中学数学中的离散数学方法

——组合数学图论与数论
在中学数学中的应用

（下册）

柳柏濂　吴康编

华南师范大学　数学系

一九八七年八月

中学数学中的离散数学方法

——组合数学、图论与数论在中学数学中的应用

（下 册）

柳柏濂、吴康 编

华南师范大学数学系

一九八七年八月

下册目录

第九章 整数与整除

整数的整除性理论是初等数论最基本的成份，也是中学数学竞赛最常涉及的内容之一，由于它的灵活性、趣味性和思辨性，通常它也是很多师生欢迎的数学课外活动的材料。应该强调指出，每一名希望参加数学竞赛的初、高中学生，都应该掌握最起码的初等数论知识（主要是整除性理论）。

一、整除

下文以 Z，Z^+，Z_0 分别代表整数、正整数、非负整数的集合，所出现的字母，如不特别指出，均指整数。以 $a|b$ 和 $a\nmid b$ 表示 a 整除 b 和 a 不整除 b；(a,b) 和 $[a,b]$ 表示 a，b 的最大公约数和最小公倍数，记号可推广为多个数。如下是常用的整除性质：

1° $a|a$；$a|b$，$b|a \Longrightarrow a=\pm b$；$a|b$，$b|c \Longrightarrow a|c$.

2° $a|b$，$a|c \Longrightarrow a|(mb+nc)$，且 $a|(b,c)$.

3°（带余除法）设 $n\in Z^+$，则对任一 a，必有唯一的数对 (q,r)，满足 $a=nq+r$，$0\leqslant r<n$.

4° 若 $a,b\in Z^+$，则 $ab=(a,b)[a,b]$.

5° 若 $(m,n)=d$，则 $(km,kn)=kd$，$\left(\frac{m}{c},\frac{n}{c}\right)=\frac{d}{c}$，$c|m$，$c|n$.

6° 若 $(a,b)=1$，则 $(a,bc)=(a,c)$.

7° 若 $a|bc$，且 $(a,b)=1$，则 $a|c$.

8° $(a, b+ka)=(a, b)$.

9° 若 p 是质数，且 $p|ab$，则 $p|a$ 或 $p|b$.

10° 若 $a|c$，$b|c$，则 $[a, b]|c$.

例 1.（苏联，1953） 求出用单位 1 写出的能够被 33…33（100 个 3）整除的最小数.

解：设所求为 11…11（n 个 1），则有

$$\overbrace{11\cdots11}^{n\text{个}}=\overbrace{33\cdots33}^{100\text{个}}\cdot A,$$

即
$$\frac{10^n-1}{9}=\frac{10^{100}-1}{3}\cdot A,$$

$$10^n-1=3A(10^{100}-1),$$

$$\therefore\quad 10^{100}-1\,\big|\,10^n-1.$$

$$\therefore\quad 100\,|\,n.$$

令 $n=100k$，则 $\dfrac{10^n-1}{10^{100}-1}=\dfrac{\overbrace{99\cdots99}^{100k\text{个}}}{\underbrace{99\cdots99}_{}^{}\overset{}{}}=100\cdots00100\cdots001\cdots100\cdots001$

（k 个 1，每 2 个 1 之间隔着 99 个 0）$=3A$，故 k 的最小值为 3，所求的数为 11…11（300 个 1）。

例 2.（上海，1956） 具有哪种性质的自然数 n，能使 $1+2+\cdots+n$ 整除 $1\cdot2\cdot3\cdots n$？

分析：$1+2+\cdots n=\dfrac{n(n+1)}{2}$，应讨论在什么条件下 $\dfrac{n(n+1)}{2}\Big|n!$.

解：令 $n!=A\cdot\dfrac{n(n+1)}{2}$. 显然 $n=1$ 为一个解，$n=2$ 不是解. 下设 $n\geqslant3$，则 $(n-1)!=A\cdot\dfrac{n+1}{2}$. 若 $n=2k+1$，则

则 $(2k)!=A(k+1)$，$k+1\leqslant 2k$，故 $k+1\,\big|\,(2k)!$，n 为所

求的解．若 $n=2k$，则 $2\cdot(2k-1)!=A(2k+1)$，若 $2k+1$ 为质数，则 $2k+1\nmid 2\cdot(2k-1)!$；若 $2k+1$ 为合数，则

$2k+1=pq$，$p,q\leqslant\frac{2k+1}{3}\leqslant 2k-1$，故若 $p\neq q$，便有

$pq\mid(2k-1)!$，若 $p=q$，则 $2\leq p<2p\leqslant 2k-1$，仍有 $pq\mid(2k-1)!$．总结得知满足条件的 n 为全体奇数，以及使得 $n+1$ 非质数的全体偶数．

例3．（加拿大，1971）证明：对一切整数 n，$n^2+2n+12$ 不是 121 的倍数．

证：反之，设 $n^2+2n+12=121k$，则 $(n+1)^2=11(11k-1)$，

故 $$11\mid(n+1)^2\Longrightarrow 11\mid n+1\Longrightarrow 11^2\mid(n+1)^2\Longrightarrow 11^2\mid 11(11k-1)\Longrightarrow 11\mid 11k-1,$$

矛盾．命题得证．

例4．（波兰，1958～1959）已知数列 13，25，43，…，a_n，…，$a_n=3n(n+1)+7$，证明 (i) 数列中任意连续五项中必有一项能被5整除；(ii) 数列的任一项都不是完全立方数．

分析：(i) 点猜测数列每隔四项有一项是5的倍数（可写出开头数项检验）；(ii) 利用通项公式的结构．

证：(i) 显然 $5\mid a_2$．设 $5\mid a_{5n+2}$，则 $a_{5(n+1)+2}=3[5(n+1)+2][5(n+1)+3]+7=3(5n+2)(5n+3)+7+3(10n+50)=a_{5n+2}+5(6n+30)$ 也能被5整除，由数学归纳法知命题得证．(ii) 因 a_n 恒为奇数，设 $a_n=(2C+1)^3$，即 $3n(n+1)+7=(2C+1)^3$，化简得 $3n^2+3n+6=8C^3+12C^2+6C$，$3\mid 8C^3$，得到 $3\mid C$．令 $C=3D$ 代入化简得 $n^2+n+2=72D^3+36D+6D$，从而 $3\mid n^2+n+2$．设 $n=3k$，$3k+1$，$3k+2$，则 n^2+n+2 分别为 $3k(3k+1)+2$，$9k(k+1)+4$，$3(k+1)(3k+2)+2$，均不能被3整除．引出矛盾．原命题成

立。

例5.（匈牙利，1947）证明：若n为奇数，则$46^n+296\cdot13^n$能被1947整除.

分析：$1947=33\cdot59$，故分别考虑33和59. 注意$46+13=59$，$46-13=33$.（用年号作为考题的内容，在数学竞赛中屡见不鲜）

证：$296=59\cdot5+1$，由n为奇数，知$46+13\mid46^n+13^n$，即$59\mid46^n+13^n\Longrightarrow59\mid46^n+13^n+(59\cdot5)13^n\Longrightarrow59\mid46^n+296\cdot13^n$；$296=33\cdot9-1$，故$46-13\mid46^n-13^n$，即$33\mid46^n-13^n\Longrightarrow33\mid46^n-13^n+(33\cdot9)13^n\Longrightarrow33\mid46^n+296\cdot13^n$. 又$(33,59)=1$，故$33\cdot59=1947\mid46^n+296\cdot13^n$. 证毕.

解整除问题通常要利用各种代数公式，例如例5用到的$a+b\mid a^n+b^n$（n为奇数），等等. 当然更多的是利用整数的整除性质. 下述为常见的一些正整数的整除特性小结：（$f_i(n)$表示n的末i位数，$i=1,2,\cdots$；$g(n)$表示n的各位数字和）

1) $2\mid n\Longleftrightarrow2\mid f_1(n)$；$4\mid n\Longleftrightarrow4\mid f_2(n)$；$8\mid n\Longleftrightarrow8\mid f_3(n)$；$2^i\mid n\Longleftrightarrow2^i\mid f_i(n)$.

2) $5\mid n\Longleftrightarrow5\mid f_1(n)$；$25\mid n\Longleftrightarrow25\mid f_2(n)$；$5^i\mid n\Longleftrightarrow5^i\mid f_i(n)$.

3) $3\mid n\Longleftrightarrow3\mid g(n)$；$9\mid n\Longleftrightarrow9\mid g(n)$.

4) $11\mid n\Longleftrightarrow11\mid P$，$P$为$n$的奇位数字和与偶位数字和之差。

5) $7\mid n\Longleftrightarrow7\mid P_3$；$11\mid n\Longleftrightarrow11\mid P_3$；$13\mid n\Longleftrightarrow13\mid P_3$. P_3为n从个位起每3位分段时奇段数的和与偶段数的和之差.

二、同余式

同余式是整除性理论的重要工具，掌握了它对解整除问题很有好处.

定义 设$n\in Z^{+}$，用n去除a和b所得余数相同，便称a，b对模n同余，记为$a\equiv b \pmod n$，否则称a，b对模n不同余，记为$a\not\equiv b \pmod n$. 易知同余式有如下性质：

1° $a\equiv a$；若$a\equiv b$，则$b\equiv a$；若$a\equiv b$，$b\equiv c$，则$a\equiv c$. $(\mathrm{mod}\ n)$

2° $a\equiv b \pmod n \Longleftrightarrow n\mid a-b$.

3° 若$a\equiv b$，$p\equiv q \pmod n$，则$ax+py\equiv bx+qy$；$ap\equiv bq$，$a^{k}\equiv b^{k}$，$k\in Z^{+}$，$f(a)\equiv f(b) \pmod n$，其中$f(x)$为任意给定的一个整系数多项式.

4° 若$am\equiv bm \pmod n$，$(m,n)=d$，则$a\equiv b$ $(\mathrm{mod}\ \frac{n}{d})$.

5° 若$a\equiv b \pmod {n_i}$，$i=1,2,\cdots k$，则$a\equiv b \pmod{[n_1, n_2, \cdots, n_k]}$.

例6.（匈牙利，1947～1951）证明：从n个给定的自然数中，总可以挑选出若干个数(至少一个，也可能是全体)，它们的和能被n整除.

证：设给定n数为$a_1, a_2, \cdots, a_n$，记此数列的前k项和($k=1,2,\cdots,n$)为$b_1, b_2, \cdots, b_n$. 若有$b_i\equiv 0 \pmod n$，则命题成立；否则，任一b_i均使得$b_i\not\equiv 0 \pmod n$，故必有$b_i\equiv b_j \pmod n$，$i<j$，则$b_j-b_i=a_{i+1}+a_{i+2}+\cdots+a_j\equiv 0 \pmod n$，命题仍成立.

例7.（波兰，1954～1955）证明：在组成公差为30的等差数列的7个自然数中，有且只有一个数能被7整除.

证：设此7数为a，$a+30$，$a+60$，…，$a+180$，设$a\equiv r \pmod 7$，$0\leqslant r\leqslant 6$，则取k，$0\leqslant k\leqslant 6$，使得$k\equiv -4r \pmod 7$，便有

$$a+30k\equiv r+2k\equiv r-8r\equiv 0 \pmod 7,$$

7整除 $a+30k$．若同时有 $a+30k_1$，$a+30k_2$ 被7整除（$0\leqslant k_1<k_2\leqslant 6$），则7整除两者之差 $30(k_2-k_1)$，这不可能．命题得证．

例8．（加拿大，1969）证明没有整数 a，b，C 满足 $a^2+b^2-8C=6$．

证：对于（mod 8），任一奇数 a 都有 $a^2\equiv 1$，任一偶数 b 都有 $b^2\equiv 0$ 或4．0，1，4 这三数中任两2数（可以相同）之和均不同余于6（mod 8），故 $a^2+b^2\neq 8C+6$．命题得证．

三、九余法

九余法又称弃九法，常被用来作数学竞赛题的根据。其原理为

设 $N\in Z^+$，则 $g(N)\equiv N \pmod 9$．

$g(n)$ 的意义如前，表示 n 的各位数字和．

例9．（辽宁，1976）将正整数 A 的各位数字拆乱重新排列成 B，则 $A-B$ 是9的倍数．

证：$A\equiv g(A)=g(B)\equiv B \pmod 9$，故 $9\mid A-B$．

例10．（IMO，1975）设A是 4444^{4444} 的各位数字之和，B是A的各位数字之和，C是B的各位数字之和．求C．（所有数都按十进制记数）

解：令 $n=4444$，则 $n\equiv 7$，且 $C=g(B)\equiv B=g(A)$

$$\equiv A=g(n^n)\equiv n^n\equiv 7^n\equiv(-2)^n=2^n=8^{1481}\cdot 2$$

$$\equiv(-1)^{1481}\cdot 2=-2\equiv 7 \pmod 9.$$

又因 $n<10^4$，故 $n^n<10^{4n}$，$A=g(n^n)<9\cdot 4n<10^6$；$B=g(A)\leqslant 9\cdot 6=5.4$，$C=g(B)\leqslant 4+9=13$．故 $C=7$．

四、整值多项式

多项式理论和整数理论在整除性方面许多是平行（相似）的，整值多项式则为两者之结合。

定义　x 的多项式 $f(x)$ 若对 x 取一切整数值均表整数值时，称 $f(x)$ 为 x 的整值多项式。

关于整值多项式有著名的

整值多项式判别定理　若 n 次复系数多项式 $f(x)$ 当 x 取值 $k, k+1, \cdots, k+n$ 时均取整数值，则 $f(x)$ 为整值多项式。

此定理可推广为

整值多项式判别定理二　若 n 次复系数多项式 $f(x)$ 当 x 取一公差非 0 的等差数列 $\{a_k\}$ 的连续 $n+1$ 项时均取整数（有理数、实数）值，则 $f(x)$ 对 x 取数列 $\{a_k\}$ 的任一项均取整数（有理数、实数）值。

证：令 $F(x)=f(a_i+dx)$，d 为数列 $\{a_k\}$ 的公差，则

$$F(0)=f(a_i),\ F(1)=f(a_{i+1}),\cdots,\ F(n)=f(a_{i+n}).$$

当 $f(a_i), f(a_{i+1}),\cdots, f(a_{i+n})$ 均取整数（有理数、实数）值时，$F(0), F(1),\cdots, F(n)$ 均取整数（有理数、实数），由判别定理知 $f(a_k)=F(k)$ 取整数（有理数、实数——证略）值。

推论　$f(x)$，$\{a_k\}$ 意义同上，若 $N\mid f(a_i)$，$N\mid f(a_{i+1})$，$\cdots$；$N\mid f(a_{i+n})$，则 $N\mid f(a_k)$。

还可以引伸出整值函数理论（略）。

例 11.（匈牙利，1902～1903）证明：1）具有给定的常数系数的任一二次三项式 Ax^2+Bx+C 可以表示成 $k\cdot\frac{x(x-1)}{1\cdot 2}+lx+m$ 的形式，其中 k, l 和 m 有完全确定的数值。2）二次三项式 Ax^2+Bx+C 对所有的整数 x 都取整数值当且仅当如果把它表示成 $k\cdot\frac{x(x-1)}{1\cdot 2}+lx+m$ 的形式时，系数 k, l

和 m 是整数.

证：1)极易，略. 2) 若 $f(x)=Ax^2+Bx+C$ 为整值多项式，则 $F(x)=k\cdot\frac{x(x-1)}{1\cdot 2}+lx+m$ 也为整值多项式，故 $F(0)=m$，$F(1)=l+m$，$F(2)=k+2l+m$ 为整数. 可解得 k. l 和 m 为整数，必要性得 ；若 k，l 和 m 为整数，则 $F(0)$，$F(1)$，$F(2)$ 为整数. $F(x)$ 为整值多项式，即 $f(x)$ 为整值多项式，充分性得证.

此题可以推广为

例12.（推论二）每一 n 次多项式 $f(x)$ 都可以表示成 $b_0+b_1\binom{x}{1}+b_2\binom{x}{2}+\cdots+b_n\binom{x}{n}$ 的形式，其中 $\binom{x}{k}=\frac{x(x-1)(x-2)\cdots(x-k+1)}{k!}$；当且仅当 b_0，b_1，…，b_n 全为整数时，$f(x)$ 为整值多项式.（证明留给读者）

例13. 若 n 次多项式 $P(x)$ 当 $x=0, 1, 4, 9, 16, \cdots, n^2$ 时取值均为整数，求证 $P(x)$ 对所有完全平方数 x 均取整数值. 举一多项式 $P(x)$，使所有完全平方数 x 代入其值均为整数，但可找到一个非完全平方数 x，使得 $P(x)$ 非整数.

解：$Q(x)=P(x^2)$ 为 x 的 $2n$ 次多项式，对 $x=-n, -(n-1), \cdots, -1, 0, 1, 2, \cdots, n$ 共 $2n+1$ 个值均取整数值，故 $Q(x)$ 为 x 的整值多项式，即 $P(x)$ 对所有完全平方数 x 均取整值.

令 $P(x)=\frac{1}{12}x(x-1)$，则 $P(2)=\frac{1}{6}$ 非整数，但

$$Q(x)=P(x^2)=\frac{1}{12}x^2(x^2-1)=2\cdot\binom{x+2}{4}-\binom{x+1}{3}$$

为整值多项式，故 $P(x)$ 对所有完全平方数 x 均取整值.

例14. $f(x,y,z)=\frac{x^n}{(x-y)(x-z)}+\frac{y^n}{(y-x)(y-z)}+\frac{z^n}{(z-x)(z-y)}$

$(n\in Z_0)$为关于 x, y, z 的整值函数（$x\neq y$，$y\neq z$，$z\neq x$）.

证：$$f(x,y,z)=-\frac{x^n(y-z)+y^n(z-x)+z^n(x-y)}{(x-y)(y-z)(z-x)},$$

当 $n=0$ 或 1 时，$f(x,y,z)=0$；当 $n\geqslant 2$ 时，把 $f(x,y,z)$ 的分子记为 $g(x,y,z)$，易见

$$g(x,x,z)=g(x,y,y)=g(z,y,z)=0.$$

故 $g(x,y,z)$ 有因子 $(x-y)(y-z)(z-x)$，当 $x\neq y$，$y\neq z$，$z\neq x$ 时 $f(x,y,z)$ 其实为一多项式，系数全为整数，故 $f(x,y,z)$ 为整值函数.

五、p进制

以 $(a_na_{n-1}\cdots a_1a_0)_p$ 表 p 进位制下的整数，它的值为

$$a_np^n+a_{n-1}p^{n-1}+\cdots+a_1p+a_0.$$

其中 $a_i\in\{0,1,2,\cdots,p-1\}$，$i=0,1,2,\cdots,n$. 同理也可得到 p 进制下的小数表示方法. 最著名的是 2 进制，所使用的数字为 0 或 1. 近年数学竞赛亦有以 p 进制数为题材的.

例 15.（IMO，1970）已给自然数 a, b, n，$a>1$，$b>1$，$n>1$. A_{n-1} 和 A_n 是以 a 为基数的数系中的数（即 a 进制中的数），B_{n-1} 和 B_n 是以 b 为基数的数系中的数（即 b 进制中的数）. A_{n-1}，A_n，B_{n-1}，B_n 可表示为如下的形式：

$$A_{n-1}=(x_{n-1}x_{n-2}\cdots x_0)_a,\quad A_n=(x_nx_{n-1}\cdots x_0)_a,$$

$$B_{n-1}=(x_{n-1}x_{n-2}\cdots x_0)_b,\quad B_n=(x_nx_{n-1}\cdots x_0)_b,$$

$$x_n\neq 0,\quad x_{n-1}\neq 0$$

试证明：若 $a>b$，则 $\dfrac{A_{n-1}}{A_n}<\dfrac{B_{n-1}}{B_n}$.

证：$(0.x_{n-1}x_{n-2}\cdots x_0)_a-(0.x_{n-1}x_{n-2}\cdots x_0)_b$

$$=x_{n-1}(a^{-1}-b^{-1})+x_{n-2}(a^{-2}-b^{-2})+\cdots+x_0(a^{-n}-b^{-n})<0,$$

$$\therefore\quad (0.x_{n-1}x_{n-2}\cdots x_0)_a<(0.x_{n-1}x_{n-2}\cdots x_0)_b.$$

$$\therefore\quad a^{-n}(0.x_{n-1}x_{n-2}\cdots x_0)_a<b^{-n}(0.x_{n-1}x_{n-2}\cdots x_0)_b.$$

即 $\dfrac{A_{n-1}}{a^n}<\dfrac{B_{n-1}}{b^n}$.

$$\therefore\quad \frac{x_na^n}{A_{n-1}}>\frac{x_nb^n}{B_{n-1}},\qquad 1+\frac{x_na^n}{A_{n-1}}>1+\frac{x_nb^n}{B_{n-1}},$$

$$\frac{A_{n-1}+x_na^n}{A_{n-1}}>\frac{B_{n-1}+x_nb^n}{B_{n-1}},\qquad \frac{A_n}{A_{n-1}}>\frac{B_n}{B_{n-1}},$$

$$\therefore\quad \frac{A_{n-1}}{A_n}<\frac{B_{n-1}}{B_n}.$$

（此题也可用数学归纳法证明）

习题

1．证明：对任意自然数n，表达式

$$A=2903^n-803^n-464^n+261^n$$

能被1897整除．（匈牙利，1899）

2．证明：如果p是大于1的整数，那么3^p+1不可能被2^p整除．（匈牙利，1909～1911）

3．证明：由5个整数（不必相异）一定可以选取其中3个，使它们的和能够被3整除．（加拿大，1970）

4．设n是正整数，k是不小于2的整数，试证n^k可以表示成n个相继的奇数之和．（上海，1981）

5．设3^{1000}的各位数字之和为m，m的各位数字之和为n，n的各位数字之和为p，问p是多少？

6．数 1978^n 与 1978^m 的最后三位数相等，试求出正整数 n 和 m，使得 $m+n$ 取最小值.这里 $n>m\geqslant 1$．（IMO，1978）

7．求所有能够约简分数 $\frac{5l+6}{8l+7}$ 的约数，其中 l 是整数.（莫斯科，1956）

8．证明：当 x 是自然数时，函数

$$f(x)=\frac{x^5}{5}+\frac{x^4}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x}{30}$$

的值也是自然数.

9．试证：对所有自然数 n，

$$f(n)=\frac{(n+3)^2}{12}-\frac{7}{72}-\frac{(-1)^n}{8}+\frac{2}{9}\cos\frac{2n\pi}{3}$$

都是整数.

10．一数用 p 进位制表示时为 $101\overbrace{1\cdots1}^{n个}101$.已知此数用十进制表示时，对于任何自然数 n，均能被61整除.试求 p 的最小值是多少？

11．求证：任何整系数多项式 $f(x)$ 都不可能同时满足下述二等式：$f(7)=5$，$f(15)=9$.（苏联，大学生，1976）

12．在任意的十个连续整数中，至少有一个与其余九个数都互质.（美国，普特南大学生数学竞赛，1966）

13．若 α 和 β 为正整数，且 $\beta>2$，则 $2^\alpha+1$ 必不能被 $2^\beta-1$ 除尽.（美国数学月刊，40卷，11月）

14．证明：对于任意的整数 $n>1$

$$S_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$$

不是整数.（苏联）

解答

1．提示：$1897=271\cdot 7$，$A=(2903^n-604^n)-(803^n-261^n)$ $=(2903^n-803^n)-(464^n-261^n)$，$2903-604$ 与 $803-261$ 有公约数 271，$2903-803$ 与 $464-261$ 有公约数 7．

2．可证明更强的命题：数 3^n+1 当 n 是偶数时能被 2 整除，当 n 是奇数时能被 2^2 整除，但在任何情况均不能被 2 的更高次幂所整除．提示：若 n 为偶数，则 $3^n\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ 8)$，$3^n+1=2(4a+1)$；若 n 为奇数，则 $3^n\equiv 3\ (\mathrm{mod}\ 8)$，$3^n+1$ $=4(2b+1)$．

3．提示：$(\mathrm{mod}\ 3)$ 时，若 5 个数中有 3 个同余，则其和能被 3 整除；否则必各有 1 数同余于 0，1，2，这三数之和也能被 3 整除．

4．提示：$(2N+1)+(2N+3)+\cdots+(2N+2n-1)=2nN+n^2$．设 $2nN+n^2=n^k$，解得 $N=\dfrac{n(n^{k-2}-1)}{2}$，易证 N 为整数．

5．$P=9$．

6．$m=3$，$n=103$．提示：$1978^m\equiv 1978^n\ (\mathrm{mod}\ 1000)$，$1978^m(1978^{n-m}-1)=N\cdot 2^3\cdot 5^3$，故 $2^3\mid 1978^m\Longrightarrow m$ 的最小值为 3；$5^3\mid 1978^{n-m}-1$，易知 $n-m=4t$，且得 $5^3\mid(-22)^{4t}-1$，$5^3\mid 6^t-1$，由 $6^t=(1+5)^t=1+5t+\dfrac{t(t-1)}{2}\cdot 5^2+K\cdot 5^3$ 解得 $5^3\mid\dfrac{5t(5t-3)}{2}$，$125\mid 5t$，$t$ 的最小值为 25．

7．约数 k 只可能取值 1 或 13（不一定在所有情况下都有 $k=13$）．提示：$k\mid 5l+6$，$k\mid 8l+7\Longrightarrow k\mid 3l+1\Longrightarrow k\mid 2l+5$ $\Longrightarrow k\mid l-4\Longrightarrow k\mid l+9\Longrightarrow k\mid 13$．

8．提示：$f(x)>0$ 显然（$x>0$ 时）．$f(x+1)=f(x)+(1+x)^4$．（也可应用例 12 即推论二）

9．提示：$f(6m+k)=3m^2+(k+3)m+f(k)$，m，

$k\in Z_0$，$0\leqslant k\leqslant 5$．验算知 $f(k)$ 是自然数($k=0,1,\cdots,5$)．

10．$p=14$．提示：$N=(10\overbrace{11\cdots11}^{n个}01)_p=p^{n+3}+p^{n+1}+p^n+\cdots+p^3+p^2+1=p^{n+3}+\dfrac{p^2(p^n-1)}{p-1}+1=(p^2-p+1)\cdot(p^{n+1}+p^n+\cdots+p+1)$，易验算 $p=14$ 是使 p^2-p+1 可被61整除的最小数．

11．提示：因 $a-b\mid f(a)-f(b)$，故若 $15-7\mid f(15)-f(7)$，即 $8\mid 4$，矛盾．

12．提示：连续10个整数中，恰有5个数能被2整除；至多有4个数能被3整除．但其中至多只有2个不是偶数；至多有2个数能被7整除，但也至多只有1个不是偶数；恰有2个数能被5整除，但是仅有1个不是偶数．故在连续10个整数中，不被2，3．5，7中的任一个整除的数．至少有 $10-(5+2+1+1)=1$ 个．这个数便与其余的9个数都互素（须补证）．

13．提示：若 $\alpha<\beta$ 时 $2^\alpha+1<2^\beta-1$．若 $\alpha=\beta$，显然 $2^\beta-1\nmid 2^\alpha+1$．若 $\alpha>\beta$，令 $\alpha=m\beta+n$，则

$$\frac{2^\alpha+1}{2^\beta-1}=\frac{2^\alpha-2^{\alpha-m\beta}}{2^\beta-1}+\frac{2^n+1}{2^\beta-1},$$

右边第2个分数是真分数，第一个分数可化简为整数．

14．提示：（反证）设 k 是具有条件 $2^k\leqslant n$ 的最大整数，T是不超过 n 的所有奇数的乘积，则一切形如 $\dfrac{2^{k-1}T}{l}$ 的数在 $2\leqslant l\leqslant n$ 时，除了一种情况外都不是整数，即除了分母是2的 k 次幂以外，因此，等式 $S_n\cdot 2^{k-1}T=2^{k-1}T+2^{k-2}T+\dfrac{2^{k-1}T}{3}+\cdots+\dfrac{2^{k-1}T}{n}$ 中，左边为整数，右边除1项外全为整数，引出矛盾．

第十章 数字与数谜

数的魅力出奇的大，使得数论在很早以前便成为数学家和学习数学的人所钟爱的学科，很多关于数字的游戏遂流传下来，不少上升成为理论，不少则演变成考题。数谜是数学竞赛中长盛不衰的题材之一。

一、幂的末位数字

幂的末k位数字是最令人感兴趣的内容之一。如前以$f_i(n)$表示n的末i位数，$i=1,2,\cdots$。易得到以下公式：

1° $f_1(2^{4k+r})=f_1(2^r)$，$1\leqslant r\leqslant 4$，$k\in Z_0$；$f_1(2^n)$循环地取2，4，8，6这4个值，$n\in Z^+$。

2° $f_1(3^{4k+r})=f_1(3^r)$，$0\leqslant r\leqslant 3$，$k\in Z_0$；$f_1(3^n)$循环地取3，9，7，1这4个值，$n\in Z_0$。

3° $f_1(7^{4k+r})=f_1(7^r)$，$0\leqslant r\leqslant 3$，$k\in Z_0$；$f_1(7^n)$循环地取7，9，3，1这4个值，$n\in Z_0$。

至于$f_1(5^n)$，$f_1(6^n)$，$f_1(1^n)$，$f_1(4^n)$，$f_1(8^n)$，$f_1(9^n)$，规律易求，由读者自行推导。

若追到$f_2(a^n)$，$f_3(a^n)$，…，我们有如下

定理1：若$f_1(a^n)$的值循环出现，循环节长度为t，则$f_i(a^n)$的值也循环出现，循环节长度为$5^{i-1}t$，其中$i\geqslant 2$，$a\neq 5$，7，$n\geqslant i$，$1\leqslant a\leqslant 9$。若$a=7$，则循环节长度改为$5^{i-2}t$，$i\geqslant 3$，而$f_2(7^n)$的循环节长度仍为4。若$a=1$和5，则循环节长度恒为1。