子流形理论与应用丛书

Reilly型泛函的变分法研究

A Variational Approach to Reilly Type Functional

□ 刘进 王广 著

国防科技大学出版社
National University of Defense Technology Press

子流形理论与应用丛书

Reilly型泛函的变分法研究

A Variational Approach to Reilly Type Functional

刘进　王广　著

国防科技大学出版社
湖南长沙

内容简介

本书在泛函层面系统地用变分理论对Reilly泛函进行了研究。全书共分为五部分。第一部分为第1章，介绍Reilly泛函以及几个典型范例的研究现状；第二部分为第2－6 章，介绍和推导了本书的理论基础，特别是基本变分公式与张量构造；第三部分为第7－8 章，抽象地研究了Reilly泛函，计算了第一变分；第四部分为第9－15章，具体研究了Reilly泛函的典型范例，特别是极小与高阶极小、低阶曲率、高阶共形不变泛函；第五部分为第16－17章，推导了三类特殊Reilly泛函的间隙现象。全书论述严密，适合数学与图形处理专业以及理论物理，特别是专攻拉格朗日变分力学的研究生及科研工作者参考。

图书在版编目（CIP）数据

Reilly型泛函的变分法研究/ 刘进, 王广著.－ 长沙 : 国防科技大学出版社, 2014.10

ISBN 978-7-5673-0340-9

Ⅰ. ①R⋯ Ⅱ. ①刘⋯ ②王⋯ Ⅲ. ①泛函数－变分法 －研究 Ⅳ. ① O177

中国版本图书馆CIP数据核字(2014)第227349号

国防科技大学出版社出版

电话：(0731)84572640　邮政编码：410073

http://www.gfkdcbs.com

责任编辑：谷建湘

(LaTeX排版)

国防科技大学印刷厂印刷

开本：890 × 1240　1/32　印张：10.5　字数：312 千

2014年10月第1版第1次印刷　印数：1－1000册

定价：30.00元

前言

线性代数学中一个基本的事实是，n阶矩阵具有n个基本对称相似不变量，这些不变量对于刻画矩阵性质具有重要的作用。对于n维子流形而言，研究历史表明，一般或者迹零第二基本型的n个基本对称不变量是子流形的n个最重要的刻画特征，很多性质优美的子流形都是由基本对称不变量通过简单的代数关系加以定义。除了代数性质研究以外，微分几何学家很早就注意研究以子流形的基本对称不变量为对象的泛函，分别有很多具体并且特别的结果，比如体积泛函、Willmore泛函、全曲率模长泛函等。20世纪70年代，美国微分几何学家Robert Reilly对于欧式空间之中的超曲面定义了一类涉及所有n个基本对称不变量的抽象泛函，现在称之为Reilly泛函，计算了泛函的第一变分公式并做了一些应用。Reilly泛函的显著优点是，一方面能够统一大部分的子流形泛函，另一方面能够发展新的特殊泛函，对于加深认识子流形上的泛函与子流形的几何拓扑性质之间的关系具有重要意义。必须指出，Robert Reilly构造的泛函仅仅关注于欧式空间的超曲面，具有较大的局限性。因此，一个自然的问题是：如何研究一般外围流形中（不仅仅是欧式空间）的具有任意余维数（不仅仅是超曲面）的子流形

的Reilly型泛函的变分问题？这就是本书要解决的问题。

本书的主要目的在于系统地用变分理论研究子流形的Reilly型泛函。全书共分17章，可以归纳为五部分。第一部分为第1章，主要介绍Reilly泛函以及几个典型范例，比如体积泛函、Willmore泛函、全曲率模长等泛函的国内外研究现状。第二部分是基础理论篇，包括第2–6章。各章的目的和作用不一。第2章精炼介绍微分几何的基本方程和定理，为后面各章提供预备知识；第3章推导子流形几何的基本方程和变分法基本公式，是本书的理论基础；变分法的计算通常非常复杂，为了简化公式和计算过程，第4章研究子流形第二基本型的组合构造方法——Newton变换法，并推导了新构造的张量的基本性质，是对第3章内容的扩充和精细；自伴算子是子流形间隙现象研究的有效工具，第5章利用Newton张量设计了多种几何意义明确的自伴算子，并对几种典型函数做了精细的计算；子流形中几何量的估计涉及各种精巧的不等式和方法，在第6章作者归纳了子流形研究常用的不等式。第三部分对Reilly泛函进行了抽象的研究，包括第7–8 章。各章的主题不一。第7章定义了最一般的Reilly类型泛函，并将各种经典泛函统一到Reilly 泛函的框架之下。第8章计算了Reilly类型泛函的第一变分公式，这是整个研究的基础。第四部分包括第9–15章，是对各种特殊的Reilly泛函的具体研究，包括一般体积泛函、高阶极小体积泛函、低阶曲率泛函、Willmore泛函、全曲率模长泛函、高阶共形不变泛函等典型Reilly型范例。第五部分包括第16–17章，研究了Reilly 泛函的间隙现象。第16章推导了三类特殊Reilly泛函的临界点的Simons 类型积分不等式。第17章在积分不等式的基础上借助于子流形结构方程与精巧的

不等式分析技巧详细讨论并定出了端点对应的特殊子流形。

本书理论在现实世界的反映可能集中于拉格朗日变分力学领域。现代物理学与微分几何有着密切的关系，比如Yang-Mills泛函，凝聚态的密度泛函理论等。本书中所发展的变分法在深度与广度上都可以预期产生物理应用。

本书由两位作者共同完成。其中刘进负责第1–8章、第16–17章的写作，王广负责第9–15章的写作，全书由刘进统稿。

本书是作者对子流形Reilly泛函的一个粗浅阐述。由于作者水平有限，错误和失误难免，请各位专家批评指正。

刘进　王广

2014年6月

目 录

第 1 章　子流形的Reilly类型泛函

子流形上的特殊泛函的研究对于中国学者而言一般遵循三篇基本的文献。第一篇为Simons的文章[1]，这是极小子流形在一般框架下的第一篇重量级的研究文献。第二篇为陈省身先生的Kansas讲义[2]，陈省身用活动标架法对文献[1]中的内容进行了简化和深化，并提出了很多著名的猜想，推导了子流形的基本结构方程；计算了体积泛函的第一变分；对欧氏空间的极小子流形进行了微分刻画，推导了著名的函数图极小方程，介绍了Bernstein定理的演化进程；用复变函数（等温坐标，黎曼曲面）对欧氏空间的可定向2维极小曲面进行了刻画；对单位球面中的极小子流形的结构方程进行了推导，给出了几个典型例子，特别是Clifford 超曲面与Veronese 曲面；计算了第二基本型的Laplacian；利用此计算结合精巧的不等式分析导出了Simons积分不等式，利用结构方程和Frobenius 定理定出了间隙端点对应的特殊子流形；在第一变分公式的基础上计算了第二变分公式；最后讨论了锥子流形稳定性的特征值刻画问题。第三篇为Chern-do和 Carmo-Kobayashi 合写的著名的文章[3]，其中研究了极小子流形的间隙现象，并定出了间隙端点对应的特殊子流形，文章内容引领了一种学术主题的发展，是子流形变分法理论，间隙现象研究方面的“圣经”级参考资料。

20世纪70年代前后，Robert Reilly致力于统一、推广体积泛函到更一般的泛函，利用欧氏空间超曲面第二基本型张量自然构造了n个高阶对称不变曲率函数，并将其作为一个抽象n元函数的自变量，构造了一个极其抽象的泛函，现在冠以Reilly泛函之名。本专著受超曲面Reilly泛函的启发，在以下几个方面做了进一步的研究和扩展。第一、研究的外围流形从欧氏空间推广到一般的外围黎曼流形；第二、研究的子流形从超曲面推广到一般余维数的子流形；第三、研究的第二基本型从一般的推广到迹零第二基本型；第四、研究的思路从一般到特殊，特别阐明了体积泛函、Willmore泛函等是Reilly泛函的特殊情形；第五、研究的内

容从第一变分公式推广到临界点的构造、第二变分公式计算、临界点的稳定性、临界点的间隙现象等重要的内容。总之，本专著在一般的情形下对原始的Reilly 泛函进行了深化和发展，将历史上的经典泛函都统一到Reilly 泛函的框架之下，特别地，利用迹零第二基本型的Reilly泛函，我们发展了一大类新的共形不变泛函——高阶Willmore泛函，是对经典的Willmore泛函的推广。本专著的研究将丰富子流形类型，加深子流形上的特殊泛函与子流形的几何拓扑性质之间的关系的进一步认识。

1.1 子流形第二基本型与张量构造

设$x: M^n \to N^{n+p}$是子流形，$e_1, \cdots, e_n, \cdots, e_{n+p}$是局部活动标架，使得$e_1, \cdots, e_n$是子流形$M$的切空间的标架，$e_{n+1}, \cdots, e_{n+p}$是子流形$M$ 的法空间的标架，$e_1, \cdots, e_n$的对偶标架记为$\theta^1, \cdots, \theta^n$. 子流形一个基本的事实是$\theta^{n+1} = \cdots = \theta^{n+p} = 0$. 在经典微分几何中我们知道，子流形的形态不仅由它的第一基本形式——度量结构决定，而且依赖它在原流形中的浸入方式——第二基本型

$$B = h_{ij}^{\alpha}\theta^i \otimes \theta^j \otimes e_{\alpha}.$$

从上面的第二基本型出发，我们可以定义几个重要的过渡张量

$$\begin{aligned}
H^{\alpha} &= \frac{1}{n}\sum_i h_{ii}^{\alpha},\\
\vec{H} &= H^{\alpha}e_{\alpha},\\
\hat{h}_{ij}^{\alpha} &= h_{ij}^{\alpha} - H^{\alpha}\delta_{ij},\\
B_{ij} &= h_{ij}^{\alpha}e_{\alpha},\\
\hat{B}_{ij} &= \hat{h}_{ij}^{\alpha}e_{\alpha} = (h_{ij}^{\alpha} - H^{\alpha}\delta_{ij})e_{\alpha}.
\end{aligned}$$

利用上面的过渡张量，我们可以构造一些重要的对称的不变函数和向量场，我们分余维数为1和余维数大于1两种情况进行讨论：

(1) 当$p=1$时，超曲面情形

$$S_r=\frac{1}{r!}\delta^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_r}h_{i_1j_1}\cdots h_{i_rj_r}, r=1,\cdots,n,$$

$$\hat{S}_r=\frac{1}{r!}\delta^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_r}\hat{h}_{i_1j_1}\cdots \hat{h}_{i_rj_r}, r=2,\cdots,n, \hat{S}_1=0.$$

(2) 当$p>1$时，子流形情形

$$S_r=\frac{1}{r!}\delta^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_r}\langle B_{i_1j_1},B_{i_2j_2}\rangle\cdots\langle B_{i_{r-1}j_{r-1}},B_{i_rj_r}\rangle, r\equiv 0(\mathrm{mod}2),$$

$$\hat{S}_r=\frac{1}{r!}\delta^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_r}\langle \hat{B}_{i_1j_1},\hat{B}_{i_2j_2}\rangle\cdots\langle \hat{B}_{i_{r-1}j_{r-1}},\hat{B}_{i_rj_r}\rangle, r\equiv 0(\mathrm{mod}2),$$

$$\vec{S}_r=\frac{1}{r!}\delta^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_r}\langle B_{i_1j_1},B_{i_2j_2}\rangle\cdots\langle B_{i_{r-2}j_{r-2}},B_{i_{r-1}j_{r-1}}\rangle B_{i_rj_r}, r\equiv 1(\mathrm{mod}2),$$

$$\hat{\vec{S}}_r=\frac{1}{r!}\delta^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_r}\langle \hat{B}_{i_1j_1},\hat{B}_{i_2j_2}\rangle\cdots\langle \hat{B}_{i_{r-2}j_{r-2}},\hat{B}_{i_{r-1}j_{r-1}}\rangle \hat{B}_{i_rj_r}, r\equiv 1(\mathrm{mod}2),$$

$$\hat{\vec{S}}_1=0.$$

20世纪70年代左右，Reilly考虑了欧氏空间超曲面的如下泛函：

$$\int_M F(S_1,\cdots,S_n)\mathrm{d}v.$$

其中函数F是一个可微的抽象的n元函数，Reilly计算了它的第一变分公式并做了一些应用。受Reilly思想的启发，我们考虑如下四种泛函：

$$R_{(n,p=1,I)}=\int_M F(S_1,\cdots,S_n)\mathrm{d}v,$$

$$R_{(n,p=1,II)}=\int_M F(\hat{S}_2,\cdots,\hat{S}_n)\mathrm{d}v,$$

$$R_{(n,p>1,I)}=\int_M F(|\vec{S}_1|^2,S_2,\cdots,\underbrace{|\vec{S}_r|^2}_{\mathrm{odd}},\underbrace{S_r}_{\mathrm{even}})\mathrm{d}v,$$

$$R_{(n,p>1,II)}=\int_M F(\hat{S}_2,\cdots,\underbrace{|\hat{\vec{S}}_r|^2}_{\mathrm{odd}},\underbrace{\hat{S}_r}_{\mathrm{even}})\mathrm{d}v.$$

本专著将集中精力研究以上4种泛函。第一，研究第一变分公式；第二，研究临界点子流形的构造问题；第三，研究第二变分公式；第四，根据

第二变分公式研究临界点的稳定性；第五，研究泛函的特殊情形，特别是统一子流形领域的经典泛函；第六，研究某些特殊泛函的间隙现象。

1.2 特殊Reilly泛函之一般体积泛函

如果仔细追寻历史，可以知道极小子流形与面积泛函有极大的联系。实际上设$D \in R^2$是平面上的一个区域，∂D是一条Jordan封闭曲线，在∂D上我们可以定义一条三维欧氏空间R^3中的封闭Jordan曲线：

$$\Gamma : \partial D \to R^3.$$

一个问题是，以封闭的三维空间中的Jordan曲线为边界张成的曲面，什么时候面积最小？这个问题的物理意义在于自然世界中各种液相和气相交界的曲面形状往往满足最小面积原理。回答这个问题的思路在于利用变分法原理推导面积泛函的临界点方程。实际上，设曲面可用一个显示表达：

$$f : D \to R,\ \ (x, y) \to f(x, y),$$

同时应该满足约束条件

$$(x, y, f(x, y)) \mid_{\partial D} = \Gamma.$$

曲面的面积微元表达为

$$\sqrt{1 + |\nabla f|^2} \mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

因此问题的目标函数为

$$A(f) = \int_D \sqrt{1 + |\nabla f|^2} \mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

我们定义函数空间

$$H_\Gamma = \{f : f \in C^2(D), (x, y, f(x, y)) \mid_{\partial D} = \Gamma\}.$$

为了获得具有线性结构的函数空间，定义

$$H_0 = \{f : f \in C^2(D),\ \ (x, y, f(x, y)) \mid_{\partial D} = 0\}.$$

函数空间H_0和H_Γ的关系是一个线性平移关系，即

$$\forall f \in H_\Gamma,\ H_\Gamma = f + H_0.$$

因此问题可以描述为

$$\min_{f\in H_\Gamma} A(f) = \min_{f\in H_\Gamma}\int_D \sqrt{1+|\nabla f|^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

利用H_0空间可以表示为

$$\min_{\phi\in H_0} = A(f+\phi) = \min_{\phi\in H_0}\int_D \sqrt{1+|\nabla f+\nabla\phi|^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

如果f就是泛函的极小点，那么必须满足

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}A(f+t\phi)|_{t=0} = 0,$$

经过简单的计算得到

$$\mathrm{div}\frac{\nabla f}{\sqrt{1+|\nabla f|^2}} = 0.$$

在微分几何中，函数图$(x, y, f(x, y))$的平均曲率可以表示为

$$H = \frac{1}{2}\mathrm{div}\frac{\nabla f}{\sqrt{1+|\nabla f|^2}}.$$

因此面积泛函的极小点就是函数图的极小。

将上面的思想进行抽象可以得到子流形的体积泛函：

$$\mathrm{Vol}(M) = \int_M \theta^1\wedge\cdots\wedge\theta^n = \int_M \mathrm{d}v.$$

体积泛函是子流形最简单最自然的泛函。设$V = V^\alpha e_\alpha$是法向的变分向量场，经过计算我们得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|_{t=0}\ \mathrm{Vol}(M) = -\int_M N\langle\vec{H}, V\rangle\mathrm{d}v.$$

因此体积泛函的临界点方程是$\vec{H} = 0$.

定义 1.1 (变分刻画) 设$x: M^n \to N^{n+p}$是子流形，称其为极小子流形如果在紧致法向变分条件下它是体积泛函

$$\mathrm{Vol}(M) = \int_M \theta^1\wedge\cdots\theta^n = \int_M \mathrm{d}v$$

的临界点。

定义 1.2 (代数刻画) 假设$x: M^n \to N^{n+p}$是子流形，我们称其为极小子流形如果

$$\vec{H} = 0.$$

1.3 特殊Reilly泛函之高阶极小泛函

我们观察第二基本型，通过基本的代数运算，可以实现对极小子流形的推广，我们可以做如下定义

定义 1.3 (代数刻画) 假设$x: M^n \to N^{n+1}$是子流形，我们称其为r-极小子流形如果

$$S_{r+1} = 0, \ \forall r = 0, 1, \cdots, n-1.$$

显然，0-极小就是经典意义上的极小。

定义 1.4 (代数刻画) 设$x: M^n \to N^{n+p}, p \geqslant 2$是子流形，$r \in \{0, 1, \cdots, n\}$且为偶数，称其为$r$极小子流形，如果

$$\vec{S}_{r+1} = 0.$$

显然，0极小就是经典意义上的极小。

设$R^{n+p}(c)$是空间形式，当$c = 1$时，它是单位球面；当$c = 0$时，它是欧氏空间；当$c = -1$时，它是双曲空间。约定：

(1) $0 \leqslant r_1 < r_2 < \cdots < r_s \leqslant (n-1)$，所有$r_i$ 都是偶数，记

$$\overrightarrow{r+1} = (r_s + 1, \cdots, r_1 + 1), \ \vec{r} = (r_s, \cdots, r_1).$$

(2) $\lambda_1, \cdots, \lambda_s \in R$都是实常数，$\lambda_s = 1$，记

$$\vec{\lambda} = (\lambda_s, \cdots, \lambda_1).$$

定义 1.5 (代数刻画) 称$x: M \to R^{n+p}(c)$是一个$(\overrightarrow{r+1}, \vec{\lambda})$-平行子流形，如果满足

$$\vec{S}_{(\overrightarrow{r+1}, \vec{\lambda})} \overset{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{s} (r_i + 1)\lambda_i \vec{S}_{r_i+1} = 0.$$

显然，$(\overrightarrow{r+1}, \vec{\lambda})$-平行子流形概念是极小和$r$ 极小概念的推广。

设$x: M^n \to R^{n+p}(c)$是空间形式中的极小子流形，其可用体积泛函来刻画：

$$\mathrm{Vol}(x) = \int_M \theta^1 \wedge \theta^2 \cdots \theta^n = \int_M \mathrm{d}v.$$

一个自然的问题是，如何用泛函来刻画上文所定义的r阶极小和$(\overrightarrow{r+1}, \vec{\lambda})$-平行子流形。通过猜想和计算，我们可以构造出所需要的泛函，称之为广义体积泛函。

对于r阶极小子流形，我们引进所谓的J_r泛函，其中r是偶数并且$r \in \{0, 1, \cdots, n-1\}$。首先归纳定义函数：

$$F_0 = 1,\ \ F_r = S_r + \frac{(n-r+1)c}{r-1} F_{r-2},\ \ 2 \leqslant r \leqslant n-1.$$

然后定义泛函

$$J_r = \int_M F_r(S_0, S_2, \cdots, S_r)\mathrm{d}v.$$

对任意的向量场

$$V = V^{\top} + V^{\perp} = V^i e_i + V^{\alpha} e_{\alpha},$$

有

$$J_r'(t) = -\int_{M_t} \langle (r+1)\vec{S}_{r+1}, V \rangle \mathrm{d}v.$$

因此，我们有下面的定义。

定义 1.6 (变分刻画) 设$x: M^n \to R^{n+p}(c)$是子流形，$r \in \{0, 1, \cdots, n\}$且为偶数，称其为$r$ 极小子流形，如果子流形M是泛函J_r的临界点。

对于$(\overrightarrow{r+1}, \vec{\lambda})$-平行子流形，我们研究的泛函是$J_r$泛函的线性组合。定义泛函

$$A_{\vec{r}, \vec{\lambda}} = \sum_{i=1}^{s} \lambda_i J_{r_i}.$$

对任意的向量场

$$V = V^{\top} + V^{\perp} = V^i e_i + V^{\alpha} e_{\alpha},$$