《高等数学（一）微积分》习题详解

…社

全国高等教育自学考试经济管理类

《高等数学·（一）微积分》
习题详解

张春汉 编

华南理工大学出版社

〔粤〕新登字12号

全国高等教育自学考试经济管理类

《高等数学·(一)微积分》习题详解

张春汉　编

责任编辑　潘宜玲

*

华南理工大学出版社出版发行

(广州　五山)

中山大学印刷厂印装

*

开本 787×1092　1/32　印张 14.375　字数 323 千

1993 年 6 月第 1 版　1993 年 6 月第 1 次印刷

印数：1—3000

ISBN 7—5623—0527—7/O·55

定价：8.50 元

出版说明

由高汝熹主编的武汉大学出版社出版的《高等数学·(一)微积分》一书，是全国高等教育自学考试指导委员会指定的经济管理类自学考试教材。我省从1992年开始，已把会计专业所有课程并入全国考试网内，并统一使用全国自学考试委员会统考试题。《高等数学》(一)是经济管理类的公共课，不少自学者感到困难较大，我校为了保证教学质量，帮助考生更好掌握《高等数学》(一)这门课程的知识，特邀请了暨南大学经济学院张春汉副教授编写了《高等数学·(一)习题详解》一书。

张春汉副教授从事教学工作已有30年历史，并亲自参加高等教育自学考试的社会助学工作，针对自学者不同层次的特点，总结出一套《高等数学》的解题技巧，更便于自学者掌握。他的解题方法与技巧在教学实践中证明是行之有效的，并深受自学者的青睐，在他编写的《高等数学·(一)习题详解》一书中融合了他的这一技巧，并根据他自己教学的实践，对原教材中的习题作了一些修正，因此该书将会对自学者带来更大的帮助和方便。

广州南洋自学辅导大学

前　言

由武汉大学出版社出版发行的《高等数学·（一）微积分》，是全国高等教育自学考试指导委员会高等教育自学考试经济管理类的教材。本书是为配合参加自学考试的广大青年自学这本教材而编写的，旨在帮助自学考试青年，系统地掌握和理解微积分的基础知识，增强解题能力，熟练演算技巧，提高应试水平。

随着科技不断进步，经济领域中定量分析越来越占重要地位，而高等数学是进行经济定量分析的基础，所以《高等数学》不但是理工类专业的重点课程，也是财经类专业的重点和必考课程。为了帮助应试青年对财经类《高等数学》试题的深度、广度、题型等方面有所了解，本书末附有1992年下半年全国高等教育自学考试《高等数学》(1)（财）试题与答案，供读者参考。

“世上无难事，只怕有心人”。只有多做习题，才能熟悉题型，才能熟而生巧，应试自如。愿本书能给自学考试青年带来收益，祝广大应试青年学习获得成功！

由于编者水平有限，不妥之处，请读者批评指正。

编　者

1993年5月

目　录

第一章　函数及其图形 …………………………………… (1)
习题 1.1 …………………………………………………… (1)
习题 1.2 …………………………………………………… (4)
习题 1.3 …………………………………………………… (5)
习题 1.4 …………………………………………………… (15)
复习题 ……………………………………………………… (17)
第二章　极限与连续 ……………………………………… (25)
习题 2.1 …………………………………………………… (25)
习题 2.2 …………………………………………………… (29)
习题 2.3 …………………………………………………… (33)
习题 2.4 …………………………………………………… (41)
习题 2.5 …………………………………………………… (44)
习题 2.6 …………………………………………………… (50)
复习题 ……………………………………………………… (53)
第三章　导数与微分 ……………………………………… (66)
习题 3.1 …………………………………………………… (66)
习题 3.2 …………………………………………………… (69)
习题 3.3 …………………………………………………… (85)
习题 3.4 …………………………………………………… (91)
习题 3.5 …………………………………………………… (95)
复习题 ……………………………………………………… (101)
第四章　中值定理与导数的应用 ………………………… (115)
习题 4.1 …………………………………………………… (115)

习题 4.2 …………………………………………………… (123)
习题 4.3 …………………………………………………… (144)
习题 4.4 …………………………………………………… (156)
复习题 …………………………………………………… (161)
第五章　积分 …………………………………………………… (175)
习题 5.1 …………………………………………………… (175)
习题 5.2 …………………………………………………… (194)
习题 5.3 …………………………………………………… (210)
习题 5.4 …………………………………………………… (216)
复习题 …………………………………………………… (227)
第六章　无穷级数 …………………………………………………… (245)
习题 6.1 …………………………………………………… (245)
习题 6.2 …………………………………………………… (250)
习题 6.3 …………………………………………………… (257)
习题 6.4 …………………………………………………… (266)
复习题 …………………………………………………… (273)
第七章　多元函数微积分 …………………………………………………… (287)
习题 7.1 …………………………………………………… (287)
习题 7.2 …………………………………………………… (295)
习题 7.3 …………………………………………………… (302)
习题 7.4 …………………………………………………… (305)
习题 7.5 …………………………………………………… (319)
习题 7.6 …………………………………………………… (336)
复习题 …………………………………………………… (349)
第八章　微分方程初步 …………………………………………………… (362)
习题 8.1 …………………………………………………… (362)
习题 8.2 …………………………………………………… (365)
习题 8.3 …………………………………………………… (381)

习题 8.4 ………………………………………………………… (389)
习题 8.5 ………………………………………………………… (404)
复习题 ……………………………………………………………… (408)
附录一　1992 年下半年全国高等教育自学考试
《高等数学》(1)(财)试题及答案………… (428)
附录二　《高等数学·(一)微积分》教材习题与
答案修正一览………………………………… (441)

第一章　函数及其图形

习题 1.1

1. 用集合符号写出下列集合：

(1)大于 30 的所有实数的集合；

(2)圆 $x^2+y^2=25$ 上所有的点组成的集合；

(3)椭圆$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}=1$外部一切点的集合.

解　(1)设 A 表示大于 30 的所有实数的集合，则

$$A=\{x|x>30,x\in R\}$$

(2)设 A 表示所求点的集合，则

$$A=\{(x,y)|x^2+y^2=25,x,y\in R\}$$

或写成(省略 $x,y\in R$)

$$A=\{(x,y)|x^2+y^2=25\}$$

(3)设 A 表示所求点的集合，则

$$A=\left\{(x,y)\,\middle|\,\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}>1,x,y\in R\right\}$$

2. 按下列要求举例：

(1)一个有限集合；

(2)一个无限集合；

(3)一个空集；

(4)一个集合是另一个集合的子集.

解　(1)例 1：$A=\{x|0<x<5,x\in N\}=\{1,2,3,4\}$

例 2：$B=\{x|x^2-x-2=0\}=\{-1,2\}$

例 3：某外语学院所学外国语言的集合 $C=\{$英语、日语、俄语、德语、法语$\}$

(2)例 1：$A=\{x|0<x<5,x\in R\}$

例 2：$B=\{(x,y)|y=x+1,x,y\in R\}$，$x,y\in R$ 可省略.

例 3：全体偶数的集合 $A=\{x|x=2n,n\in Z\}$，这里 Z 表示整数的集合.

(3)例 1：$\{x|x^2+1<0,x\in R\}=\varnothing$

例 2：$\{x|x^2-2x+2=0,x\in R\}=\varnothing$

例 3：三角形内角和不等于 180°的三角形的集合$=\varnothing$

(4)例 1：$N\subset Z$，即自然数集是整数集的子集.

例 2：$Z\subset R$，即整数集是实数集的子集.

例 3 偶数集合是整数集合的子集.

3.下列集合哪个是空集$\varnothing$？

$A=\{x|x+5=5\}$，$B=\{x|x\in R$ 且 $x^2+5=0\}$

$C=\{x|x>5$ 且 $x<5\}$

解 $B=\varnothing$，$C=\varnothing$

4. 设 $A=\{a,b,c\}$，下列式中哪些是正确的？

(1)$\varnothing\in A$； (2)$a\overline{\in}A$； (3)$\{a\}<A$； (4)$\varnothing<A$；

(5)$A\subset A$； (6)$b\in A$； (7)$b\subset A$.

解 (1)、(4)不正确，应写成$\varnothing\subset A$ 才正确；

(2)不正确，因 $a\in A$；

(3)不正确，应写成$\{a\}\subset A$ 才正确；

(5)、(6)正确；(7)不正确，应写成 $b\in A$ 或$\{b\}\subset A$ 才正确.

5. 如果 $A=\{x|3<x<5,x\in R\}$，$B=\{x|x>4,x\in R\}$

求：(1)$A\cup B$； (2)$A\cap B$.

解 (1)$A\cup B=\{x|3<x<5$ 或 $x>4,x\in R\}=\{x|x>3,x\in R\}$

(2)$A\cap B=\{x|3<x<5$ 且 $x>4,x\in R\}=\{x|4<x<5,x\in R\}$

6. 设 $A=\{a,b\},B=\{b,c\},C=\{c,d\}$

求 $A\cup B,B\cup C,A\cup C,A\cup A,A\cap B,A\cap C,(A\cup B)\cap C,A\cap A$.

解 $A\cup B=\{a,b,c\},B\cup C=\{b,c,d\},A\cup C=\{a,b,c,d\},A\cup A=\{a,b\},A\cap B=\{b\},A\cap C=\varnothing,(A\cup B)\cap C=\{a,b,c\}\cap\{c,d\}=\{c\},A\cap A=\{a,b\}$.

7. 试证:若 $A\subset B,B\subset C$,则 $A\subset C$.

证明 采用反证法,假设 $A\subset C$ 不成立,即有某元素 $a\in A$ 但 $a\overline{\in}C$;现因 $A\subset B$,可见 $a\in B$,又因 $B\subset C$,可见 $a\in C$,这与 $a\overline{\in}C$ 矛盾,故得证 $A\subset C$ 成立.

8. 用区间表示满足下列不等式的所有 x 的集合:

(1)$|x|\leqslant 2$; (2)$|x-5|\leqslant 1$; (3)$|x-1|<\varepsilon(\varepsilon>0)$;

(4)$|x|>1$; (5)$|x+2|\geqslant 3$.

解 (1)$[-2,2]$; (2)$[4,6]$; (3)$(1-\varepsilon,1+\varepsilon)$; (4)$(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$; (5)$(-\infty,-5]\cup[1,+\infty)$.

[注 1] $|x-x_0|<\delta\Leftrightarrow x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)\Leftrightarrow x$ 落在点 x_0 的 δ 邻域内 $\Leftrightarrow x$ 落在以 x_0 为中心,δ 为半径的开区间里.

$|x-x_0|\geqslant\delta\Leftrightarrow x\in(-\infty,x_0-\delta]\cup[x_0+\delta,+\infty)\Leftrightarrow x$ 落在点 x_0 的 δ 邻域外.

9. 在数轴上画出满足下列条件的所有 x 的集合:

(1)$|x-a|<\delta,a$ 为常数,$\delta>0$.

(2)$1<|x-2|<3$

解 (1)见图 1 阴影部分.

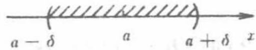

图 1

(2)$1<|x-2|<3 \Leftrightarrow x \in (2-3,2+3) \cap [(-\infty,2-1) \cup (2+1,+\infty)] \Leftrightarrow x \in (-1,5) \cap [(-\infty,1) \cup (3,+\infty)] = (-1,1) \cup (3,5)$,见图 2 阴影部分.

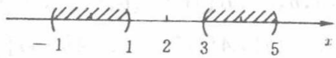

图 2

从直观亦可看出 $1<|x-2|<3$ 表示点 x 到点 2 的距离 $|x-2|$ 小于 3 而大于 1 的集合就是图 2 所示的阴影部分.

习题 1.2

1. 设 x 是所有同心圆的集合,y 是实数集合,若把同心圆与其直径 y 建立对应关系,试验证这种对应关系构成从 x 到 y 的映射.

验证 每个同心圆 x 按某规则 f,都有唯一的直径 y 的对应关系. 例如 x 的面积为 S,则 $y=\sqrt{\dfrac{4S}{\pi}}$ 与 x 唯一对应. 所以构成从 x 到 y 的映射.

2. 请判断下列对应关系是否构成映射:

设 X 集合由 A、B、C 三个工厂构成,Y 集合由甲、乙、丙、丁四个商店构成,A、C 两个工厂产品分别由甲、丁两个商店销

售，B 工厂产品由乙、丙两个商店共同销售，若把生产产品的工厂和销售这些产品的商店之间建立对应关系（供销关系），问这种对应关系是否构成从 X 到 Y 的映射.

解 从 X 到 Y 不构成映射．因为 X 中的元素 B 对应 Y 中的两元素乙、丙，而不是对应 Y 中的唯一元素，故不符合 $X \to Y$ 的第二个条件.

习题 1.3

1. 求下列函数值.

(1)若 $f(x)=x\cdot 4^{x-2}$，求 $f(2)$，$f(-2)$，$f(t^2)$，$f(\frac{1}{t})$；

(2)若 $\varphi(t)=t^3+1$，求 $\varphi(t^2)$，$[\varphi(t)]^2$.

解 (1)$f(2)=2\cdot 4^{2-2}=2\cdot 1=2$，

$f(-2)=(-2)4^{-2-2}=\dfrac{-2}{4^4}=\dfrac{-1}{128}$，

$f(t^2)=t^2 4^{t^2-2}=\dfrac{1}{16}t^2 4^{t^2}$，$f(\dfrac{1}{t})=\dfrac{1}{t}\cdot 4^{\frac{1}{t}-2}=\dfrac{1}{16t}4^{\frac{1}{t}}$.

(2)$\varphi(t^2)=(t^2)^3+1=t^6+1$，

$[\varphi(t)]^2=(t^3+1)^2=t^6+2t^3+1$.

2. 求下列函数值：

(1)若 $f(x)=\dfrac{|x-2|}{x+1}$，求 $f(0)$，$f(a)$，$f(a+b)$；

(2)若 $g(x)=\begin{cases}2^x & -1<x<0\\ 2 & 0\leqslant x<1\\ x-1 & 1\leqslant x\leqslant 3\end{cases}$，求 $g(3)$，$g(2)$，$g(0)$，$g(0.5)$，$g(-0.5)$；

(3)若 $\varphi(x)=\begin{cases}3+x^4 & -\infty\leqslant x\leqslant 0\\ 2^x & 0<x<+\infty\end{cases}$，求 $\varphi(-2),\varphi(0),\varphi(2)$；

(4)若 $\varphi(x)=\begin{cases}|\sin x| & |x|<1\\ 0 & |x|\geqslant 1\end{cases}$，求 $\varphi(1),\varphi(\frac{\pi}{4}),\varphi(\frac{-\pi}{4})$.

解 (1)$f(0)=\frac{|0-2|}{0+1}=2$，$f(a)=\frac{|a-2|}{a+1}$，

$$f(a+b)=\frac{|a+b-2|}{a+b+1};$$

(2)$g(3)=3-1=2,g(2)=2-1=1$，

$g(0)=2,g(0.5)=2$，

$$g(-0.5)=2^{-0.5}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2};$$

(3)$\varphi(-2)=3+(-2)^4=19,\varphi(0)=3+0^4=3$，

$\varphi(2)=2^2=4$；

(4)$\varphi(1)=0,\varphi(\frac{\pi}{4})=|\sin\frac{\pi}{4}|=\frac{\sqrt{2}}{2}$，

$$\varphi(-\frac{\pi}{4})=|\sin(-\frac{\pi}{4})|=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

3. 下列各对函数是否相同，并说明理由.

(1)$f(x)=\ln x^2,\varphi(x)=2\ln x$；

(2)$f(x)=\sin^2 x+\cos x^2,\varphi(x)=1$.

解 (1)两函数不相同，因定义域不同.

$D_f=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ 而 $D_\varphi=(0,+\infty)$

(2)因 $D_f=D_\varphi=(-\infty,+\infty)$ 且两函数的依存关系相同，即 $f(x)=\varphi(x)=1$，所以两函数相同.

4. 求下列函数的定义域：

(1) $y=\dfrac{2x}{x^2-3x+2}$；　(2) $y=\sqrt{3x+4}$；　(3) $y=\sqrt{a^2-x^2}$；

(4) $y=\dfrac{1}{1-x^2}+\sqrt{x+4}$；　(5) $y=\lg\dfrac{x}{x-2}$；

(6) $y=\sqrt{\sin x}+\sqrt{16-x^2}$；　(7) $y=\arcsin\dfrac{x-3}{2}$.

解　(1) $x^2-3x+2=(x-1)(x-2)\neq 0$

得　$$x\neq 1 \text{ 或 } x\neq 2$$

于是得：　$$D=(-\infty,1)\cup(1,2)\cup(2,+\infty)$$

(2) $3x+4\geqslant 0$，得 $x\geqslant\dfrac{-4}{3}$，所以 $D=[-\dfrac{4}{3},+\infty)$.

(3) 定义域应满足 $a^2-x^2\geqslant 0$，得 $x^2\leqslant a^2$，即 $|x|\leqslant a$，所以 $D=[-a,a]$.

(4) 定义域应满足：

$$\begin{cases}1-x^2\neq 0\\ x+4\geqslant 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\neq\pm 1\\ x\geqslant -4\end{cases}$$

所以　$$D=[-4,-1)\cup(-1,1)\cup(1,+\infty)$$

(5) 定义域应满足：

$$\begin{cases}\dfrac{x}{x-2}>0\\ x\neq 2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x>0\\ x-2>0\end{cases}\text{或}\begin{cases}x<0\\ x-2<0\end{cases}\Rightarrow x\geqslant 2 \text{ 或 } x<0$$

所以　$$D=(-\infty,0)\cup(2,+\infty)$$

(6) 定义域应满足：

$$\begin{cases}\sin x\geqslant 0\\ 16-x^2\geqslant 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2k\pi\leqslant x\leqslant(2k+1)\pi\quad(k\in Z)\\ |x|\leqslant 4\end{cases}$$

(参看图 3 中双重阴影区域).

所以　$$D=[-4,-\pi]\cup[0,\pi]$$

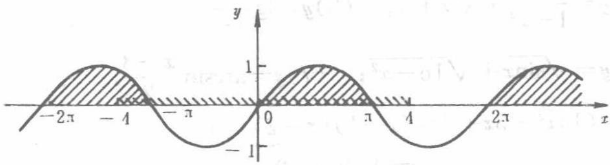

图 3

(7) $\left|\frac{x-3}{2}\right|\leqslant 1\Rightarrow |x-3|\leqslant 2\Rightarrow x\in[3-2,3+2]$

所以 $$D=[1,5]$$

[注 2] 只有一个函数 $y=f(x)$，定义域 D_f 简写为 D.

5. 确定函数

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{1-x^2} & |x|\leqslant 1\\ x^2-1 & 1<|x|<2\end{cases}$$

的定义域并作出函数图形.

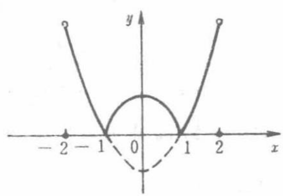

图 4

解 定义域为 $|x|\leqslant 1$ 并 $1<|x|<2$，得 $D=(-2,2)$. 函数图形见图 4 的实线部分.

6. 某产品年产量为 x 台，每台售价为 400 元，当年产量在 1000 台以内时，可以全部售出；当年产量超过 1000 台时，经广告宣传后又可以再多出售 200 台，其中超过部分每台平均广告费 40 元，生产再多，本年就售不出去，试将本年的销售总收入 R 表示为年产量 x 的函数.

解 ①当 $0\leqslant x\leqslant 1000$ 时，$R=400x$；

②当 $1000<x\leqslant 1200$ 时，

$$R=400\times 1000+360(x-1000)=360x+40000$$

③当 $x>1200$ 时，

$$R=360\times 1200+40000=472000$$

综合得分段函数：

$$R=R(x)=\begin{cases}400x & 0\leqslant x\leqslant 1000\\ 360x+40000 & 1000<x\leqslant 1200\\ 472000 & x>1200\end{cases}$$

7. 设生产与销售某产品的总收入 R 是产量 x 的二次函数，经统计得知：当产量 $x=0,2,4$ 时，总收入 $R=0,6,8$，试确定总收入 R 与产量 x 的函数关系.

解 设 $R=ax^2+bx+c$，a,b,c 待求，从 $R(0)=0$，$R(2)=6$，$R(4)=8$ 代入上式得方程组：

$$\begin{cases}c=0\\ 4a+2b+c=6\\ 16a+4b+c=8\end{cases}$$

解得
$$a=\frac{-1}{2},b=4,c=0$$

所以
$$R=\frac{-1}{2}x^2+4x$$

8. 判断下列函数的单调性：

(1)$y=3x-6$； (2)$y=2^{x-1}$； (3)$y=\log_a x$.

解 (1)任 $x_1,x_2\in(-\infty,+\infty)$，设 $x_2>x_1$，因

$$y(x_2)-y(x_1)=(3x_2-6)-(3x_1-6)=3(x_2-x_1)>0$$

即
$$y(x_2)>y(x_1)$$

所以该函数在$(-\infty,+\infty)$内严格单调递增.

(2)任 $x_1,x_2\in(-\infty,+\infty)$，设 $x_2>x_1$，因