

高等学校教材

高等数学

Advanced Mathematics

上册

■ 主编 费祥历 亓 健

高等教育出版社

高等学校教材

高等数学

Advanced Mathematics

上册

■ 主编 费祥历 元 健

高等教育出版社·北京

内容简介

本书共 12 章,分上、下两册出版。上册是第 1—6 章,包括函数与极限、一元函数的导数与微分、微分中值定理与导数的应用、不定积分、定积分及其应用和微分方程与差分方程初步。下册是第 7—12 章,包括空间解析几何与向量代数、多元函数微分学、数量值函数的积分学、向量值函数的积分学、无穷级数和微分方程(续)。上册部分的微分方程是利用一元函数微积分方法求解的微分方程,方便与大学物理等其他课程衔接。下册部分的微分方程(续)是利用多元函数微分法、无穷级数理论求解的微分方程。空间解析几何放在下册可以和多元函数微积分理论形成一个整体。

每章的复习题是对本章内容进行问题式复习,总习题是综合性较强的练习题,后面的选读内容,一是进一步体现数学的应用,二是向读者适度开放了解现代数学的窗口,可作为研究性教学的拓展知识案例。

本书可作为高等学校理工类、经管类专业高等数学课程的教材,也可供其他专业及学习高等数学的读者阅读。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学.上册/费祥历,亓健主编.--北京:

高等教育出版社,2015.8

ISBN 978-7-04-043087-5

I. ①高… II. ①费… ②亓… III. ①高等数学-高等学校-教材 IV. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 135044 号

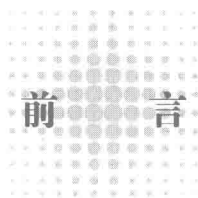
策划编辑	于丽娜	责任编辑	于丽娜 高 丛	封面设计	张申申	版式设计	杜微言
插图绘制	杜晓丹	责任校对	刘丽娟	责任印制	韩 刚		

出版发行	高等教育出版社	咨询电话	400-810-0598
社 址	北京市西城区德外大街 4 号	网 址	http://www.hep.edu.cn
邮政编码	100120		http://www.hep.com.cn
印 刷	保定市市中画美凯印刷有限公司	网上订购	http://www.landraco.com
开 本	787mm×960mm 1/16		http://www.landraco.com.cn
印 张	27.5	版 次	2015 年 8 月第 1 版
字 数	500 千字	印 次	2015 年 8 月第 1 次印刷
购书热线	010-58581118	定 价	35.60 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换

版权所有 侵权必究

物 料 号 43087-00



高等数学是大学理工科及经济管理类各专业的重要基础课。高等数学的主要研究对象是连续变量,研究内容是函数的微观性质和宏观性质,主要有函数的极限、连续、变化率、逼近以及函数的各类积分。高等数学的思想方法能使我们从变化的、辩证的观点养成逻辑思维、量化思维、模型思维的数学素养。高等数学的内容十分丰富,思想方法十分深邃,通过高等数学的学习,为我们进一步学习理工科专业课打下坚实的知识基础。

高等数学的核心思想已成为现代科学技术不断创新的重要源泉,比较中外高等数学教材,其核心知识点差异不大。但是,作为教材,从内容的逻辑次序、叙述方式、例题和练习选择等方面,其编写指导思想各有特色。

本教材按照教育部高等学校大学数学课程教学指导委员会颁布的 2014 年版《大学数学课程教学基本要求》,由费祥历、亓健编写。教材的前身是 2000 年中国石油大学出版社出版的《高等数学》,由费祥历、马铭福和刘奋编写,2008 年由费祥历、马铭福和亓健修订为第三版。本教材经过两次修订,一直使用至今,第二版曾于 2008 年获得山东省高等学校优秀教材一等奖。本次编写的指导思想与此前版本基本一致,但对整体内容作了较大幅度的修改,从概念的引入、定理的叙述、例题的选择等方面,着重体现研究性、探索性和自主性学习的理念。和一些弱化不定积分计算的教材比较,本教材保持了不定积分教学应有的高度。我们认为,不定积分计算是定积分计算和微分方程求解的基础,不定积分的计算对学生解题能力、逻辑思维能力的训练类似于平面几何证明题对学生逻辑思维能力的训练。教材中大量图形借助数学软件 Mathematica 画出,读者可以从图形格式上看起来。Mathematica 等数学软件功能强大,是学习、科研和工程设计的得力工具,读者可以自主学习掌握。

中国石油大学作为能源行业国家重点大学,历来十分重视基础课教学及教材建设,把高等数学课程教材列为学校“十五”“十一五”和“十二五”规划教材。教材的研究伴随着教学改革的步伐,是一个持续的过程。从事高等数学教学的教师,包括金贵荣、吕炜、张丹青副教授,付红斐、纪凤辉、王健、智红燕、李锋杰、侯英敏、许晓婕、陈晓静、左文杰、吴瑞华、邢丽丽、陈永刚、孙建国、李小平、江玲玲、李红芳、张会娜、排新颖、黄玲玲、赵旭波、于娟、王娟、梁锡军博士,吴淑君、张艳华、刘珊、王静、石丽娜、张海军、李磊、吕川、胡哲等青年教师,他们在教学实践

中一直参与教材建设和研究工作。

本书在编写过程中参考了大量的国内外教材和教学研究成果,未一一列出,高等教育出版社于丽娜编辑对本教材的编写花费了大量精力,借此一并表示感谢。

限于编写者水平和理念的不同,书中不当之处在所难免,敬请同行和读者批评指导,以利改进。

编 者

2015 年 3 月



绪论	1
0.1 数学的发展概况	1
0.2 高等数学的基本内容和思想方法	3
0.3 学习高等数学过程中应该注意的一些问题	6
第 1 章 函数与极限	8
1.1 函数的概念及其初等性质	8
1.1.1 集合	8
1.1.2 常量 变量 函数	11
1.1.3 函数的初等性质	15
1.1.4 函数的初等运算	18
1.1.5 基本初等函数与初等函数	21
1.1.6 函数关系的建立	28
习题 1.1	31
1.2 数列极限	33
1.2.1 数列的概念	33
1.2.2 数列极限的概念	34
1.2.3 收敛数列的性质	38
1.2.4 数列收敛的判别法	40
习题 1.2	44
1.3 函数极限	45
1.3.1 函数极限的概念	45
1.3.2 函数极限的性质	52
1.3.3 收敛判别法与两个重要极限	54
习题 1.3	58
1.4 无穷小与无穷大	60
1.4.1 无穷小及其性质	60
1.4.2 无穷小阶的比较	62
1.4.3 无穷大及其性质	64

习题 1.4	66
1.5 函数的连续性	67
1.5.1 函数的连续与间断	67
1.5.2 连续函数的运算	71
* 1.5.3 函数的一致连续性	73
习题 1.5	74
1.6 闭区间上连续函数的性质	75
习题 1.6	78
复习题一	79
总习题一	79
选读 经济学中常用函数	81
第 2 章 一元函数的导数与微分	84
2.1 导数的概念	84
2.1.1 导数概念的实例	84
2.1.2 导数的定义	86
2.1.3 可导与连续的关系	89
2.1.4 求导数举例	91
习题 2.1	94
2.2 导数的计算	95
2.2.1 导数的四则运算	96
2.2.2 反函数的导数	98
2.2.3 复合函数的求导法则	99
2.2.4 初等函数的求导	101
习题 2.2	103
2.3 高阶导数	104
2.3.1 高阶导数的概念	104
2.3.2 高阶导数的计算	105
2.3.3 高阶导数的运算法则	107
习题 2.3	109
2.4 几种特殊类型函数的求导方法	110
2.4.1 隐函数的求导法	110
2.4.2 对数求导法	113
2.4.3 由参数方程所确定的函数的导数	114

2.4.4 相关变化率	117
习题 2.4	118
2.5 函数的微分与线性逼近	119
2.5.1 微分的概念	119
2.5.2 微分的几何意义	121
2.5.3 微分的计算	123
2.5.4 函数的一阶线性逼近	125
习题 2.5	128
复习题二	129
总习题二	130
选读 导数在经济分析中的应用(I): 边际与弹性	131
第 3 章 微分中值定理与导数的应用	135
3.1 微分中值定理	135
3.1.1 罗尔定理	135
3.1.2 拉格朗日中值定理	138
3.1.3 柯西中值定理	141
习题 3.1	143
3.2 洛必达法则	144
3.2.1 $x \rightarrow x_0$ 时的 $\frac{0}{0}$ 型未定式的洛必达法则	144
3.2.2 $x \rightarrow x_0$ 时的 $\frac{\infty}{\infty}$ 型未定式的洛必达法则	146
3.2.3 其他类型的未定式	148
习题 3.2	152
3.3 泰勒公式与函数的高阶多项式逼近	153
3.3.1 泰勒公式	153
3.3.2 麦克劳林公式	158
习题 3.3	161
3.4 函数的单调性与凸性	162
3.4.1 函数的单调性的判别法	162
3.4.2 函数凸性的判别法	165
习题 3.4	170
3.5 函数的极值与最值的求法	170
3.5.1 函数极值的求法	170

3.5.2 函数的最值的计算	174
习题 3.5	177
3.6 弧微分 曲率 函数作图	178
3.6.1 弧微分	178
3.6.2 曲率及其计算	179
3.6.3 曲线的渐近线	183
3.6.4 函数图形的描绘	184
习题 3.6	186
复习题三	187
总习题三	188
选读 导数在经济分析中的应用(Ⅱ):管理与决策	189
第 4 章 不定积分	193
4.1 不定积分的概念和性质	193
4.1.1 原函数的概念	194
4.1.2 不定积分的概念	194
4.1.3 不定积分的性质	196
4.1.4 基本积分公式	197
习题 4.1	200
4.2 换元积分法	201
4.2.1 第一类换元法	202
4.2.2 第二类换元法	207
习题 4.2	213
4.3 分部积分法	216
习题 4.3	222
4.4 几种特殊类型函数的积分	222
4.4.1 有理函数的积分	223
4.4.2 三角函数有理式的积分	226
4.4.3 简单无理函数的积分	229
4.4.4 积分表的使用	230
习题 4.4	232
复习题四	233
总习题四	234
选读 函数迭代与混沌	236

第 5 章 定积分及其应用	240
5.1 定积分的概念和性质	240
5.1.1 几个例子	240
5.1.2 定积分的定义	243
5.1.3 定积分的性质	245
习题 5.1	250
5.2 牛顿-莱布尼茨公式	251
5.2.1 积分上限函数	252
5.2.2 牛顿-莱布尼茨公式	254
习题 5.2	257
5.3 定积分的计算	259
5.3.1 定积分的换元积分法	260
5.3.2 定积分的分部积分法	265
* 5.3.3 定积分的近似算法	268
习题 5.3	272
5.4 反常积分	273
5.4.1 积分区间为无穷区间的反常积分	274
5.4.2 无界函数的反常积分	277
* 5.4.3 反常积分的判别法	279
5.4.4 Γ 函数与 B 函数	281
习题 5.4	284
5.5 定积分在几何上的应用	285
5.5.1 建立定积分模型的微元法	285
5.5.2 平面图形的面积	286
5.5.3 体积	292
5.5.4 平面曲线的弧长	296
* 5.5.5 旋转体的侧面积	299
习题 5.5	301
5.6 定积分在物理上的应用	302
5.6.1 变力做功	302
5.6.2 水压力	305
5.6.3 引力	307
5.6.4 函数的平均值	308

习题 5.6	309
复习题五	310
总习题五	311
选读 积分学在经济分析中的应用:总量与贴现	314
第 6 章 微分方程与差分方程初步	318
6.1 微分方程的基本概念	318
习题 6.1	322
6.2 一阶微分方程	323
6.2.1 可分离变量的微分方程	323
6.2.2 齐次微分方程	325
6.2.3 一阶线性微分方程	329
6.2.4 伯努利方程	333
* 6.2.5 里卡蒂方程与初值问题解的存在唯一性	334
习题 6.2	335
6.3 可降阶的二阶微分方程	337
6.3.1 $y''=f(x)$ 型方程	337
6.3.2 $y''=f(x, y')$ 型方程	338
6.3.3 $y''=f(y, y')$ 型方程	340
习题 6.3	342
6.4 二阶线性微分方程	343
6.4.1 二阶线性微分方程解的性质与通解的结构	343
* 6.4.2 二阶线性非齐次微分方程的常数变易法	345
6.4.3 二阶常系数线性齐次微分方程的解法	346
6.4.4 二阶常系数线性非齐次微分方程的解法	349
习题 6.4	354
6.5 微分方程的应用举例	355
习题 6.5	367
6.6 简单差分方程及其应用	368
6.6.1 差分方程的一般概念	368
6.6.2 一阶和二阶常系数线性差分方程的解法	370
6.6.3 差分方程的应用	374
习题 6.6	377
复习题六	378

总习题六	378
选读 文物年代的鉴定	380
附录 I 高等数学常用数学名词英文注释	382
附录 II 几种常用的曲线	386
附录 III 积分表	389
习题答案	400

绪论

四大文明古国中国、古印度、古埃及,古巴比伦都是古代数学发达的国家,3000年前,周公制礼“礼、乐、射、御、书、数”,数学就是贵族子弟必修科目之一。在现代学校教育体系中,无论中外我们都要花大量时间学习数学,在大学要学高等数学,那么高等数学研究什么样的问题,与初等数学有何不同之处?在学习过程中需要注意哪些事项?在深入学习高等数学之前,我们首先对数学的发展历程做一个简单的回顾,对高等数学的概貌有一个总体了解,根据教学经验谈一些学习高等数学的思想方法,相信这些内容会对学好这门课程有些帮助。

0.1 数学的发展概况

数学的发展过程与生产实践和科技进步的需要是密切相关的.根据不同时期数学所具有的不同特点,数学的发展大致可分为五个阶段:

数学的萌芽时期(远古时代—公元前6世纪).人类在与大自然的相处及漫长的劳动过程中,由于记录收获物品的数量、比较货物交换多少的需要而结绳计数或屈指指数,逐步形成整数的概念,建立了简单的运算,产生了几何上的一些简单知识.这一时期的数学知识是零碎的,没有命题的证明和演绎推理.

常量数学时期(公元前6世纪—17世纪上半叶).随着劳动技能的提高、智慧的增加和知识的积累,数学从具体、实用的阶段逐步形成了能解决大量实际问题的、比较系统的知识体系及比较抽象的、有独立的演绎系统的学科.中算的《九章算术》与西算的《几何原本》是这一时期产生的具有深远影响的代表作.现在中学数学的主要内容本质上是这一时期的产物.

变量数学时期(公元17世纪上半叶—19世纪20年代).欧洲资本主义的蓬勃发展,机械化大工业生产,航海、军事、天文研究等促使欧洲数学进入了一个繁荣时期,产生了笛卡儿的解析几何,牛顿、莱布尼茨的微积分,围绕微积分的理论及应用发展起来了一大批数学分支.数学研究的对象和方法发生了根本的改观.恩格斯说:“在一切理论成就中,未必再有什么像17世纪下半叶微积分的发明那样被看作人类精神的最高胜利了.”

近代数学时期(19世纪20年代—20世纪40年代).数学进入了迅猛发展的历史阶段.微积分的基础的严格化、近世代数的问世、数学公理化、非欧几何的诞

生、集合论的创立,都是典型成就.空前的创造精神和严格化思想是这一时期数学发展的主要特点.高等数学及复变函数论、线性代数、概率统计等现行理、工科大学必修的这些数学课程基本上形成并严格化于 17 世纪中叶至 20 世纪上半叶.

现代数学时期(20 世纪 40 年代—现在).原子能的发现、空间技术的发展、电子计算机的发明、生命科学的复兴以及经济理论的成功应用都与数学的发展息息相关,也极大地促进了数学的发展.拓扑学、泛函分析、模糊数学、控制论、分形几何学、混沌理论等一批新兴数学分支产生、发展并得到广泛应用.这些理论已经进入本科高年级及研究生的学位课程中.数学分支间的相互渗透、数学与其他学科的相互渗透、电子计算机与数学的结合是当代数学的三个特点.

中国的科学技术与传统数学在 14 世纪前一直处于世界领先地位.但是由于封建专制、八股取士、清代自雍正起实行闭关锁国政策等社会原因,以及中国数学重实用而轻理论,没有形成严密的演绎体系,缺乏记录公式的简洁符号,过分依赖于算具等自身的弱点,中国数学逐渐脱离了世界数学的主流.在 16 世纪以后西方数学迅速赶上并超过中国.虽然在 17 世纪徐光启与意大利传教士利玛窦就已经把欧几里德的《几何原本》前 6 卷等一些数学著作翻译引入了中国,后来 19 世纪下半叶由李善兰和华蘅芳把《几何原本》的后 9 卷,以及一批近代西方数学,如代数学、微积分、概率论、三角学等也作了翻译介绍,并创造了大批至今还在使用的数学名词,如点、直线、直角、微分、积分、函数等,但是这些数学知识传播不广,没有使中国数学落后的局面有多大改变.清末民初一大批学子出国留学,他们回国后开创了中国数学研究的新局面.现在,中国数学在某些领域已处在世界数学的前沿,但是在整体上仍处在相对落后的地位.

数学的发展历史告诉我们,数学是与国家科学技术、生产力的发展密不可分的,今日数学之应用更是无处不在.日常生活、军事安全、经济运行等方方面面都离不开数学,以计算机应用为特征的当代科学技术本质上是一种数学技术.

作为一门课程的高等数学,其主要目的是:为其他课程提供必要的数学知识;培养学生的抽象思维、逻辑推理、科学计算、空间想象以及分析问题和解决问题等方面的能力,在这些能力的培养方面,数学的作用是其他学科无法替代的;数学有深刻的文化内涵,较高的数学素养是现代公民不可或缺的.数学既是物质文明的推进剂,也是精神文明的组成部分.在学习过程中,对人们的真理观、道德观、审美意识、辩证思维品质都有潜在的巨大影响.数学家追求真理、自甘寂寞、乐于奉献、不畏艰难的勇气和情操会激励我们去克服前进中的各种困难.

0.2 高等数学的基本内容和思想方法

高等数学的基本内容包括四个部分:

微积分学 是高等数学的核心,研究函数的连续性以及导数、微分、积分的概念、性质和应用.

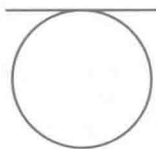
常微分方程 是用微积分方法研究实际问题的纽带和桥梁,研究微分方程解的性质及解的求法.

向量代数与空间解析几何 研究向量的概念及运算,并以向量为工具,研究空间的曲线、曲面的代数描述及函数的几何表示,是平面解析几何的推广.

无穷级数 是有限求和的推广,研究级数的收敛性及函数的展开问题.

高等数学与初等数学的主要区别在于研究的对象和研究的方法上的不同.初等数学研究的是规则、平直的几何对象和均匀、有限过程的常量;高等数学主要研究的是不规则、弯曲的几何对象和非均匀、无限过程的变量.下面以列表对照的形式说明二者的区别与联系.

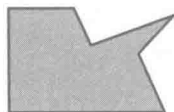
初等数学



圆的切线



折线的长度



多边形的面积

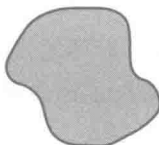
高等数学



一般曲线的切线



一般曲线弧的长度



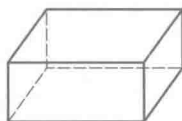
不规则边界图形的面积



圆的中心



一般区域的形心



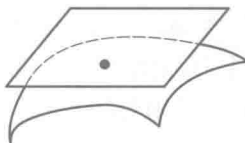
多面体的表面积、体积



不规则立体的表面积、体积



球面的切平面



一般曲面的切平面



均匀、规则物体的质量、重心

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

有限项求和



不均匀、不规则物体的质量、重心

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$$

无穷多项求和

下面三个例子大体上体现了高等数学的思想方法.

例 1 (瞬时速度) 自由落体的路程公式是

$$s = \frac{1}{2}gt^2.$$

取 g 的近似值为 10 m/s^2 , 求落体在 t_0 时的瞬时速度 (见图 0-1).

按人们的直觉, 在 t_0 时的速度与从 t_0 起始的一个很短时间段内的平均速度应该很接近, 设这个时间段为 h , 得平均速度

$$\bar{v} = \frac{\frac{1}{2}g(t_0+h)^2 - \frac{1}{2}gt_0^2}{h} = t_0g + \frac{1}{2}gh. \quad (0-1)$$

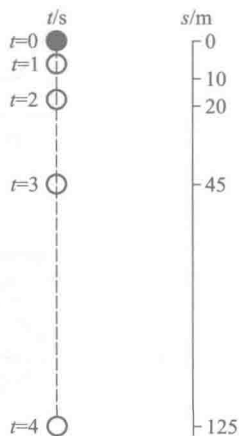


图 0-1

从(0-1)式可看出,平均速度随着 h 的变化而变化.对每个 $h>0$, $\bar{v}$ 都是瞬时速度 v 的一个近似值, h 越小,近似程度越好,要达到精确,应该让 h 无限接近于0,这时 $\bar{v}$ 无限接近于常数 t_0g . t_0g 就可作为落体在 t_0 时的瞬时速度.

取 $t_0=2$,取一串逐渐变小的 h ,计算得 $\bar{v}$ 见表0-1,从中可看出 $\bar{v}$ 越来越接近常数20,20就是落体在 $t=2$ 时的瞬时速度.

表 0-1

h/s	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}	10^{-5}
$\bar{v}/(\text{m} \cdot \text{s}^{-1})$	20.5	20.05	20.005	20.000 5	20.000 05

例 2(面积问题) 现代工程技术经常要求计算一些不规则图形的面积.下面来计算一个由曲线 $y=x^2$, x 轴及直线 $x=1$ 围成的平面曲边梯形的面积(见图0-2).

问题的困难所在是一条边是曲边.我们尝试把图形用平行于 y 轴的直线分成几个小长条(为方便起见,按等间隔形式分),设直线与 x 轴交点

为 $x_i = \frac{i}{n}$ ($i=1, 2, \dots, n-1$).把立在小区间 $[x_{i-1}, x_i]$ ($i=1, 2, \dots, n$)上的小曲边形用底长为 $\frac{1}{n}$,高为

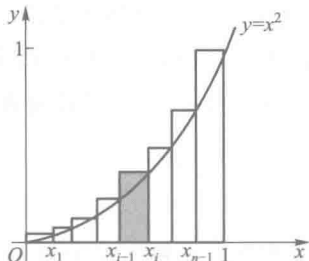


图 0-2

$\left(\frac{i}{n}\right)^2 = y_i$ 的小长方形代替,得小长条面积近似值为 $\left(\frac{i}{n}\right)^2 \frac{1}{n}$,整个图形面积近似值为

$$\begin{aligned}
 S_n &= \left(\frac{1}{n}\right)^2 \frac{1}{n} + \left(\frac{2}{n}\right)^2 \frac{1}{n} + \dots + \left(\frac{n}{n}\right)^2 \frac{1}{n} \\
 &= \frac{1}{n^3} (1^2 + 2^2 + \dots + n^2) \\
 &= \frac{1}{n^3} \cdot \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1) = \frac{1}{3} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2}.
 \end{aligned} \quad (0-2)$$

根据我们的数学经验与直观分析,随着分点 n 的增加,近似值 S_n 将越来越接近曲边梯形的面积精确值,从下面的表0-2看出,这个值应该是 $\frac{1}{3}$.