经济数学

JINGJI SHUXUE

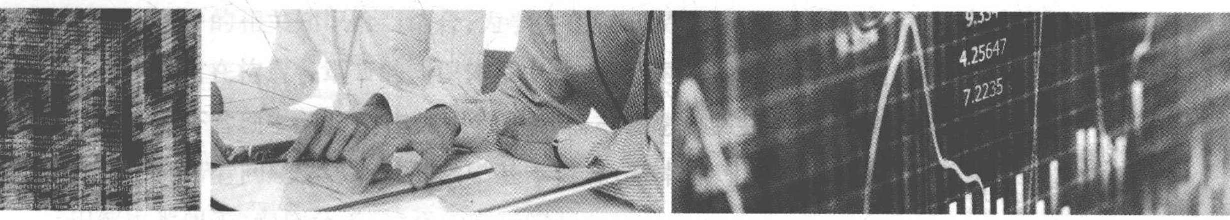
张忠诚◎主编

中国经济出版社
CHINA ECONOMIC PUBLISHING HOUSE

经济数学

JINGJI SHUXUE

张忠诚◎主编



中国经济出版社
CHINA ECONOMIC PUBLISHING HOUSE
·北京·

图书在版编目（CIP）数据

经济数学 / 张忠诚主编.

北京：中国经济出版社，2016.9

ISBN 978-7-5136-4360-3

Ⅰ.①经…　Ⅱ.①张…　Ⅲ.①经济数学—高等职业教育—教材　Ⅳ.①F224

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2016）第 197821 号

策划编辑　伏建全
责任编辑　孙晓霞　孙喆浩
责任审读　贺　静
责任印制　马小宾
封面设计　任燕飞设计工作室

出版发行　中国经济出版社
印 刷 者　北京力信诚印刷有限公司
经 销 者　各地新华书店
开　　本　787mm×1092mm　1/16
印　　张　23.5
字　　数　380 千字
版　　次　2016 年 9 月第 1 版
印　　次　2016 年 9 月第 1 次
定　　价　55.00 元
广告经营许可证　京西工商广字第 8179 号

中国经济出版社 **网址** www.economyph.com **社址** 北京市西城区百万庄北街 3 号 **邮编** 100037

本版图书如存在印装质量问题，请与本社发行中心联系调换（联系电话：010-68330607）

前言

本教材是根据高职高专培养应用型人才的需要，本着以学生发展为本，重能力培养，重知识应用的原则编写而成，可供高职高专院校经济管理类各专业学生使用.

本教材在内容的取舍上尤其注重数学与经济管理的有机结合，强调微积分的概念与有关原理在经济管理中的应用，强调本教材所用的有关经济管理中的概念的严密性和规范性，力求在保持传统高职高专同类教材优点的基础上，将微积分的思想、概念和方法与经济管理中的相关知识恰当结合，为学生在后续课程的学习打下良好的数学基础.

本教材在构造各章节的知识体系中，体现了案例驱动，突出应用的教学思想. 即，用现实和经济管理中的实例作为引例引出基本概念，通过"已知"诱导启发学生理解"未知"，进而带着问题学习相关的数学基本概念、基本原理和基本方法，最后用所学数学知识解决类似于"案例分析"这样的实际问题.

本教材在充分注意到了当前高职高专院校生源变化的特点，学生的认知水平、经济数学的教学需要和教学特点的基础上，设计、安排和组织了全书内容. 在保证数学概念准确的前提下，尽量借助几何直观使得一些抽象的数学概念更形象化，从而引导学生不断发现问题、分析问题、解决问题，在探索问题的过程中主动学习知识、掌握技巧，从而获得成就感，增强自信心.

基于分层教学的需要，以及高职高专不同专业对数学能力的不同要求，教材在内容上设置了必学和选学(带＊号内容)两部分，与之对应的习题也设置了必做和选做(带＊号部分)，可供对数学有较高要求的专业选用，有愿望进一步扩大知识面的学生亦可自学.

基于高职高专学生"专升本"以及部分学有余力同学的需求，本教材每章后设置"拓展提高"环节，并配以相关的自测题(拓展练习). 通过拓展学习内容、拓宽解题思路和介绍解题技巧，可供巩固知识、提高技能.

本教材是编者通力合作的结果：刘蓉执笔第一章，陈艳花执笔第二章和第三章，唐富贵执笔第四章，王燕执笔第五章，张忠诚执笔第六章和第七章并负责全书的框架结构、统稿和定稿.

本教材在编写过程中，自始至终得到了四川商务职业学院人文社科部领导的大力支持和帮助，数学教研室的蒋磊副教授审阅了书稿并提供了很多有益的建议，在此深表感谢．同时感谢中国经济出版社对本书的出版所给予的支持．

限于编者水平和编写时间，教材中难免存在不妥之处，恳请专家、同行和读者不吝指正，我们万分感谢．

编者

2016 年 5 月

目　录

第 1 章　函数、极限与连续

知识学习目标

1. 理解函数的概念和性质，掌握求函数的定义域的方法.

2. 理解基本初等函数、复合函数、初等函数的概念，掌握复合函数的分解.

3. 理解极限的概念，掌握极限的四则运算法则和两个重要极限.

4. 了解无穷小、无穷大和无穷小的比较概念，掌握无穷小的性质及无穷大与无穷小的关系.

5. 理解函数在一点连续的概念，会求间断点和连续区间.

能力培养目标

1. 会用数学的思想、概念、方法消化吸收经济管理问题中的概念和原理；

2. 会利用极限思想解决相关的经济问题；

3. 会利用函数思想构建数学模型解决实际问题.

引例 1　【理财问题】每个人在生活中都会碰到理财问题，和银行打交道便是其中之一. 不管我们走进哪一家银行，都会看到银行的利率表，表 1－1 所示的是 2015 年 8 月中国工商银行利率表.

表 1-1　中国工商银行利率表

种类	存期	年利率%
整存整取	三个月	1.60
	六个月	1.80
	一年	2.00
	二年	2.50
	三年	3.00
	五年	3.05
活期存款		0.35

作为银行储户，请问你能搞清楚以下与理财相关的问题吗？

(1) 如果将 1000 元存入银行，定期 3 个月，到时本利和有多少？

(2) 如果将 10000 元存入银行，定期 3 年和定期 1 年共存三次（保证该笔钱共存满 3 年），哪一种存法更划算？本利和分别有多少？

(3) 如果定期 1 年的 30000 元钱，已在银行存了 45 天，银行通知存款利率上浮为年利率 3.5%，这时你已存入的 30000 元钱是继续存在银行不动还是取出来重新存入？哪一种方案更划算？

问题分析：上述 3 个简单的理财问题，在现实生活中我们会经常碰到，这类问题实际上就是典型的函数问题（因为表格是函数三种表示方法中的一种）. 要解决上述问题，要求我们必须具备相关函数知识，如解析式的求法、函数值的计算、函数值大小比较以及利用函数知识建立常见经济问题中数学模型的能力.

用数学方法解决科学技术和经济管理领域中的实际问题，往往需要建立所涉及的变量间的函数关系. 本章将在中学已有函数知识的基础上，进一步阐明函数的概念与性质以及反函数、复合函数、基本初等函数、初等函数和常见的经济函数，为经济数学的学习打下必要的基础.

1.1　函数

1.1.1　区间与邻域

1.1.1.1　区间

区间是指介于两个数 a 和 b 之间的数的全体组成的集合. 它是微积分中使用较多的

一类数集．它们的记号和定义如下(其中 $a,b \in R$,且 $a < b$)：

开区间 $(a,b) = \{x \mid a < x < b\}$.

闭区间 $[a,b] = \{x \mid a \leqslant x \leqslant b\}$.

半开半闭区间 $[a,b) = \{x \mid a \leqslant x < b\}$，$(a,b] = \{x \mid a < x \leqslant b\}$.

无穷区间 $(a,+\infty) = \{x \mid a < x < +\infty\}$，

$[a,+\infty) = \{x \mid a \leqslant x < +\infty\}$，

$(-\infty,b) = \{x \mid -\infty < x < b\}$，

$(-\infty,b] = \{x \mid -\infty < x \leqslant b\}$，

$(-\infty,+\infty) = \{x \mid -\infty < x < +\infty\} = R$.

注 ①前四个区间也称为有限区间，a,b 分别称为区间的左端点和右端点，$b-a$ 称为区间长度．

② $+\infty$ 和 $-\infty$ 分别读作“正无穷大”和“负无穷大”，它们不表示数值，仅是记号．

今后，如果不需要辨明所讨论的区间是否开、闭或是有限还是无限的场合，我们就简单称为区间，常用 I 表示．

1.1.1.2 邻域

邻域也是微积分中经常用到的一个特殊的开区间．

设 x_0 与 δ 是两个实数，且 $\delta > 0$，则开区间 $(x_0-\delta,x_0+\delta)$ 称为**点 x_0 的 δ 邻域**，记作 $U(x_0,\delta)$，即

$$U(x_0,\delta) = \{x \mid x_0-\delta < x < x_0+\delta\} = \{x \mid |x-x_0| < \delta\}$$

其中，x_0 称为邻域的中心，δ 称为邻域的半径．

若在点 x_0 的 δ 邻域中“挖去”点 x_0，称为**点 x_0 的去心邻域**，记作 $\overset{o}{U}(x_0,\delta)$，即

$$\overset{o}{U}(x_0,\delta) = \{x \mid 0 < |x-x_0| < \delta\}$$

其中，$0 < |x-x_0|$ 表示 $x \neq x_0$.

1.1.2 函数的概念

当我们在考察某个自然现象或考察社会经济活动的过程中，往往出现多个变量，这些变量不是彼此孤立的，而是相互影响和相互制约的，一个量(或一些量)的变化会引起另一个量(或另一些量)的变化．如果这些影响是确定的，是依照某一规则的，那么我们说这些变量之间存在着函数关系．

引例2 【函数的特征】汽车以60千米/小时的速度匀速行驶，那么行驶里程与行驶

时间有什么关系？

问题分析：设行驶里程为 S 千米，行驶时间为 t 小时．由题意，行驶里程与行驶时间有如下关系

$$S = 60t, t > 0$$

可见，只要其中一个变量取定一个值后，另一个变量的值也唯一地确定下来．变量 t 和 S 这种相互依赖关系，就是函数概念的本质．下面给出函数的定义．

1.1.2.1 函数的定义

定义 1.1 设 D 是一个非空实数集，x 和 y 是两个变量，如果对于任意的实数 $x \in D$，变量 y 按照一定的对应法则 f 总有唯一确定的数值与之对应，则称变量 y 为变量 x 的函数，记作 $y = f(x)$. 数集 D 称为该函数的定义域，x 称为自变量，y 称为因变量．

对于 $x_0 \in D$，按照对应法则 f 确定的唯一值 y_0，称为 $y = f(x)$ 在 x_0 处的函数值，记作 $y_0 = f(x_0)$.

当自变量 x 遍取 D 的所有数值时，对应的函数值 $f(x)$ 的全体构成的集合

$$Z = \{y \mid y = f(x), x \in D\}$$

称为函数的值域，记作 Z_f.

一般地，设函数 $y = f(x)$ 的定义域为 D，值域为 Z. 对于值域 Z 中的任一数值 $y \in Z$，在定义域 D 中有唯一确定一个数值 x 与 y 对应且满足关系

$$f(x) = y$$

如果把 y 看作自变量，x 看作函数，按照函数的定义，就得到一个新的函数

$$x = \varphi(y) \, [\text{或} \, x = f^{-1}(y)]$$

这个新函数称为函数 $y = f(x)$ 的反函数．反函数的定义域为 Z，值域为 D. 相对于反函数而言，函数 $y = f(x)$ 称为直接函数．

习惯上，总是用 x 表示自变量，y 表示因变量，因此，$y = f(x)$ 的反函数常改写为 $y = f^{-1}(x)$.

注　根据函数的定义，决定一个函数有两个因素，一是定义域 D，二是对应法则 f. 两个函数相同，指的是二者具有相同的定义域，并且对于定义域中的每一个取值，两个函数都有相同的函数值，否则这两个函数为不同的函数．

例题讲解

例 1 求下列函数的定义域．

(1) $y = \dfrac{3}{5x^2 + 2x}$　　　　(2) $f(x) = \lg(1 - x) + \sqrt{x + 4}$

解:(1)要使函数有意义,需满足 $5x^2 + 2x \neq 0$

$$x(5x + 2) \neq 0 \Rightarrow x \neq 0 \text{ 或 } x \neq -\frac{2}{5}$$

所以该函数的定义域为 $D = \left(-\infty, -\dfrac{2}{5}\right) \cup \left(-\dfrac{2}{5}, 0\right) \cup (0, +\infty)$

(2)要使函数有意义,需满足 $\begin{cases} 1 - x > 0 \\ x + 4 \geqslant 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < 1 \\ x \geqslant -4 \end{cases}$

所以该函数的定义域为 $D = [-4, 1)$.

例 2　已知函数 $f(x + 1) = x^2 - x + 1$,求 $f(x)$.

解:令 $x + 1 = t$,则 $x = t - 1$.

$f(t) = (t - 1)^2 - (t - 1) + 1 = t^2 - 3t + 3$,于是 $f(x) = x^2 - 3x + 3$

例 3　判断下列函数是否相同.

(1) $f(x) = |x|, g(x) = \sqrt{x^2}$　　　　(2) $f(x) = \lg x^2, g(x) = 2\lg x$

解:(1)因为 $f(x)$ 和 $g(x)$ 定义域均为 $(-\infty, +\infty)$,且对应法则相同,所以它们是相同的函数.

(2)因为 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$,而 $g(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$,所以它们不是相同的函数.

1.1.2.2　函数的表示方法

(1)解析法

用一个等式来表示两个变量之间的关系的方法,称为解析法. 例如,上面三个例题都是解析法.

(2)列表法

列出表格来表示两个变量之间的关系的方法,称为列表法. 例如引例 1 的银行利率表以及以前学过的三角函数表等.

(3)图像法

用函数图像来表示两个变量之间的关系的方法,称为图像法. 例如二次函数图像等.

1.1.2.3　函数的性质

在中学阶段,我们已经学习了函数的几个简单性质. 现在我们重新来认识这些性质

并引入一个新的性质,即有界性.

(1)奇偶性

定义 1.2 设函数 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称(若 $x \in D$,则 $-x \in D$). 如果对于函数定义域内的任意一个 x,即 $x \in D$,都有

$f(-x) = -f(x)$,则称函数 $y = f(x)$ 是**奇函数**;

$f(-x) = f(x)$,则称函数 $y = f(x)$ 是**偶函数**;

若 $f(-x) \neq f(x)$ 且 $f(-x) \neq -f(x)$,则函数 $f(x)$ 既不是奇函数又不是偶函数,称为**非奇非偶函数**.

注 奇函数的图像关于原点对称,偶函数的图像关于 y 轴对称.

(2)单调性

定义 1.3 设有函数 $y = f(x)$ 在区间 (a,b) 内有定义,对任意的 $x_1, x_2 \in (a,b)$,如果当 $x_1 < x_2$ 时,恒有 $f(x_1) < f(x_2)$ 成立,则称函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内单调增加,区间 (a,b) 称为单调增区间.

如果当 $x_1 < x_2$ 时,恒有 $f(x_1) > f(x_2)$ 成立,则称函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内单调减少,区间 (a,b) 称为单调减区间.

例如, $y = x^2$ 在 $(0, +\infty)$ 上是单调增加的函数,在 $(-\infty, 0)$ 上是单调减少的函数.

(3)周期性

定义 1.4 设 T 为一个不为零的常数,如果函数 $y = f(x)$ 对于任意的 $x \in D$,都有 $x + T \in D$,且 $f(x+T) = f(x)$,则称函数 $y = f(x)$ 是**周期函数**,使上述关系式成立的最小正数 T,称为函数的周期.

例如, $y = \sin x$ 是周期为 2π 的周期函数, $y = \cos 2x$ 是周期为 π 的周期函数.

(4)有界性

定义 1.5 设函数 $y = f(x)$ 在区间 I 内有定义,如果存在一个正数 M, 使得对任意 $x \in I$,恒有 $|f(x)| \leqslant M$ 成立,则称 $y = f(x)$ 在区间 I 上有界,否则称 $y = f(x)$ 在区间 I 上无界.

注 ①有界函数表示的曲线在几何上夹在两条水平线之间;

②有界函数还有上有界和下有界之分,有界函数必是有上界和下界.

例如,函数 $y = \sin x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内有界;函数 $y = \dfrac{1}{x}$ 在 $(1,2)$ 内有界,在 $(0,1]$ 上是无界的.

可见,有界性与区间有关,它是函数的一个局部性质.

例题讲解

例 4 判断下列函数的奇偶性.

(1) $f(x)=x+\sin x$　　(2) $f(x)=x^2-1$　　(3) $f(x)=x^3+2$

解:(1) $D=(-\infty,+\infty)$,因为

$$f(-x)=-x+\sin(-x)=-x-\sin x=-(x+\sin x)=-f(x)$$

所以该函数是奇函数.

(2) $D=(-\infty,+\infty)$,因为 $f(-x)=(-x)^2-1=x^2-1=f(x)$,所以该函数是偶函数.

(3) $D=(-\infty,+\infty)$,因为 $f(-x)=(-x)^3+2=-x^3+2$,它既不等于 $-f(x)$,也不等于 $f(x)$,所以该函数是非奇非偶函数.

1.1.3 初等函数

1.1.3.1 基本初等函数

以下六类函数统称为基本初等函数:

(1) 常数函数 $y=C$;

(2) 幂函数 $y=x^\alpha$(α 是常数);

(3) 指数函数 $y=a^x(a>0,a\neq1)$;

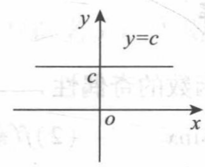
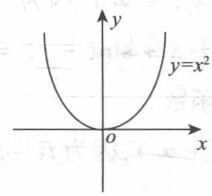
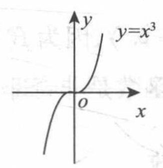
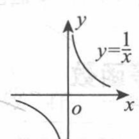
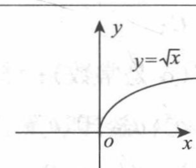
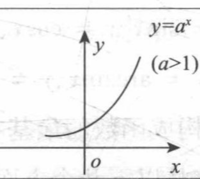
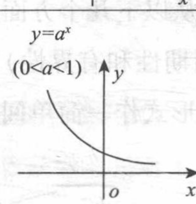
(4) 对数函数 $y=\log_a x(a>0,a\neq1)$;

(5) 三角函数 $y=\sin x$、$y=\cos x$、$y=\tan x$、$y=\cot x$、$y=\sec x$、$y=\csc x$;

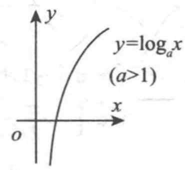
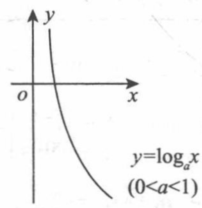
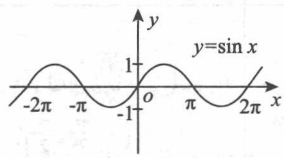
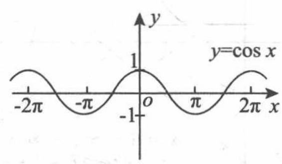
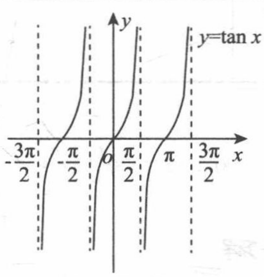
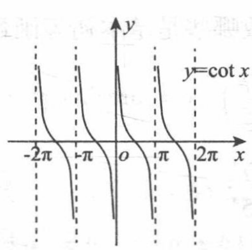
(6) 反三角函数 $y=\arcsin x$、$y=\arccos x$、$y=\arctan x$、$y=\mathrm{arccot}\, x$.

基本初等函数是构成函数的最基本单位,其中绝大多数我们在中学已经学习过. 要掌握好有关函数,应该从以下几个方面进行分析和讨论:两个域(定义域和值域),四个性质(奇偶性、单调性、周期性和有界性)以及图形上的特殊点等. 在这里我们归纳了它们的基本形态,以列表的形式作一简单回顾.

表 1－2　基本初等函数的图形和性质

名称	表达式	定义域与值域	图形	特性
常数函数	$y=c$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in\{c\}$		图形是平行于 x 轴截距为 c 的一条直线
幂函数	$y=x^2$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in[0,+\infty)$		偶函数 在 $(-\infty,0)$ 内单调减少，在 $[0,+\infty)$ 内单调增加
	$y=x^3$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in(-\infty,+\infty)$		奇函数 单调增加
	$y=x^{-1}$	$x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ $y\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$		奇函数 在 $(-\infty,0)$ 内单调减少 在 $(0,+\infty)$ 内单调减少
	$y=x^{\frac{1}{2}}$	$x\in[0,+\infty)$ $y\in[0,+\infty)$		单调增加
指数函数	$y=a^x$ $(a>1)$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in(0,+\infty)$		单调增加
	$y=a^x$ $(0<a<1)$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in(0,+\infty)$		单调减少

续表

名称	表达式	定义域与值域	图形	特性
对数函数	$y=\log_a x$ $(a>1,a\neq 1)$	$x\in(0,+\infty)$ $y\in(-\infty,+\infty)$		曲线过$(1,0)$，当$a>1$时，单调增加
	$y=\log_a x$ $(0<a<1)$	$x\in(0,+\infty)$ $y\in(-\infty,+\infty)$		曲线过$(1,0)$，当$0<a<1$时，单调减少
三角函数	$y=\sin x$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in[-1,1]$		奇函数，周期2π，有界
	$y=\cos x$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in[-1,1]$		偶函数，周期2π，有界
	$y=\tan x$	$x\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2}(k\in Z)$ $y\in(-\infty,+\infty)$		奇函数，周期π
	$y=\cot x$	$x\neq k\pi(k\in Z)$ $y\in(-\infty,+\infty)$		奇函数，周期π