不计同构地描述 ω 的自然顺序关系(the natural ordering)，也就是，由有第一个但没有最后一个元素的序的公理和与句子一起

$$\forall x \bigvee \{\text{“至多有 } n \text{ 个元素 } < x\text{”} \mid n=0,1,2,\cdots\}$$

同样，我们能讨论 FO(Q)及弱二阶逻辑 WSO。

通过要求考虑中的模型由初等子结构关系相联系，勒文海姆—司寇仑—塔斯基定理能被当作引论中处理的简单转移定理的强化。还有各种其他强化，例如，这个模型可能有附加的属性，如饱和的、承诺很少的类型，等等。许多表明有特殊属性的模型存在的一阶模型论定理，都能以这种方式得到解释。为以后参考，下面的 3.4 小节包含一个重要的例子：带有不可辨元(indiscernibles)的模型。

595 **3.3** 谱(Spectra)

令 Φ 是一个有无穷模型的一阶 τ 句子集。根据勒文海姆—司寇仑—塔斯基定理，Φ 有所有基数 $\geq |FO[\tau]|$ 的模型，即，Φ 的谱(spectrum)是，

$$spec(\Phi):=\{|A| \mid \mathcal{A} \models \Phi\},$$

Φ 的模型的基数类，包含所有$\geq|\mathrm{FO}[\tau]|$的基数。在区间

$$[\omega,|\mathrm{FO}[\tau]|\rangle:=\{v\mid \mathcal{W}\leq v<|\mathrm{FO}[\tau]|\}$$

中 Φ 的模型的基数怎样呢？第一个答案由基斯勒的以下结论（参见[常和基斯勒，1973]，Cor，6.5.12，给出：

定理．对所有 $\mu\geq\omega$ 及 $v\geq\mu^{\omega}$，如果 μ 少于第一个（不可数的）可测基数（measurable cardinal）且 $\mu\in spec(\Phi)$，那么 $v\in spec(\Phi)$。

特殊情况 $v=\mu^{\omega}$ 是这一定理的一个更弱形式的后承（consequence），表明 $spec(\Phi)$ 在无穷的求幂中是封闭的。这个形式的证明使用了超幂技术（ultrapower techniques）：令 $\mathcal{A}\models\Phi$（$|A|=\mu\geq\omega$），并且令 $v\geq\omega$。此外，令 D 是 v 上的正则超滤子（regular ultrafilter）。那么，超幂 $\prod_{1\in v}\mathcal{A}/D$ 是基数 μ^{v} 的 Φ 的模型。

关于这个定理中 μ 和 μ^{ω} 间可能间隙的结果必然是一种特殊的类型。梅克勒（Mekler）[1977]的结果表明对于 $\mu\in spec(\Phi)$，集合 $spec(\Phi)\cap[\mu,\mu^{\omega}\rangle$ 没有正则模式：假设 μ 少于第一个可测基数，从而使得

$$\omega\leq\mu<\mu^{\omega}$$

而且，给定 $S\subseteq[\mu,\mu^{\omega}\rangle$，那么有 τ 和一阶 τ 句子集 Φ，使得

$$spec(\Phi)\cap[0,\mu^{\omega}\rangle=S$$

3.4 附录：带有不可辨元的模型

不可辨元在模型论中提供了一种强有力的工具，并且，将对下面探讨的一些论题非常重要。为了留下映像，我们将更细致地描述一种基本变式（variant）。

令 $\mathcal{A}$ 是一个 τ 结构，$(B,<)$ 是一个次序关系（ordering），其中 $B\subseteq A$。如果，对所有 $\varphi(\bar{x})\in\mathrm{FO}[\tau]$及所有 <- 上升元组 $\bar{a},\bar{b}\in B$ 而言，①

$\mathcal{A}\models\varphi(\bar{a})$ 当且仅当 $A\models\varphi(\bar{b})$.

那么 $(B,<)$ 在 A 中是一个不可辨元的有序集。追溯到埃伦芬赫特（Ehren-

① 等价地，我们能考虑 <-同构元组（isomorphic tuples）。

feucht)和莫斯托夫斯基(Mostowski)[1956]，主要结果表明：

命题. 如果 $\Phi \subseteq \mathrm{FO}[\tau]$ 是带有无穷模型的句子集，并且 $(C, <)$ 是一个次
596 序关系，那么，Φ 有一个模型，这个模型把 $(C, <)$ 当作不可辨元的有序集。如果 $|C| \geq |\mathrm{FO}[\tau]|$，那么有这样一个模型，它有基数 $|C|$。

证明. 为 $c \in C$ 选择新常项 c，它足以表明集合

$$\Theta := \Phi \cup \{c \neq d \mid c, d \in C, c \neq d\}$$

$$\cup \{\varphi(\bar{c}) \leftrightarrow \varphi(\bar{d}) \mid \varphi(\bar{x}) \in \mathrm{FO}[\tau] \text{ 及 } \bar{c}, \bar{d} <\text{-}C \text{ 上的递增元组}\}$$

有一个模型。不失其广义(*W. l. o. g.*)，我们能假定 $(C, <)$ 稠密且开放。根据紧致性定理，Θ 的可满足性能还原为形式 $\Phi \cup \Psi$ 的所有集的满足性，并且 Ψ 是不等式 $c \neq d$ 和等值式 $\varphi(\bar{c}) \leftrightarrow \varphi(\bar{d})$ 的有穷集。其中，$\bar{c}, \bar{d} \in C$ 是 $<$ 上升的，而且，因为有穷多 $\varphi_1(\bar{x}), \cdots, \varphi_k(\bar{x})$ 被包含，所以多元组(tuples) $\bar{x}$ 是相同长度的 $n(\Psi)$。

令 $\mathcal{A}$ 为 Φ 的有穷模型且 $\prec$ 为 $\mathcal{A}$ 上的任意有序关系。如上给出 Ψ，通过规定

$$\bar{a} \sim \bar{b}: \text{当且仅当}(\mathcal{A} \models \varphi_i(\bar{a}) \text{ 当且仅当 } \mathcal{A} \models \varphi_i(\bar{b})), i = 1, \cdots k.$$

基于 A 的 $\prec$ 上升 $n(\Psi)$ 一元组集定义一种等价关系 $\sim$。

因为 $\sim$ 仅有有穷多等价类，拉姆塞(Ramsey)的定理得出 A 包含无穷子集 B，从而使得 B 上所有 $\prec$ 上升 $n(\Psi)$-元组属于相同的等价类。因此，$\Phi \cup \Psi$ 通过由适当的 $b \in B$ 解释 Ψ 中的常项 c 而有一个来自于 $\mathcal{A}$ 的模型。

4. 从“非常大”到“非常小”

勒文海姆—司寇仑定理主要处理从无穷基数到更小无穷基数的转移。在这部分里，我们简要地讨论从“非常大”到“非常小”的转移，通过(1)“非常大”=“类的大小”，及“非常小”=“集合的大小”与(2)“非常大”=“无穷”，“非常小”=“有穷”的对比予以举例证明。

4.1 反射定理(The reflection theorem)

我们基于策梅罗—弗兰克公理系统(Zermelo-Fraenkel Axiom System) ZF 来