《数学中的小问题大定理》丛书（第一辑）

格点和面积

闵嗣鹤 著

◎面积的近似计算

◎格点多边形的面积公式

◎重叠原则

◎用有理数逼近无理数

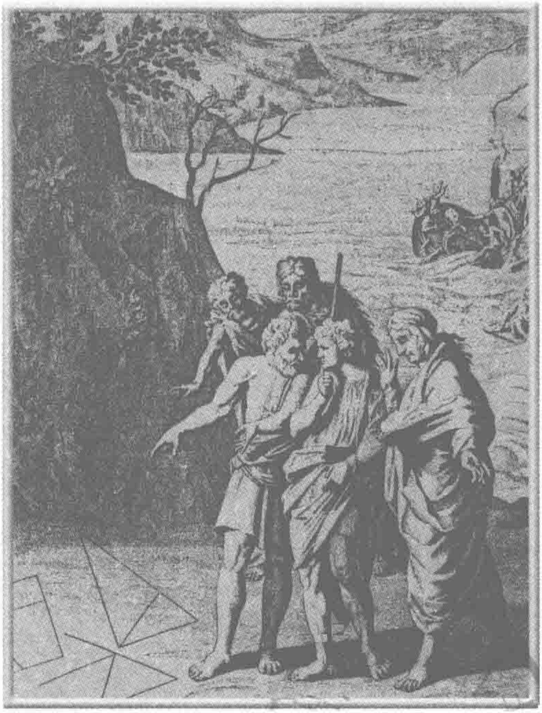
◎数的几何中的基本定理

HITP
哈
HARBIN
版社
PRESS

格点和面积

《数学中的小问题大定理》丛书（第一辑）

闵嗣鹤　著



◎面积的近似计算
◎格点多边形的面积公
◎重叠原则
◎用有理数逼近无理数
◎数的几何中的基本定

HITP
哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内 容 简 介

一张方格纸，上面画着纵横两组平行线，相邻平行线之间的距离都相等，这样两组平行线的交点，就是所谓格点．怎样用格点的个数去计算平面上有限区域的面积，或者反过来，在平面上已知面积的一个有限区域内至少有多少格点，这就是本书所要讨论的问题．本书就是这样围绕着格点和面积这个主题，讲述了数学上一些有用的问题．

本书适合初、高中师生及数学爱好者参考阅读．

图书在版编目（CIP）数据

格点和面积/闵嗣鹤著．——哈尔滨：哈尔滨工业大学出版社，2012.7

ISBN 978-7-5603-3631-2

Ⅰ．①格… Ⅱ．①闵… Ⅲ．①格点问题②面积 Ⅳ．①O123.3

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2012）第 149412 号

策划编辑　刘培杰　张永芹
责任编辑　钱辰琛
封面设计　孙茵艾
出版发行　哈尔滨工业大学出版社
社　　址　哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号　邮编 150006
传　　真　0451-86414749
网　　址　http://hitpress.hit.edu.cn
印　　刷　哈尔滨市石桥印务有限公司
开　　本　787mm×960mm　1/16　印张 6　字数 65 千字
版　　次　2012 年 7 月第 1 版　2012 年 7 月第 1 次印刷
书　　号　ISBN 978-7-5603-3631-2
定　　价　18.00 元

目录

什么是格点

第1章

平常我们用的方格纸，都画着纵横两组平行线，相邻平行线之间的距离总是相等的. 方格纸上两组直线的交点，就是所谓格点.

如果取一个格点做原点 O，如图1，取通过这个格点的横向和纵向两直线分别做横坐标轴 Ox 和纵坐标轴 Oy，并取原来方格纸上相邻平行线之间的距离做单位长，那么，我们就建立了一个坐标系. 这时，前面所说的格点，显然就是纵横两坐标都是整数的那些点. 如图1中的 O,P,Q,M,N 都是格点. 由于这个缘故，我们又把格点叫做整点.

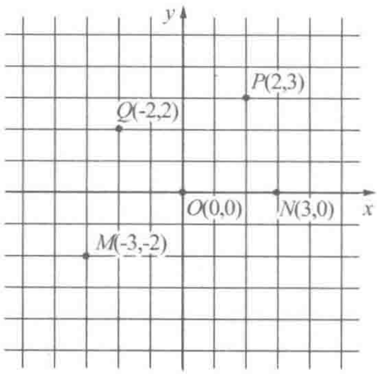


图 1

第2章 我们的中心问题

在这本小册子里所要讨论的问题，都是围绕着格点和面积这个主题的.

在一个平面上，格点有无穷多，但是两个不同格点的距离至少是1，因此，我们说平面上的一个个格点是孤立的或离散的. 在平面上一个有限的区域内(例如某一个圆内)，格点的个数总是一个整数. 格点的个数如果要增加或减少，增加或减少的至少是1个，不会有不到1个的零数. 和这相反，平面上一个区域的面积，常常随着区域边界的微小变动而连续地改变，比如可以改变0.1个单位，或更小如改变0.01个单位，以至0.001个单位，

0.000 1 个单位 …… 因此,我们可以说面积是一种连续的量.

在数学里面,我们有两个很基本的问题,那就是:第一,怎样用连续的量去概括离散的量;第二,怎样用离散的量去逼近连续的量. 这两个问题其实是一个问题的两个方面. 不过,第一个问题着重在利用连续的量去研究或估计离散的量. 这是古老的物理和数学上的问题. 著名的圆内格点问题就属于这一类型. 这问题是:知道了以原点做中心的圆的面积,要估计圆内格点的个数(参看习题一第2题). 近年来,由于电子计算机的长足发展,对于许多离散的量都有了计算的办法,因此,又产生了大量的用离散的量去逼近连续的量的问题. 一个简单的例子就是:怎样用一个区域内的格点数去逼近区域的面积,这也就是本书所要讨论的一个问题.

面积的近似计算

第3章

当我们测量田地、园林、湖沼、岛屿等的面积时，需要种种简便方法来计算面积的近似值. 最常用的有所谓平行线法、方格法和三角法. 这里顺次简单介绍如下：

（一）平行线法 如图2，我们用 $n+1$ 条直线把所求面积分成 n 条，相邻平行线之间的距离都是 d. 为简单起见，我们假定平行线中第1条和第 $n+1$ 条跟所求面积的边界或者相切于一点，或者有一段重合，而其他每一条直线跟面积的边界恰好交于两点. 我们依次用 $l_0,l_1,\cdots,l_{k-1},l_k,\cdots,l_{n-1}$，$l_n$ 表示各平行线和面积相交的一段的长度（可能是0）. 考虑在第k条直线

和第 $k+1$ 条直线之间的面积. 当 d 很小时,这一条面积是和图中梯形 $ABCD$ 的面积很接近的. 因此,我们可以近似地用梯形面积

$$\frac{1}{2}d(l_{k-1}+l_k)$$

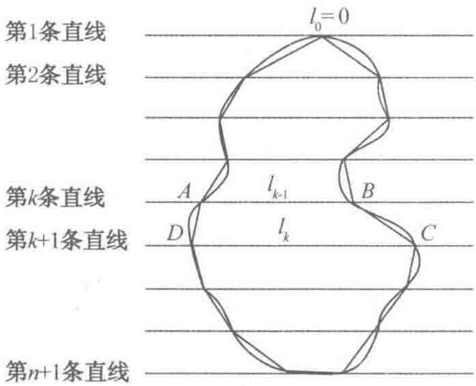


图 2

来代替这一条面积. 特别当 $k=1$ 或 $k=n$ 时,所谓梯形可能退化为三角形. 我们把各条面积的近似值合起来,就得到所求面积(记作 A)的近似值

$$A \approx \frac{1}{2}d(l_0+l_1)+\frac{1}{2}d(l_1+l_2)+\cdots+\frac{1}{2}d(l_{k-1}+l_k)+\cdots+\frac{1}{2}d(l_{n-1}+l_n)$$

即

$$A \approx d\left(\frac{1}{2}l_0+l_1+\cdots+l_{n-1}+\frac{1}{2}l_n\right) \qquad (1)$$

式中"≈"表示近似地相等.

(二) 方格法　在所求面积上,打好方格,如图 3. 假定相邻平行线之间的距离是 d,那么每一方格的面

积就是 d^2. 考虑左下角格点落在所求面积上的小方格的全体,这就是图中画上了斜线的那些小方格. 在一般情形下,当 d 取得很小时,这些小方格面积的和是与所求面积很接近的. 另一方面,每一个这种画了斜线的小方格,和它的左下角格点彼此一一对应. 因此,计算一下落在面积上的格点数(记作 N),就容易得到这种小方格的面积和,它等于 Nd^2. 如果用 A 表示所求面积,那么我们就得到下面的近似公式

$$A \approx Nd^2 \tag{2}$$

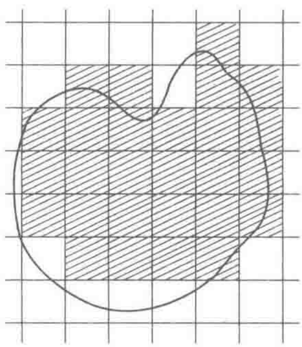


图 3

(三) 三角法　在所求面积的边界上,按一定方向顺次取 $P_1, P_2, \cdots, P_n$,共 n 个点,依次联结成 n 边形 $P_1P_2\cdots P_n$,如图 4. 把这 n 边形用任意方法分成三角形,然后求各三角形的面积和. 我们就可以把所得面积和作为所求面积的近似值. 这种求近似值的方法比较灵活,便于在测量上运用.

以上各种求面积近似值的方法,优点是简便易算,缺点是对于误差,没有给出任何的估计.

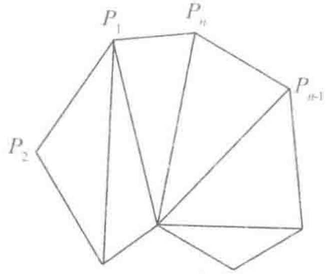


图 4

习 题 一

1. 在果园里种树,相邻两株的距离是 d(图 5 中黑点代表树的位置). 假如园子的面积是 A,证明:果树的株数 N 可以用下面的近似公式表达出来

$$N \approx \frac{4}{\sqrt{3}} \cdot \frac{A}{d^2}$$

这是林学上常用的一个公式.

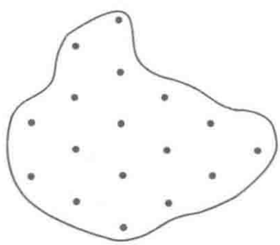


图 5

2. 以原点做中心,R 做半径作圆,把圆内格点数记作 N,证明

$$|\pi R^2 - N| \leqslant 4\sqrt{2}\pi R$$

格点多边形的面积公式

第4章

一个多边形的顶点如果全是格点,这个多边形就叫做格点多边形. 前面用方格法求面积的时候,得到的是近似公式,这个公式的误差还没有估计. 由于格点多边形是比较特殊的多边形,它和格点有更密切的关系,因此,我们提出这样的问题:对于格点多边形,能否建立格点数目和面积之间的精密公式?这个问题如果能够得到肯定的回答,那对于用方格法求面积也是有帮助的. 如图 6,我们作了两个格点多边形:一个包含着所求面积,另一个被含在所求面积的内部. 显然所求面积 A 一定在这两个格点多边形的面积 A_1 和 A_2 之间,即

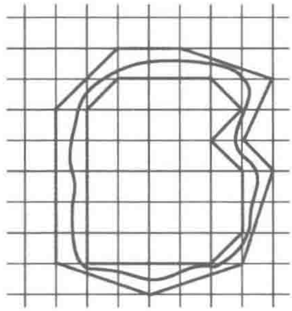


图 6

$$A_1 \leqslant A \leqslant A_2$$

从上式各减去 A_1 和 A_2 的平均值,就得到

$$A_1 - \frac{A_1 + A_2}{2} \leqslant A - \frac{A_1 + A_2}{2} \leqslant A_2 - \frac{A_1 + A_2}{2}$$

即
$$-\frac{A_2 - A_1}{2} \leqslant A - \frac{A_1 + A_2}{2} \leqslant \frac{A_2 - A_1}{2}$$

或
$$\left| A - \frac{A_1 + A_2}{2} \right| \leqslant \frac{A_2 - A_1}{2}$$

这说明:如果我们用所作两个格点多边形面积的平均值作为所求面积的近似值,误差顶多是两个格点多边形面积的差的一半. 这种求面积近似值的方法可以看成是方格法和三角法的结合.

在一般的数学书里面,只讲公式的证明而不讲怎样寻求公式. 这里,为了引起读者钻研问题的兴趣,我们要借助这一个简单的例子 —— 寻求联系格点多边形的面积和格点数的精确关系 —— 说明怎样通过特殊的情形归纳出一般的公式.

为简单起见,我们假定每个小方格的边长 $d = 1$. 首先,我们选择面积和格点数都容易计算的格点多边

形作为具体例子，加以讨论. 例如，边长是 1 或 2 的格点正方形（图 7 中的 $OABC$ 和 $OPQR$），两腰是 1 的格点三角形（图 7 中的 OAB），一腰是 1，一腰是 2 的直角三角形（图 7 中的 OPC），边长是 2 和 4 的格点矩形（图 7 中的 $OLMR$）. 我们把它们的面积 A，内部格点数 N 和边上格点数 L，列成一表如下：

图　形	A	N	L	$A-N$	$\frac{L}{2}$
$OABC$	1	0	4	1	2
$OPQR$	4	1	8	3	4
OAB	$\frac{1}{2}$	0	3	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$
OPC	1	0	4	1	2
$OLMR$	8	3	12	5	6

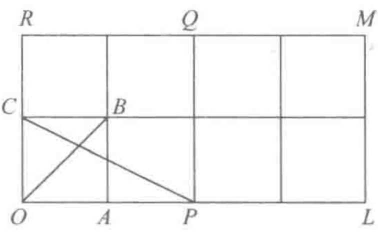


图 7

看过上表的前四列，我们可能感到很失望，A，N，L 之间几乎看不出什么联系来. 不过我们在前面已经看到，当 A 很大时，A 和 N 的差是（相对地说）很小的. 因此，我们在表上添了一列，包含 $A-N$ 的值. 这列数字是随着 L 的增大而增大的. 如果用 2 去除 L，列到最后

一列,我们立刻得到下面的有趣的关系

$$A - N = \frac{L}{2} - 1$$

即

$$A = N + \frac{L}{2} - 1 \tag{3}$$

这就是说,如果我们把边上的每一个格点作为半个来计算,那么,格点数 $N + \frac{L}{2}$ 和面积 A 的差就恰好是 1.

公式(3) 是我们从五个特例归纳出来的,它到底是正确的,还是一种巧合呢?要彻底解决这个问题,当然还要通过严格的证明. 不过,目前我们还应该抱怀疑的态度,再检验一下,理由是我们的五个特例还是既简单又特殊的. 为了容易列表,我们的确应该先选择简单而易于验算的特例,但在归纳出公式以后,就需要找一个更复杂更有代表性的例子,再来验证一下公式的正确性. 例如,我们选择图 8 的四边形 $ABCD$,不难看出,对于这个四边形,我们有

$$A = 15, N = 12, L = 8$$

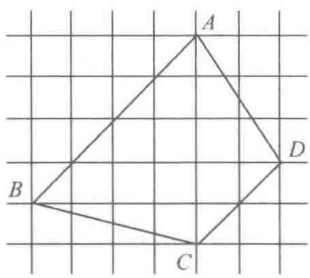


图 8

而
$$15 = 12 + \frac{8}{2} - 1$$

这一个附加的特例,使我们对于公式(3) 的正确性,得到更大的保证. 因此,我们应该进一步考虑怎样去证明这个公式了.