

Quantale理论基础

韩胜伟 赵彬 编著



科学出版社

Quantale 理论基础

韩胜伟 赵 彬 编著

科 学 出 版 社

北 京

内 容 简 介

本书系统介绍 Quantale 和 Quantale 相关代数的基本理论及其应用,主要是作者十余年来研究工作的系统总结,同时也兼顾国际上此领域中的最新研究成果.全书共十章,具体内容包括:Quantale 的商结构与子结构、Quantale 的表示、核映射与余核映射、右侧幂等 Quantale 与下集 Quantale、Z-Quantale、序半群的 Quantale 完备化、Q-模糊集、模糊完备格、模糊 Quantale、Quantale 模、Quantale 代数、幂集 Quantale 代数以及 Quantale 代数同态等.

本书可作为格上拓扑、序代数、模糊数学等基础数学和理论计算机科学专业的研究生教材,也可供数学与计算机等相关专业的高年级本科生、教师与研究人员阅读参考.

图书在版编目(CIP)数据

Quantale 理论基础/韩胜伟,赵彬编著. —北京:科学出版社,2016.8

ISBN 978-7-03-049592-1

I. ①Q… II. ①韩… ②赵… III. ①抽象代数 IV. ①O153

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2016) 第 195009 号

责任编辑:李静科/责任校对:张凤琴

责任印制:张伟/封面设计:陈敬

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码:100717

<http://www.sciencep.com>

北京教图印刷有限公司 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2016年8月第 一 版 开本:720×1000 B5

2016年8月第一次印刷 印张:16 3/4

字数:340 000

定价:98.00 元

(如有印装质量问题,我社负责调换)

前 言

Mulvey 在 1986 年研究非交换 C^* -代数的谱时首次提出了 Quantale 的概念,其目的是为研究非交换的 C^* -代数提供格式刻画,并为量子力学提供新的数学模型^[1]. 对这种带有偏序代数结构的研究可以追溯到 20 世纪 30 年代 Ward 和 Dilworth 对剩余格的研究工作^[2-4]. Quantale 是一个带有满足结合律的二元运算“ $\&$ ”的完备格,且 $a\&_-$ 和 $_-\&a$ 均保任意并. 因此,Quantale 可以看作是 Locale 的一般化,即 Locale 在非交换意义下的一种外延扩展. Johnstone 关于 Frame 和 Locale 的研究著作 *Stone Spaces* 较为深远地影响了 Quantale 理论的发展^[5], Quantale 中的许多结构和概念都是在 Frame 理论的启发下引入的,是在更广泛集合结构上的一般化;同时,Quantale 也可以看作是量子逻辑的推广^[6-9],所以“Quantale”一词是由“Quantum logic”和“Locale”复合起来的合成词. Quantale 理论也是理论计算机科学的数学基础之一,与计算机语言的运算语义与符号语义相联系,刻画了进程语义中的各种观察等价^[10-13]. 由于 Quantale 具有丰富的序结构和代数结构,以及它与线性逻辑和计算机理论的紧密联系,因此受到了数学、逻辑和理论计算机科学领域众多学者的密切关注,已成为格上拓扑学的一个研究方向. 目前,Quantale 作为赋值格已广泛地应用于加强范畴、模糊集、模糊拓扑和模糊 Domain 的研究^[14-29].

Mulvey 和他的学生 Nawaz 在 20 世纪 80 年代对幂等 Quantale 进行了深入研究系统的研究,并对幂等 Quantale 在非交换的 C^* -代数方面的应用作了具体的探讨^[30]. 与此同时, Borceux, Bossche 和 Rosický 在这些方面也做了大量的工作^[31-34]. Niefield 和 Rosenthal 以范畴论为工具,对 Quantale 结构的代数性质作了一系列的研究^[35-39]. 文献 [30],[31],[34] 研究了 Quantale 上层结构和预层结构,这些研究工作可以看作是 Heyting 代数或 Frame 上层结构和预层结构的扩展. 文献 [40]—[43] 在一般的 Quantale 中研究了点的性质,并应用于 C^* -代数的不可约表示的研究. 文献 [44]—[48] 系统研究了 Quantale 的商结构和子结构,为进一步研究 Quantale 的内部结构提供了理论基础. 文献 [49]—[52] 研究了 Quantale 的范畴性质,刻画了 Quantale 范畴中的各种极限结构. 与范畴论、层论和 Topos 理论的结合是 Quantale 理论研究的又一生长点^[53-56].

为了给理论计算机科学中的并行计算理论和并行过程提供逻辑支持系统, Girard 在 1987 年提出了一种新的逻辑系统——线性逻辑系统^[57]. 紧接着他给出了这一逻辑系统的一个哲学上的解释^[58]. 1990 年, Yetter 在文献 [59] 中把 Quantale

理论应用到线性逻辑语义的研究中,首次建立了线性逻辑的“位相语义”与 Quantale 之间的联系,在此基础上提出了“Girard Quantale”,建立了线性逻辑的代数模型. Girard Quantale 对线性逻辑的作用就像 Heyting 代数对直觉逻辑的作用一样,在这个事实的影响下不同类型的 Quantale 被应用于线性逻辑的研究^[60–65]. 自此以后,Quantale 理论受到了众多逻辑学家和理论计算机科学家的广泛关注^[10,11,66–77].

1990 年, Rosenthal 出版了一本关于 Quantale 理论的研究专著 *Quantale and Their Applications*, 这也是迄今为止唯一的一本较为系统地介绍 Quantale 理论的专著^[44]. 该书主要介绍了 Quantale 的内部结构以及 Quantale 在环的理想、 C^* -代数和线性逻辑方面的应用,这对 Quantale 理论的研究和应用提供了理论基础. 在其随后的研究中,许多学者对不同类型的 Quantale,以及 Quantale 在不同领域中的应用做了大量而又系统的工作^[78–94]. 自从 Mulvey 提出 Quantale 概念的第一篇论文起,距今已经三十年. 在这三十年中,Quantale 理论的研究和应用得到了较大的发展,其思想和方法对数学、逻辑以及理论计算机科学的若干分支产生了较为深远的影响. Quantale 理论的应用研究主要有以下四个方面.

(1) Quantale 理论在环的理想理论研究中的应用. 随着 Ward 和 Dilworth 关于剩余格的研究工作,利用 Quantale 对环理想的研究被广泛地进行,如 Niefeld 与 Rosenthal 在交换情形下的研究工作^[35,36,95,96]和在非交换环的情形下的研究工作^[37]. 文献 [37] 在研究非交换环的理想理论上发展了商 Quantale 和子 Quantale 理论,并且进一步应用于非交换环理想的谱结构的研究. 文献 [35],[95],[96] 利用 Quantale 研究了 $\text{Idl}(R)$ (R 是环) 的代数性质和 $\text{Spec}(R)$ 的拓扑性质之间的联系. 文献 [83] 研究了凝聚式 Quantale 上的 Gabriel 拓扑,并把有关结构应用于环的谱结构的研究. 另外, Niefeld, Rosický 和 Paseka 在这方面也做了大量的工作^[32,39,90,91].

(2) Quantale 理论在非交换的 C^* -代数研究中的应用. 一个非交换 C^* -代数的不可约表示空间没有被经典的拓扑空间理论充分刻画. 文献 [1] 提出了 C^* -代数的谱 (是交换情形下的 Localic 谱的一般化), 在一定意义上弥补了上述研究的不足,并且在文献 [97]—[99] 的基础上,建立了一种代数框架. 文献 [42],[43] 进一步把 Quantale 理论应用于 C^* -代数的研究,并且发展了 Quantale 理论. 文献 [100] 给出 Postliminary C^* -代数是 由其闭的右理想构成的 Quantale 所决定的,这些深刻的结果奠定了 Quantale 理论在 C^* -代数研究中的地位. 文献 [30],[32] 把幂等 Quantale 理论应用于非交换的 C^* -代数的研究.

(3) Quantale 理论在线性逻辑和理论计算机科学研究中的应用. Yetter 在文献 [59] 中这样描述 Quantale 与线性逻辑之间的关系:

$$\text{Quantale} + \text{A representable duality} = \text{Linear Logic}.$$

由此可以看出 Quantale 理论与线性逻辑之间的密切联系, 尤其是 Girard Quantale 对线性逻辑的研究更为重要, 这方面的工作主要是由 Yetter 完成的^[59], 其他学者也在这方面也做了大量的研究工作^[60–68]. 在理论计算机科学中, 不同的进程观察等价的刻画会形成不同的结构框架. 文献 [10] 基于 Quantale 引入了一个代数框架, 能够很好地统一处理和刻画不同的进程观察等价. 文献 [11]–[13] 把 Quantale 与计算机语言的运算语义和符号语义相联系, 刻画了进程语义中的各种观察等价.

(4) Quantale 理论在模糊 Domain 和加强范畴研究中的应用. Domain 理论是由 Scott 在 20 世纪 70 年代初开创的^[101], 其基本目的是为 Strachey 的指称语义学提供数学模型, 它是理论计算机科学的数学基础之一. 随着计算机与网络的迅速发展, 对非顺序程序语言 (如非确定性语言、分布式或并发式语言) 的需求越来越多, 经典 Domain 理论中的二元序关系所表达的仅仅是元素之间的定性信息, 一般难以体现实际计算所需的定量信息, 特别是计算量之间的数量差别. 于是, 许多学者在 20 世纪 70 年代末 80 年代初开始用度量空间着手建立量化的语义模型^[102,103]. 现有的量化 Domain 理论主要包括: Smyth, Sünderhauf 等的拟一致结构^[104,105], Rutten 等的广义 (超) 度量理论^[106,107], Flagg 等的连续空间理论^[108]. 为了表示信息之间的可计算程度, 我国学者樊磊基于交换的单位 Quantale (或完备的剩余格) 介绍了模糊序的概念, 并借助于模糊序研究了模糊 Domain (或量化 Domain)^[109]. 从模糊序的角度, 对模糊 Domain 的研究已经取得了丰富的研究成果^[23–29,110,111]. 模糊 Domain 是 Domain 理论一个新的研究分支, 也是目前 Domain 理论研究的热点之一, 其目的主要是给并发式语言提供量化模型. 由于经典的偏序集是特殊的 Ω -范畴^[112], 于是 Wager 试图在 Ω -范畴的框架下, 建立一个统一的量化 Domain 体系^[113,114]. 另外, 我国学者赖洪亮和张德学在关于 Ω -范畴的研究中也做出了出色的工作^[16,17,20,115–117].

在 Quantale 理论的发展过程中, 与 Quantale 相关的代数结构 —— Quantale 模相继被提出. Quantale 模是 Quantale 的一种推广, 它的引入有着很强的应用背景和理论研究动机. Abramsky 和 Vickers 为了描述理论计算机中的进程语义首次提出了 Quantale 模的概念^[10]; Paseka 则从环模的角度引入了 Quantale 模, 并研究了它的基本性质^[118–120]; Kruml 利用 Quantale 模研究了 Quantale 的单纯性和分离性^[41,52,85]. 文献 [121],[122] 则研究了 Quantale 模的范畴性质. 目前, 值得关注的是 Quantale 模已被应用于理论计算机、逻辑演绎系统和图像处理的研究^[10,11,123–127]. 受环代数的启发, 文献 [128]–[130] 引入了单位 Quantale 上的代数, 称为 Quantale 代数或简称 Q -代数. 文献 [131] 则在一般的 Quantale 上引入了 Quantale 代数的概念, 并给出了从不同对象构造 Quantale 代数的具体方法. 文献 [128],[132]–[134] 研究了不同 Quantale 代数的各种表示问题, 文献 [135],[136] 则对幂集 Quantale 代数进行了系统深入的研究, 并给出了幂集 Quantale 代数同态的一般刻画, 文献

[111],[137],[138] 对 Quantale 代数上的核映射和余核映射进行了深入的讨论, 而文献 [139] 对 Quantale 代数范畴进行了初步研究. 在文献 [140] 中, Stell 则从数学形态学的角度说明了 Quantale 和 Quantale 模的重要性, 然而对 Quantale 模和 Quantale 代数的研究还没有深入展开, 还有一系列的问题需要解决.

自从 Rosenthal 关于 Quantale 理论的研究专著 *Quantale and Their Applications* 出版以来, 对 Quantale 理论的研究引起了国内外众多学者的广泛关注, 总的看来, 有关 Quantale 理论的研究主要分为两个方面: 其一是利用格论、拓扑学和范畴论的思想方法来研究 Quantale 内部结构和 Quantale 相关结构的代数性、拓扑性和范畴性; 其二是 Quantale 理论在其他学科中的应用. 总之, Quantale 理论作为格上拓扑学中的一个研究分支, 它有较强的理论研究动因和较好的应用前景. 对 Quantale 理论的研究必将进一步推动其他数学学科和理论计算机学科的发展, 同时由于 Quantale 与其他学科的交叉、渗透, 所以 Quantale 的研究内容越来越丰富.

前面提到的关于 Quantale 理论的研究著作 *Quantale and Their Applications* 出版于二十多年前. 近十年来, 我国学者对 Quantale 理论的研究也做出了大量的工作^[13,45-51,60,61,141-240]. 然而, 迄今为止我国还没有一部介绍 Quantale 理论的著作, 为了弥补这点不足, 我们就自告奋勇来编写这本书. 本书系统地论述了 Quantale 理论的基本内容, 其中包括了近十年来我们的研究成果, 同时也收录了国际上此领域中的最新部分研究内容. 本书总共十章, 其内容安排如下:

第 1 章简单介绍范畴论、格论中的基本概念和结论, 可以使读者顺利地阅读后面的章节.

第 2 章首先介绍 Quantale 的基本概念和相关性质, 给出大量关于 Quantale 的例子. 其次, 介绍 Quantale 同态的概念, 并研究它的基本性质; 同时, 讨论一类特殊的 Quantale——凝聚式 Quantale, 给出它的 m -半格表示. 最后, 我们研究 Quantale 的关系表示, 以及关系 Quantale.

第 3 章介绍 Quantale 的内部结构: 商结构和子结构. 首先, 介绍 Quantale 上的核映射, 研究它的基本性质, 并建立核映射与 Quantale 同余的一一对应关系; 利用核映射研究可换 Quantale 商、右侧 Quantale 商、幂等 Quantale 商和局部 Quantale 商, 给出单纯 Quantale 的等价刻画. 其次, 介绍 Quantale 上的余核映射, 并研究子 Quantale 与余核映射的对应关系; 同时, 讨论子 Quantale 的数量问题, 给出平凡 Quantale 的一般刻画. 最后, 建立 Quantale 上的理想与同余的对应关系.

第 4 章介绍 Quantale 上核映射与余核映射的关系. 首先, 研究单位 Quantale $Q[e]$ 的结构性质, 利用单位 Quantale $Q[e]$ 讨论单位 Quantale 范畴与 Quantale 范畴之间的关系. 其次, 考虑核映射和余核映射在单位 Quantale 上的扩张问题, 给出核映射和理想余核的等式刻画. 最后, 为讨论核映射与余核映射的对应关系, 我们介绍预对偶 Quantale, 并讨论它的基本性质, 在预对偶 Quantale 上建立核映射和

余核映射的对应关系.

第 5 章介绍右侧幂等 Quantale. 主要研究右侧幂等 Quantale 的基本性质, 以及右侧幂等 Quantale 上的核映射和理想余核. 我们在右侧幂等 Quantale 的前提下, 介绍空间式 Quantale, 并给出空间式 Quantale 的等价刻画. 最后, 考虑右侧幂等 Quantale 的表示问题, 给出右侧幂等 Quantale 的两个表示: 拓扑表示和量子空间表示.

第 6 章介绍下集 Quantale. 主要研究下集 Quantale 的基本性质, 利用下集 Quantale 给出超预凝聚式 Quantale 的表示; 同时, 借助于序半群之间的关系, 刻画下集 Quantale 之间的同态; 最后, 利用下集 Quantale, 讨论序半群范畴与 Quantale 范畴之间的关系.

第 7 章介绍 Z -Quantale. 受 Z -Frame 概念的启发, 我们首先介绍 Z -Quantale 的概念, 并研究它的基本性质. 在此基础上, 讨论稳定的 Z -连续序半群、凝聚式 Z -Quantale, 以及 Z -Quantale 范畴中的 E -投射对象.

第 8 章介绍序半群的 Quantale 完备化. 首先, 介绍 Quantale 上子集之间的三种不同等同关系. 其次, 介绍序半群上的闭包算子, 同时引入序半群的 Quantale 完备化, 并利用序半群上的闭包算子给出序半群 Quantale 完备化的一般刻画. 最后, 研究序半群 Quantale 完备化的应用: 其一, 利用序半群的 Quantale 完备讨论序半群到 Quantale 的嵌入问题; 其二, 利用序半群的 Quantale 完备讨论序半群同余的正则扩张; 利用序半群的 Quantale 完备和 Quantale 上子集之间的等同关系, 研究序半群上的等同关系.

第 9 章介绍 Q -模糊集. 用单位 Quantale Q 代替实数单位区间 $[0, 1]$ 定义了集合上的广义模糊集, 称为 Q -模糊集. 主要研究序半群上的 Q -模糊集, 以及由 Q -模糊集构成的 Quantale. 最后讨论序半群上的素 Q -模糊理想和完全素 Q -模糊理想, 从而推广文献 [241] 的结论. 本章的结论是第 10 章中构造自由 Q -代数的基础.

第 10 章介绍 Quantale 模和 Quantale 代数. 首先, 引入 Quantale 模的概念, 并研究它的基本性质, 然后给出自由 Quantale 模和自由单位 Quantale 模的具体构造. 其次, 在模糊序的基础上介绍模糊完备格, 讨论模糊完备格与单位 Quantale 模的关系. 同时, 在 Quantale 模的基础上, 引入 Quantale 代数的概念, 研究 Quantale 代数的相关性质, 以及自由 Quantale 代数的具体构造; 考察 Quantale 代数的三种表示: 序半群表示、模表示和关系表示; 研究序半群上的幂集 Quantale 代数和幂集 Quantale 代数同态, 在此基础上建立一种新的序半群范畴 $OSGRP$, 并讨论 $OSGRP$ 与单位 Quantale 代数范畴 $Q-UAlg$ 之间的关系. 最后, 研究模糊 Quantale, 讨论模糊 Quantale 与单位 Quantale 代数之间的关系.

本书的第 1 章—第 4 章, 第 6 章—第 8 章和第 5 章的部分内容在 2010 年已完成书稿, 各部分内容都向研究生讲授过, 第 9 章和第 10 章是作者新完成的

科研成果, 5.3 节收录了 Höhle 2015 年发表在 *Semigroup Forum* 上的最新研究成果^[242]. 限于书的篇幅, 本书没有收录有关 Quantale 的所有研究内容, 例如, Quantale 的范畴性质、Quantale 矩阵、Quantale 上的层结构等. 感兴趣的读者可以参考文献 [31],[49]—[54],[56],[146],[175]—[177],[243].

2010 年以来参加听课或讨论的研究生有汪开云、马崛、李维、王蕊、刘敏、张月玲、郭立花、赵娜娜、韩艳伟、高嘉凌、周欣、孙鹏娟、陈晓婷、马娜娜、高超、王李峰、刘颖、赵文慧、贺鹏飞、夏常春、鲁静、折海芳、单晓伟、李艳、贾巧会、张苗苗、蔺杰、刘慧敏、王伦磊、侯如乐、李冰、董倩、吴苏朋、李瑞、刘慧、武全、吴涛、顾晓娟、邬宏伟、王海伟、赵欣欣等. 他们对此书做了若干错误的纠正, 这里也向他们表示感谢. 特别是汪开云、马娜娜、鲁静、夏常春、刘慧和武全, 他们承担了部分书稿的校对工作.

在本书的撰写过程中, 作者得到了许多老师、同事、同仁的关心和帮助, 在此特别感谢山东大学的刘华文教授, 湖南大学的李庆国教授, 西北大学的辛小龙教授, 江西师范大学的覃锋教授, 南阳师范学院的王顺钦教授, 以及陕西师范大学的李永明教授、李生刚教授、吴洪博教授、周红军教授和刘妮副教授, 他们阅读了部分书稿, 提出了诸多有益的建议. 同时, 也感谢科学出版社数理分社赵彦超与李静科编辑高效而细致的工作, 使得本书如期出版.

本书的写作得到了国家自然科学基金重点项目 (No. 11531009)、陕西省自然科学基金基础研究计划项目 (No. 2015JM2010)、陕西师范大学创新团队项目 (No. GK20151001) 及陕西师范大学 2016 年优秀成果培育计划项目的资助.

本书是作者十余年来关于 Quantale 理论研究工作的系统总结, 书中的大部分内容都已正式发表, 并且各部分都经过多次讨论. 尽管如此, 限于作者的水平, 书中的不妥之处乃至谬误之处都在所难免, 希望各位专家与读者提出宝贵意见.

韩胜伟 赵 彬

2016 年 4 月于陕西师范大学

目 录

第 1 章	预备知识	1
1.1	范畴	1
1.2	偏序集	8
1.3	格与 Frame	11
第 2 章	Quantale	15
2.1	Quantale 的基本概念	15
2.2	关于 Quantale 的例子	22
2.3	Quantale 同态	24
2.4	凝聚式 Quantale	26
2.5	Quantale 的关系表示	27
2.5.1	左 (右) 蕴涵映射	27
2.5.2	左 (右) 变换	34
2.5.3	关系 Quantale	35
第 3 章	Quantale 的商结构与子结构	40
3.1	Quantale 上的核映射	40
3.1.1	核映射	40
3.1.2	关于核映射的例子	43
3.1.3	Quantale 同余	46
3.2	Quantale 商	50
3.2.1	可换 Quantale 商	50
3.2.2	右侧 Quantale 商	53
3.2.3	幂等 Quantale 商	54
3.2.4	局部 Quantale 商	55
3.3	单纯 Quantale	58
3.4	子 Quantale	60
3.5	Quantale 上的余核映射	65
3.5.1	余核映射	65
3.5.2	理想余核	69
3.5.3	局部余核映射	72
3.6	平凡 Quantale	75

3.7	理想与同余的关系	80
第 4 章	Quantale 核映射与余核映射的关系	83
4.1	单位 Quantale $Q[e]$	83
4.2	Quantale 核映射与余核映射的扩张	89
4.3	预对偶 Quantale	96
4.4	核映射与余核映射的关系	103
第 5 章	右侧幂等 Quantale	108
5.1	右侧幂等 Quantale 的基本性质	108
5.1.1	右侧幂等 Quantale 上元素的性质	108
5.1.2	右侧幂等 Quantale 上的核映射	109
5.1.3	右侧幂等 Quantale 上的理想余核	113
5.2	空间式 Quantale	113
5.3	右侧幂等 Quantale 的表示	116
5.3.1	右侧幂等 Quantale 的拓扑表示	116
5.3.2	右侧幂等 Quantale 的量子空间表示	119
第 6 章	下集 Quantale	126
6.1	下集 Quantale 的性质	126
6.2	超预凝聚式 Quantale	130
6.3	下集 Quantale 之间的同态	132
6.4	序半群范畴 $OSGrp$	138
第 7 章	Z -Quantale	141
7.1	Z -Quantale 的概念	141
7.2	稳定的 Z -连续序半群	145
7.3	凝聚式 Z -Quantale	148
7.4	Z -Quantale 范畴中的 E -投射对象	150
第 8 章	序半群的 Quantale 完备化	153
8.1	Quantale 上的等同关系	153
8.2	序半群上的闭包算子	155
8.3	序半群的 Quantale 完备化	157
8.4	Quantale 完备化的应用	164
8.4.1	序半群的嵌入	164
8.4.2	商序半群	168
8.4.3	序半群上的等同关系	172
第 9 章	Q -模糊集	174
9.1	Q -模糊集及其性质	174

9.2	序半群上的 Q -模糊集	175
9.3	素 Q -模糊理想和完全素 Q -模糊理想	182
第 10 章	Quantale 代数	186
10.1	Quantale 模	186
10.1.1	Quantale 模及其性质	186
10.1.2	单位 Q -模	189
10.2	模糊完备格	192
10.3	Quantale 代数	199
10.3.1	Q -代数及其基本性质	199
10.3.2	自由单位 Q -代数	201
10.3.3	自由 Q -代数	204
10.4	Q -代数的表示定理	207
10.4.1	Q -代数的序半群表示	207
10.4.2	Q -代数的模表示	210
10.4.3	Q -代数的关系表示	211
10.5	幂集 Q -代数	218
10.5.1	序半群上的幂集 Q -代数	218
10.5.2	幂集 Q -代数同态	222
10.6	一种新的序半群范畴 OSGRP	231
10.7	模糊 Quantale	233
10.8	关于 Quantale 代数和模糊 Quantale 的进一步研究	236
参考文献		238
索引		252

第1章 预备知识

关于范畴论和格论的内容非常丰富,本章主要介绍范畴论与格论中的基本概念和结论,可以使读者顺利地阅读后面的章节.熟悉范畴论与格论的读者可以跳过本章,直接阅读第2章.本章未提及的概念和结论请参见文献 [244]—[249].

1.1 范 畴

定义 1.1.1 一个范畴是一个五元组 $\mathcal{C} = (\mathcal{O}, \mathcal{M}, \text{dom}, \text{cod}, \circ)$, 其中

- (1) $\mathcal{O}$ 是一个对象类, 其成员称为 $\mathcal{C}$ -对象.
- (2) $\mathcal{M}$ 是一个态射类, 其成员称为 $\mathcal{C}$ -态射.
- (3) dom 和 cod 是由 $\mathcal{M}$ 到 $\mathcal{O}$ 的映射, 其中, $\text{dom}(f)$ 称为 f 的域, $\text{cod}(f)$ 称为 f 的上域.
- (4) $\circ$ 是一个由

$$D = \{(f, g) \mid f, g \in \mathcal{M}, \text{dom}(f) = \text{cod}(g)\}$$

到 $\mathcal{M}$ 的映射, 称为 $\mathcal{C}$ 的结合律, 使得下列条件成立:

- (i) 匹配条件: 若 $f \circ g$ 有定义, 则 $\text{dom}(f \circ g) = \text{dom}(g)$ 且 $\text{cod}(f \circ g) = \text{cod}(f)$.
- (ii) 结合条件: 若 $f \circ g$ 和 $h \circ f$ 有定义, 则 $h \circ (f \circ g) = (h \circ f) \circ g$.
- (iii) 单位元存在条件: 对于任意 $\mathcal{C}$ -对象 A , 存在 $\mathcal{C}$ -态射 1_A , 使得 $\text{dom}(1_A) = A = \text{cod}(1_A)$ 且
 - (a) 若 $f \circ 1_A$ 有定义, 则 $f \circ 1_A = f$;
 - (b) 若 $g \circ 1_A$ 有定义, 则 $g \circ 1_A = g$.
- (iv) 态射类小性条件: 对于任意 $\mathcal{C}$ -对象对 (A, B)

$$\text{hom}_{\mathcal{C}}(A, B) = \{f \in \mathcal{M} \mid \text{dom}(f) = A, \text{cod}(f) = B\}$$

是一个集合.

设 $\mathcal{C}$ 是范畴, 用 $\text{Ob}(\mathcal{C})$ 表示 $\mathcal{C}$ -对象类, 用 $\text{Mor}(\mathcal{C})$ 表示 $\mathcal{C}$ -态射类. 文献 [244] 给出了范畴的不同定义方式, 并证明了它们是相互等价的. 为了方便, 我们也用二元组 $(\mathcal{M}, \circ)$ 表示范畴.

定义 1.1.2 设 $C = (\mathcal{O}, \mathcal{M}, \text{dom}, \text{cod}, \circ)$ 是范畴. 定义 $C^{op} = (\mathcal{O}', \mathcal{M}', \text{dom}', \text{cod}', \circ')$ 为

$$\mathcal{O}' = \mathcal{O}, \quad \mathcal{M}' = \mathcal{M}, \quad \text{dom}'(f) = \text{cod}(f), \quad \text{cod}'(f) = \text{dom}(f), \quad f \circ' g = g \circ f.$$

则称 C^{op} 为 C 的**反范畴** (opposite category) 或 **对偶范畴** (dual category).

命题 1.1.3 对于任一范畴 C , 其对偶范畴 C^{op} 均为一个范畴.

定义 1.1.4 范畴 B 称为范畴 C 的一个**子范畴**, 如果 B 满足下列条件:

- (1) $\mathcal{O}b(B) \subseteq \mathcal{O}b(C)$;
- (2) $\mathcal{M}or(B) \subseteq \mathcal{M}or(C)$;
- (3) B 中的 $\text{dom}, \text{cod}, \circ$ 是 C 中相应函数的限制;
- (4) 每个 B 单位元均是 C 单位元.

定义 1.1.5 范畴 C 的子范畴 B 称为**满的**, 如果对于任意 $A, B \in \mathcal{O}b(B)$, $\text{hom}_B(A, B) = \text{hom}_C(A, B)$.

定义 1.1.6 范畴 C 被称为**小范畴**, 如果 $\mathcal{O}b(C)$ 是集合.

命题 1.1.7 对于范畴中的任意对象, 其单位元是唯一的.

定义 1.1.8 C -态射 $f: A \rightarrow B$ 称为 C 中的**截节**, 若 f 有左逆, 即存在 C -态射 g , 使得 $g \circ f = \text{id}_A$. 对偶地, 若 f 有右逆, 即存在 C -态射 g , 使得 $f \circ g = \text{id}_B$, 则称 f 为 C 中的**收缩**. 若 f 既是截节又是收缩, 则称 f 是 C 的一个**同构**. 如果存在同构 $f: A \rightarrow B$, 则称 A 与 B 同构, 记为 $A \cong B$.

定义 1.1.9 C -态射 $f: A \rightarrow B$ 称为一个 C 中**单态射**或 **C -单态射**, 如果对于任意 C -态射 h, k , 使得 $f \circ h = f \circ k$, 均有 $h = k$. 对偶地, 如果对于任意 C -态射 h, k , 使得 $h \circ f = k \circ f$, 均有 $h = k$, 则称 f 为 **C -满态射**. 若 f 既是单态射又是满态射, 则称 f 是范畴 C 中的一个**双态射**.

定义 1.1.10 设 B 为范畴 C 中一对象, B 的一个**子对象**是一个序对 (A, f) , 其中 $f: A \rightarrow B$ 是单态射.

定义 1.1.11 设 B 为范畴 C 中一对象, B 的一个**商对象**是一个序对 (f, A) , 其中 $f: B \rightarrow A$ 是满态射.

定义 1.1.12 称范畴 C 为**良幂的**, 如果每个 C -对象有一个子对象代表类是集合.

定义 1.1.13 称范畴 C 为**余良幂的**, 如果每个 C -对象有一个商对象代表类是集合.

定义 1.1.14 一个 C -态射 e 称为**极端单态射**, 若 e 满足下面两个条件:

- (1) e 是单态射;
- (2) (极性条件) 若 $e = f \circ m$, 当 m 是满态射时, 则 m 是同构.

对偶地, 一个 C -态射 e 称为**极端满态射**, 若 e 满足下面两个条件:

(1) e 是满态射;

(2) (极性条件) 若 $e = m \circ f$, 当 m 是单态射时, 则 m 是同构.

定义 1.1.15 范畴 C 的一个源泉是一个序对 $(A, (f_i)_{i \in I})$, 其中 A 为一对象, $\{f_i: A \rightarrow A_i \mid i \in I\}$ 为一族以 A 为定义域的态射. 称 A 为这个源泉的定义域, 称 $(A_i)_{i \in I}$ 为这个源泉的上域.

定义 1.1.16 设 $f, g: A \rightarrow B$ 是 C -态射. 二元组 (E, e) 称为 f, g 在 C 中的一个等子, 若 $E \in \mathcal{Ob}(C)$ 且

(1) $e: E \rightarrow A$ 是 C -态射;

(2) $f \circ e = g \circ e$;

(3) $\forall E' \in \mathcal{Ob}(C), \forall e': E' \rightarrow A \in \mathcal{Mor}(C)$ 使得 $f \circ e' = g \circ e'$, 存在唯一的 C -态射 $\bar{e}: E' \rightarrow E$ 使得 $e' = e \circ \bar{e}$, 即图 1.1 可换.

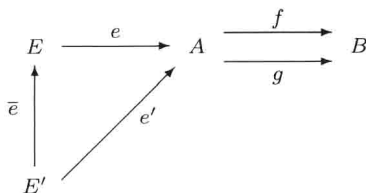


图 1.1

对偶地, 可定义余等子的概念.

定义 1.1.17 设 $e: E \rightarrow A$ 是 C -态射, 如果存在 $f, g \in \mathcal{Mor}(C)$, 使得 (E, e) 是 (f, g) 的等子, 则称 e 是范畴 C 的正规单态射. 对偶地, 设 $e: B \rightarrow E$ 是一个 C -态射, 如果存在 $f, g \in \mathcal{Mor}(C)$ 使得 (e, E) 是 (f, g) 的余等子, 则称 e 是范畴 C 的正规满态射.

定义 1.1.18 一族 C -对象 $\{A_i\}_{i \in I}$ 的乘积是一个二元组 $\left(\prod_{i \in I} A_i, \{\pi_i\}_{i \in I}\right)$, 并且满足下列条件:

(1) $\prod_{i \in I} A_i$ 是 C -对象;

(2) $\forall i \in I, \pi_i: \prod_{i \in I} A_i \rightarrow A_i$ 是一 C -态射;

(3) 对于任意二元组 $(C, \{f_i\}_{i \in I})$, 其中 $C \in \mathcal{Ob}(C), \forall i \in I, f_i: C \rightarrow A_i$ 是 C -态射, 存在唯一的 C -态射 $h: C \rightarrow \prod_{i \in I} A_i$ 使图 1.2 可换.

对偶地, 可定义任意多个对象的余乘积.

定义 1.1.19 设 C 和 D 是范畴, 一个由 C 到 D 的函子为一个三元组 (C, F, D) , 其中 F 为一由 $\mathcal{Mor}(C)$ 到 $\mathcal{Mor}(D)$ 的映射, 且满足:

(1) F 保单位元;

(2) F 保复合运算.

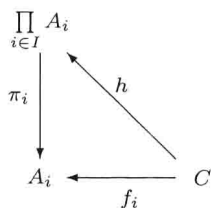


图 1.2

函子也经常表示成 $F: C \rightarrow D$ 或 $C \xrightarrow{F} D$ 的形式. 由于范畴中的单位和对象能建立一一对应关系. 因此, 范畴之间的函子 F 诱导一个由 $\mathcal{O}b(C)$ 到 $\mathcal{O}b(D)$ 的函数 (仍记为 F), 使 $F(1_A) = 1_{F(A)}$. 设 B 是 C 的子范畴, 则含入映射 $I: B \rightarrow C$ 是函子.

定义 1.1.20 设 I 和 C 是范畴, $D: I \rightarrow C$ 是函子. 如果 C 中的二元组 $(L, \{l_i\}_{i \in \mathcal{O}b(I)})$ 满足下列条件:

(1) $\forall i \in \mathcal{O}b(I), l_i: L \rightarrow D(i)$ 是 C -态射;

(2) $\forall m: i \rightarrow j \in \mathcal{M}or(I)$, 图 1.3 可换.

则称 $(L, \{l_i\}_{i \in \mathcal{O}b(I)})$ 是函子 D 的自然源泉.

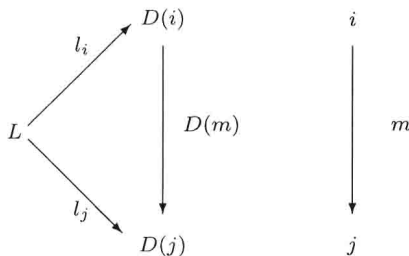


图 1.3

对偶地, 可定义自然渗漏的概念.

定义 1.1.21 设 $D: I \rightarrow C$ 是函子, 则 D 的自然源泉 $(L, \{l_i\}_{i \in \mathcal{O}b(I)})$ 称为 D 的一个极限, 如果对于 D 的任一自然源泉 $(\hat{L}, \{\hat{l}_i\}_{i \in \mathcal{O}b(I)})$, 存在唯一的 C -态射 $h: \hat{L} \rightarrow L$, 使得 $\forall i \in \mathcal{O}b(I)$, 图 1.4 可换.

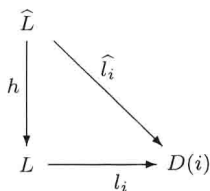


图 1.4

对偶地, 可定义余极限的概念.

定义 1.1.22 设 I 是一个定向集, $F: I \rightarrow \mathcal{C}$ 是一个函子, 则称 F 为范畴 $\mathcal{C}$ 中的一个定向系统. 函子 F 的余极限称为定向系统 $F: I \rightarrow \mathcal{C}$ 的定向极限.

用 $\mathbf{Set}$ 表示以集合为对象和映射为态射的范畴, 称为集合范畴.

例 1.1.23 (1) 对于任意范畴 $\mathcal{C}$, 存在单位函子 $id_{\mathcal{C}}: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$, 其中

$$id_{\mathcal{C}}(A \xrightarrow{f} B) = A \xrightarrow{f} B.$$

(2) 设 $\mathcal{A}$ 是范畴, 则 $\forall A \in \mathcal{O}b(\mathcal{A})$, 存在协变 hom 函子 $hom_{\mathcal{A}}(A, -): \mathcal{A} \rightarrow \mathbf{Set}$, 其中 $hom_{\mathcal{A}}(A, -)(B) = hom_{\mathcal{A}}(A, B)$, $hom_{\mathcal{A}}(A, -)(B \xrightarrow{f} C) = hom_{\mathcal{A}}(A, B) \xrightarrow{hom_{\mathcal{A}}(A, f)} hom_{\mathcal{A}}(A, C)$, $hom_{\mathcal{A}}(A, f)(g) = f \circ g$.

(3) 设 $\mathcal{A}$ 是范畴, 则 $\forall A \in \mathcal{O}b(\mathcal{A})$, 存在反变 hom 函子 $hom_{\mathcal{A}}(-, A): \mathcal{A}^{op} \rightarrow \mathbf{Set}$, 其中 $hom_{\mathcal{A}}(-, A)(B) = hom_{\mathcal{A}}(B, A)$, $hom_{\mathcal{A}}(-, A)(B \xrightarrow{f} C) = hom_{\mathcal{A}}(B, A) \xrightarrow{hom_{\mathcal{A}}(f, A)} hom_{\mathcal{A}}(C, A)$, $hom_{\mathcal{A}}(f, A)(g) = g \circ f$.

命题 1.1.24 设 $F: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ 和 $G: \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}$ 是函子. 定义映射 $G \circ F$ 如下:

$$(G \circ F)(A \xrightarrow{f} A') = G(F(A)) \xrightarrow{G(F(f))} G(F(A')),$$

则 $G \circ F$ 是函子, 称为函子 G 和 F 的复合.

定义 1.1.25 一个函子 $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ 被称为同构函子, 如果存在函子 $G: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$, 使得 $G \circ F = id_{\mathcal{C}}$, $F \circ G = id_{\mathcal{D}}$. 若存在同构函子 $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$, 则称范畴 $\mathcal{C}$ 和 $\mathcal{D}$ 同构.

定义 1.1.26 设 $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ 是函子.

(1) F 是满的 (full), 如果 F 在任意 hom 集上的限制 $F \Big|_{hom_{\mathcal{C}}(A, B)}^{hom_{\mathcal{D}}(F(A), F(B))}$ 是满的.

(2) F 是诚实的 (faithful), 如果 F 在任意 hom 集上的限制 $F \Big|_{hom_{\mathcal{C}}(A, B)}^{hom_{\mathcal{D}}(F(A), F(B))}$ 是单的.

(3) F 是一个嵌入 (embedding), 如果 $F: Mor(\mathcal{C}) \rightarrow Mor(\mathcal{D})$ 是一个单值函数.

(4) F 是稠密的 (dense), 如果 $\forall D \in \mathcal{O}b(\mathcal{D})$, 存在 $C \in \mathcal{O}b(\mathcal{C})$, 使得 $F(C) \cong D$.

(5) F 是等价函子, 如果 F 是满的、诚实的和稠密的.

如果存在等价函子 $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$, 则称范畴 $\mathcal{C}$ 和 $\mathcal{D}$ 等价.

注 1.1.27 设 $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ 是函子, 则

(1) F 是嵌入 $\iff F$ 是诚实的, 且 $F: \mathcal{O}b(\mathcal{C}) \rightarrow \mathcal{O}b(\mathcal{D})$ 是单的.

(2) F 是同构 $\iff F: Mor(\mathcal{C}) \rightarrow Mor(\mathcal{D})$ 是双射 $\iff F$ 是满的、诚实的, 并且 $F: \mathcal{O}b(\mathcal{C}) \rightarrow \mathcal{O}b(\mathcal{D})$ 是双射.