iCourse · 教材

高等农林院校基础课程系列

自主创新
方法先行

高等数学（下册）

主编　吴瑞武　吕雄

高等教育出版社

iCourse · 教材

高等农林院校基础课程系列

自主创新
方法先行

高等数学（下册）

主　编　吴瑞武　吕　雄

副主编　吴国荣　郑大川　杨建红　刘　雯　杨丽英
　　　　赵　军　吴国栋　艾世猛　朱艳霞　张晓梅

高等教育出版社 · 北京

内容提要

全书分为上、下两册，下册包括向量代数与空间解析几何、多元函数的微分学、多元函数微分学的应用、重积分、曲线积分与曲面积分、无穷级数六章。各章精选了一定数量的习题与自测题。为了巩固和拓展纸质教材内容，本书配套建设了数字化教学资源，包括问一问、典型例题、动画演示、数学家小传等。

本书着力探索教学改革，体现创新性与资源共享，同时兼顾科学性与系统性，注意理论联系实际，力求简明流畅、注重能力培养，突出基本思想和方法，可作为高等学校理工类专业的高等数学课程的教材或教学参考书，也可作为科技人员参考书。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学. 下册/吴瑞武，吕雄主编. --北京：高等教育出版社，2016.10

iCourse·教材

ISBN 978-7-04-045697-4

Ⅰ. ①高… Ⅱ. ①吴… ②吕… Ⅲ. ①高等数学-高等学校-教材 Ⅳ. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2016)第 136913 号

项目策划 王 瑜 李光跃 陈琪琳 李艳馥 吴雪梅

策划编辑 杨 帆 **责任编辑** 杨 帆 **封面设计** 王 琰 **责任印制** 毛斯璐

出版发行	高等教育出版社	网 址	http://www.hep.edu.cn
社 址	北京市西城区德外大街4号		http://www.hep.com.cn
邮政编码	100120	网上订购	http://www.hepmall.com.cn
印 刷	国防工业出版社印刷厂		http://www.hepmall.com
开 本	850mm×1168mm 1/16		http://www.hepmall.cn
印 张	15.25		
字 数	360千字	版 次	2016年10月第1版
购书热线	010-58581118	印 次	2016年10月第1次印刷
咨询电话	400-810-0598	定 价	29.80元

物 料 号 45697-00

目　录

第五章

向量代数与空间解析几何

空间解析几何是学习多元函数微积分的基础知识，它通过建立空间直角坐标系，使得空间的点与三元有序数组之间发生一一对应关系，于是三维空间中的几何图形就可用代数方程来表达，从而可用代数的方法去研究几何问题.

第一节　坐标与向量

一、空间直角坐标系

动画演示 5.1
右手法则

在空间中取定一点 O，以 O 为原点作三条两两互相垂直的数轴，这三条数轴分别称为 x 轴（横轴）、y 轴（纵轴）、z 轴（竖轴），它们具有相同的单位长度，这三条数轴统称为坐标轴.坐标轴的正方向按右手法则来确定：用右手握住 z 轴，拇指与其余并拢的四指保持垂直状态，当右手的四指指向从 x 轴的正方向以 $\frac{\pi}{2}$ 角度转向 y 轴正向时，大拇指的指向就是 z 轴的正向（图 5-1），这样的三条坐标轴就构成了空间直角坐标系，点 O 称为坐标原点.

动画演示 5.2
八个卦限

每两条坐标轴确定一个平面.由 x 轴与 y 轴确定的平面称为 xOy 平面，由 y 轴与 z 轴确定的平面称为 yOz 平面，由 x 轴与 z 轴确定的平面称为 zOx 平面，这些平面统称为坐标面.三个坐标面将空间分成八个部分，每个部分都称为一个卦限，依次记为Ⅰ，Ⅱ，Ⅲ，Ⅳ，Ⅴ，Ⅵ，Ⅶ，Ⅷ卦限.上半空间（$z>0$）中，以 x 轴、y 轴、z 轴正半轴为棱的卦限为第一卦限，按逆时针方向分别称其他卦限为：Ⅱ，Ⅲ，Ⅳ卦限，在下半空间（$z<0$）中，与Ⅰ，Ⅱ，Ⅲ，Ⅳ四个卦限相对应的依次称为Ⅴ，Ⅵ，Ⅶ，Ⅷ卦限（图 5-2）.确定了空间直角坐标系后，就可以建立空间中的点与三元有序数组之间的一一对应关系.

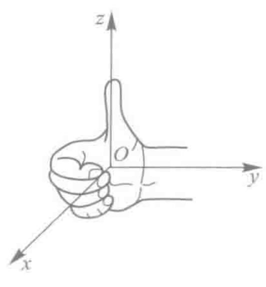

图 5-1

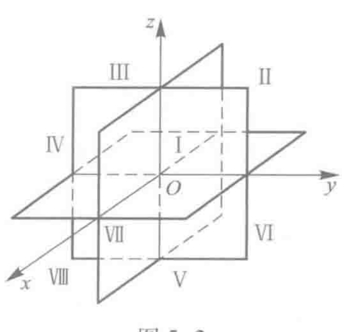

图 5-2

设 M 为空间中的一点，过点 M 作三个平面分别垂直于三条坐标轴，它们与 x 轴、y 轴、z 轴的交点分别记为 P，Q，R（图 5-3），这三个点的坐标依次记为 x,y,z，于是点 M 唯一确定了一个有序数组 (x,y,z)，称它为点 M 的直角坐标，并把 x,y,z

依次称为点 M 的横坐标、纵坐标和竖坐标.坐标为 (x,y,z) 的点 M 通常记为 $M(x,y,z)$.

反过来,设给定了一有序数组 (x,y,z),在 x 轴、y 轴、z 轴上分别取坐标为 x,y,z 的点 P, Q, R,过这三点分别作垂直于 x 轴、y 轴、z 轴的三个平面,这三个平面交于空间的一点 M,这个交点 M 由有序数组 (x,y,z) 唯一确定.

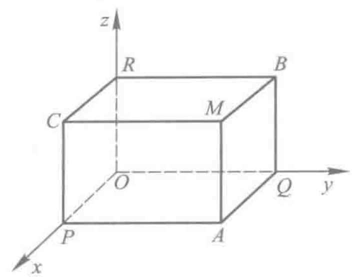

图 5-3

动画演示 5.3 空间点与坐标的对应关系

这样,我们可以看到,有了空间直角坐标系,那么空间的点 M 和有序数组 (x,y,z) 之间就建立了一一对应关系.

显然,x 轴、y 轴、z 轴上的点的坐标分别为 $P(x,0,0)$, $Q(0,y,0)$, $R(0,0,z)$. xOy 平面, yOz 平面, zOx 平面上的点的坐标分别为 $A(x,y,0)$, $B(0,y,z)$, $C(x,0,z)$. 坐标原点 O 的坐标为 $O(0,0,0)$.

二、空间两点间的距离

设 $M_1(x_1,y_1,z_1)$、$M_2(x_2,y_2,z_2)$ 为空间两点,过 M_1 和 M_2 各作三个分别垂直于三条坐标轴的平面,这六个平面围成一个以 M_1、M_2 为对角线的长方体(图 5-4),根据勾股定理,有

$$|M_1M_2|^2=|M_1N|^2+|NM_2|^2=|M_1P|^2+|M_1Q|^2+|M_1R|^2,$$

而

$$|M_1P|=|P_1P_2|=|x_2-x_1|,$$

$$|M_1Q|=|Q_1Q_2|=|y_2-y_1|,$$

$$|M_1R|=|R_1R_2|=|z_2-z_1|,$$

所以,M_1, M_2 之间的距离为

$$|M_1M_2|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}.$$

特别地,点 $M(x,y,z)$ 到坐标原点 $O(0,0,0)$ 的距离为 $|OM|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

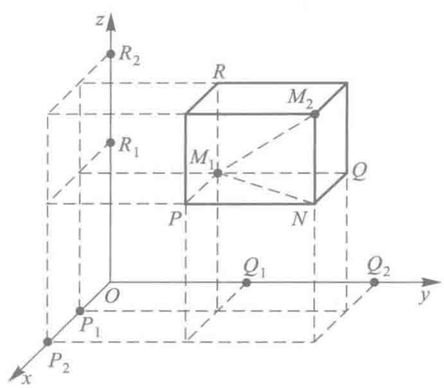

图 5-4

动画演示 5.4 点 M 到坐标原点的距离

三、向量及其线性运算

1. 向量的概念

常见的物理量有两类:一类是只有大小的量,称为数量,如时间、长度、面积、质

量等;另一类是不仅有大小,而且还有方向的量,称为向量(或矢量),如速度、加速度、位移、力等.

动画演示 5.5 向量的表示

在数学上,往往用一条有向线段来表示向量,有向线段的长度表示向量的大小,有向线段的方向表示向量的方向,如图 5-5 所示,以 M_1 为起点,M_2 为终点的向量用记号 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 表示,有时也可用黑体字母或上面带有箭头的字母来表示向量,如 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c},\boldsymbol{r}$ 或 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 等.向量的大小称为向量的模(或长度),向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 的模记为 $|\overrightarrow{M_1M_2}|$.

图 5-5

动画演示 5.6 负向量

下面介绍几个特殊的向量.

单位向量:模等于 1 的向量称为单位向量.

负向量:与向量 $\boldsymbol{a}$ 的模相等且方向相反的向量称为 $\boldsymbol{a}$ 的负向量,记为 $-\boldsymbol{a}$.

零向量:模等于零的向量称为零向量,记为 $\boldsymbol{0}$,零向量没有确定的方向,可以认为它的方向是任意的.

两个向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$,如果它们的大小相等,方向相同,就称向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 相等,记为 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$.

自由向量:与起点位置无关的向量称为自由向量,也即向量可在空间中平行移动,所得向量与原向量相等.本书讨论的向量均为自由向量.

2. 向量的线性运算

向量的加法

动画演示 5.7 平行四边形法则

定义 1 设 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 为两个非零向量,将 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 平行移动使它们的起点重合于 A 点,以 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 为邻边作平行四边形 $ABCD$(图 5-6),把 A 为起点、C 为终点的对角线向量 $\overrightarrow{AC}$ 称为 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的和,记为 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$.这种用平行四边形的对角线向量来定义两向量的和的方法,称为平行四边形法则.

动画演示 5.8 三角形法则

在图 5-6 中可以看到向量 $\overrightarrow{DC}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 相等,故向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和 $\overrightarrow{AC}$ 也可按如下方法得到:将 $\boldsymbol{b}$ 平行移动,使 $\boldsymbol{b}$ 的起点与 $\boldsymbol{a}$ 的终点重合,此时以 $\boldsymbol{a}$ 的起点为起点,$\boldsymbol{b}$ 的终点为终点的有向线段 $\overrightarrow{AC}$ 就为 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和.因为 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 这三个向量构成一个三角形(图 5-7),故这种求两个向量和的方法称为三角形法则.

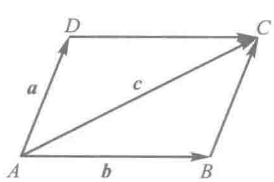

图 5-6

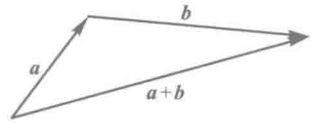

图 5-7

定义 2 向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的差规定为 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的负向量的和,$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b})$.

由向量差的定义,按作图法则易知向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的差就是将向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的起点重合在一起,然后把 $\boldsymbol{b}$ 的终点作为起点,把 $\boldsymbol{a}$ 的终点作为终点,所得的向量就是 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的差 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$(图 5-8).若向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 平行,则规定当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 方向相同,和向量 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 的模等于两向量的模之和,方向与原来的两向量的方向相同;当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 方向相反时,和向量 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 的模等于两向量模之差的绝对值,方向与模较大的那个向量的方向相同.

动画演示 5.9
向量减法

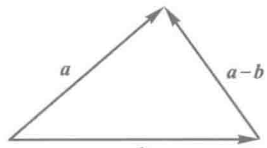

图 5-8

可将两个向量相加的定义推广到 n 个向量相加,从而得到 n 个向量的和 $\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\cdots+\boldsymbol{a}_n$.

动画演示 5.10
多个向量相加

向量的加法满足以下运算规律:

(1) $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$.　　　　　(交换律)

(2) $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$.　　　(结合律)

(3) $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$, $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$.

向量与数量的乘法

定义 3　设 λ 为一实数,$\boldsymbol{a}$ 为一向量,向量 $\boldsymbol{a}$ 与实数 λ 的乘积 $\lambda\boldsymbol{a}$ 规定为如下向量:当 $\lambda>0$ 时,$\lambda\boldsymbol{a}$ 的方向与 $\boldsymbol{a}$ 的方向相同,$\lambda\boldsymbol{a}$ 的模 $|\lambda\boldsymbol{a}|=\lambda|\boldsymbol{a}|$;当 $\lambda<0$ 时,$\lambda\boldsymbol{a}$ 的方向与 $\boldsymbol{a}$ 的方向相反,$\lambda\boldsymbol{a}$ 的模 $|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda||\boldsymbol{a}|$;当 $\lambda=0$ 时,$\lambda\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$, $|\lambda\boldsymbol{a}|=0$.

向量与数量的乘法满足以下运算规律(λ,μ 为实数):

(1) $\lambda(\mu\boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\boldsymbol{a}$.　　　　　(结合律)

(2) $(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$.　　　　(分配律)

(3) $\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$.　　　　(分配律)

典型例题 5.1
在平行四边形 $ABCD$ 中,设 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$,试用 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 表示向量 $\overrightarrow{MA}$、$\overrightarrow{MB}$、$\overrightarrow{MC}$和$\overrightarrow{MD}$,M 是平行四边形对角线的交点.

设 $\boldsymbol{a}$ 为一个非零向量,则由向量的数乘运算知向量 $\dfrac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}=\dfrac{1}{|\boldsymbol{a}|}\boldsymbol{a}$ 就是一个与 $\boldsymbol{a}$ 同方向的单位向量,记为 $\boldsymbol{e}_a$, $\boldsymbol{e}_a=\dfrac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}$.

四、向量的坐标

1. 向量的投影

(1) 两向量的夹角

设 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 是两个非零向量,将 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的起点重合在一点,则这两个向量正向间的夹角 $\theta(0\leqslant\theta\leqslant\pi)$,就称为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角(图 5-9),记为 $\theta=(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$ 或 $\theta=(\widehat{\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}})$.当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 同向时,$\theta=0$;当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 反向时,$\theta=\pi$.

动画演示 5.11
两向量的夹角

(2) 点在轴上的投影

设 P 为一点,μ 为一轴,过 P 点作垂直于轴 μ 的平面,与轴 μ 交于点 P',则称 P' 为点 P 在轴 μ 上的投影(如图 5-10).

动画演示 5.12
点在轴上的投影

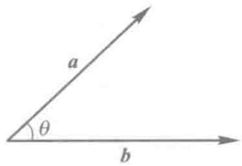

图 5-9

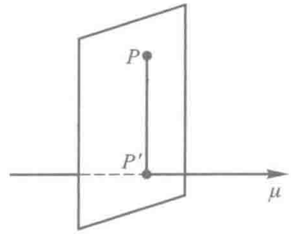

图 5-10

(3) 向量在轴上的投影

设有一轴 μ, $\overrightarrow{MN}$是轴 μ 上的有向线段,若数 λ 满足 $|\lambda|=|\overrightarrow{MN}|$,当$\overrightarrow{MN}$与 μ 轴同向时,λ 为正;当$\overrightarrow{MN}$与 μ 轴反向时,λ 为负,则称 λ 为有向线段$\overrightarrow{MN}$的值,记为 MN,即 $\lambda=MN$.

动画演示 5.13 向量在轴上的投影

设$\overrightarrow{AB}$为一向量,A,B 两点在轴 μ 上的投影分别为 A',B',则有向线段$\overrightarrow{A'B'}$的值 $A'B'$称为向量$\overrightarrow{AB}$在轴 μ 上的投影,记为 $\mathrm{Prj}_{\mu}\overrightarrow{AB}=A'B'$.轴 μ 称为投影轴.向量的投影既不是向量,也不是一个长度,是一个数量,它可以是正、负、零.

向量的投影有如下两个基本结论:

定理 1　向量$\overrightarrow{AB}$在轴 μ 上的投影等于向量$\overrightarrow{AB}$的模与向量$\overrightarrow{AB}$和 μ 的夹角 θ 的余弦的乘积,即 $\mathrm{Prj}_{\mu}\overrightarrow{AB}=|\overrightarrow{AB}|\cos\theta$,**其中** $\theta=(\widehat{\overrightarrow{AB},\mu})$.

证明　过 A 点作与 μ 轴平行,且有相同正向的轴 μ',则$\overrightarrow{AB}$与轴 μ 的夹角 θ 就等于$\overrightarrow{AB}$与轴 μ'的夹角(图 5-11).图中 B''为 B 点在 μ'轴上的投影,于是

$$\mathrm{Prj}_{\mu}\overrightarrow{AB}=A'B',$$

而

$$A'B'=AB'',$$

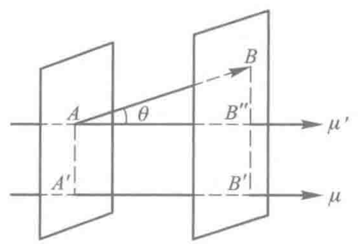

图 5-11

所以

$$\mathrm{Prj}_{\mu}\overrightarrow{AB}=|\overrightarrow{AB}|\cos\theta.$$

当 θ 为锐角时,投影为正值;当 θ 为钝角时,投影为负值;当 $\theta=\dfrac{\pi}{2}$时,投影等于 0.

定理 2　$\mathrm{Prj}_{\mu}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\mathrm{Prj}_{\mu}\boldsymbol{a}+\mathrm{Prj}_{\mu}\boldsymbol{b}$,$\mathrm{Prj}_{\mu}\lambda\boldsymbol{a}=\lambda\mathrm{Prj}_{\mu}\boldsymbol{a}$.

证明　设 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{AB}$,$\boldsymbol{b}=\overrightarrow{BC}$,则

$$\mathrm{Prj}_\mu(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\mathrm{Prj}_\mu(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})=\mathrm{Prj}_\mu\overrightarrow{AC}=A'C',$$

$$\mathrm{Prj}_\mu\boldsymbol{a}=\mathrm{Prj}_\mu\overrightarrow{AB}=A'B',$$

$$\mathrm{Prj}_\mu\boldsymbol{b}=\mathrm{Prj}_\mu\overrightarrow{BC}=B'C'.$$

由图 5-12 可知 $A'B'+B'C'=A'C'$,所以

$$\mathrm{Prj}_\mu(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\mathrm{Prj}_\mu\boldsymbol{a}+\mathrm{Prj}_\mu\boldsymbol{b}.$$

定理后半部分请自己证明.

定理 2 的结论推广到 n 个向量的情形时也成立,即

动画演示 5.14 和向量在轴上的投影

$$\mathrm{Prj}_\mu(\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\cdots+\boldsymbol{a}_n)=\mathrm{Prj}_\mu\boldsymbol{a}_1+\mathrm{Prj}_\mu\boldsymbol{a}_2+\cdots+\mathrm{Prj}_\mu\boldsymbol{a}_n.$$

2. 向量的坐标表示

在空间直角坐标系中,用 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 分别表示与 x 轴、y 轴、z 轴正向同方向的单位向量,我们称 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 为基本单位向量.起点在坐标原点 O,终点为 M 的向量 $\overrightarrow{OM}=\boldsymbol{r}$,称为点 M 的向径.设向径 $\overrightarrow{OM}$ 的终点 M 的坐标为 (x,y,z),过点 M 分别作与三个坐标轴垂直的平面,交点依次为 P、Q、R(图 5-13),由向量加法可知

$$\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PN}+\overrightarrow{NM}.$$

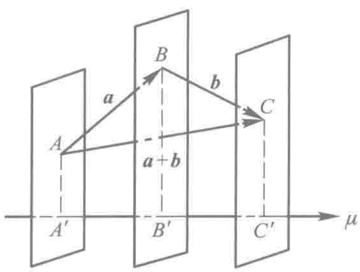

图 5-12

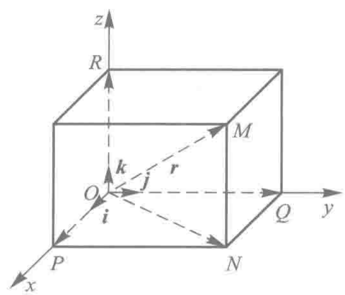

图 5-13

又

$$\overrightarrow{PN}=\overrightarrow{OQ},\overrightarrow{NM}=\overrightarrow{OR},$$

所以

$$\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{OR}.$$

向量 $\overrightarrow{OP},\overrightarrow{OQ},\overrightarrow{OR}$ 分别称为向量 $\overrightarrow{OM}$ 在 x 轴、y 轴、z 轴上的分量.由向量的数乘得到

$$\overrightarrow{OP}=x\boldsymbol{i},\overrightarrow{OQ}=y\boldsymbol{j},\overrightarrow{OR}=z\boldsymbol{k},\overrightarrow{OM}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}.$$

该式就是向量在坐标系中的分解式，其中 x、y、z 称为向量$\overrightarrow{OM}$的坐标，记为$\overrightarrow{OM}=(x,y,z)$.

显然，x、y、z 这三个数分别是向量$\overrightarrow{OM}$在 x 轴、y 轴、z 轴上的投影，称(x,y,z)为向量$\overrightarrow{OM}$的坐标表示式.

问一问 5.1
向量的分量与向量的投影的区别是什么？

当向量的起点不在坐标原点时，向量仍可用坐标表示.设向量$\overrightarrow{M_1M_2}$的起点是 $M_1(x_1,y_1,z_1)$，终点是 $M_2(x_2,y_2,z_2)$（图 5-14），由向量的减法得

$$\overrightarrow{M_1M_2}=\overrightarrow{OM_2}-\overrightarrow{OM_1},$$

$$\boldsymbol{r}_1=\overrightarrow{OM_1}=x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j}+z_1\boldsymbol{k},$$

$$\boldsymbol{r}_2=\overrightarrow{OM_2}=x_2\boldsymbol{i}+y_2\boldsymbol{j}+z_2\boldsymbol{k},$$

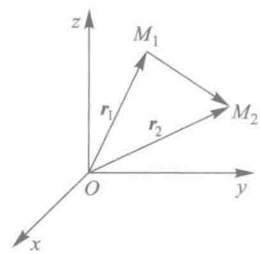

图 5-14

所以

$$\begin{aligned}\overrightarrow{M_1M_2}&=\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1=(x_2\boldsymbol{i}+y_2\boldsymbol{j}+z_2\boldsymbol{k})-(x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j}+z_1\boldsymbol{k})\\&=(x_2-x_1)\boldsymbol{i}+(y_2-y_1)\boldsymbol{j}+(z_2-z_1)\boldsymbol{k}.\end{aligned}$$

令 $a_x=x_2-x_1$，$a_y=y_2-y_1$，$a_z=z_2-z_1$，其中 a_x、a_y、a_z分别是向量$\overrightarrow{M_1M_2}$在 x 轴、y 轴、z 轴上的投影.于是向量$\overrightarrow{M_1M_2}$的分解表示式为

$$\overrightarrow{M_1M_2}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k},$$

向量$\overrightarrow{M_1M_2}$的坐标表示式为

$$\overrightarrow{M_1M_2}=(a_x,a_y,a_z).$$

特别地，基本单位向量的坐标表示式为

$$\boldsymbol{i}=(1,0,0),\quad \boldsymbol{j}=(0,1,0),\quad \boldsymbol{k}=(0,0,1),$$

零向量的坐标表示式为

$$\boldsymbol{0}=(0,0,0).$$

3. 向量的模与方向余弦的坐标表示

一个向量是由它的模及方向来确定的，例如向量 $\boldsymbol{a}$ 的模可用 $|\boldsymbol{a}|$ 来表示，而 $\boldsymbol{a}$ 的方向又该怎样表示呢？

动画演示 5.15
向量的方向角

$\boldsymbol{a}=\overrightarrow{M_1M_2}$为一非零向量，可以用 $\boldsymbol{a}$ 与 x 轴、y 轴、z 轴正向的夹角 α、β、γ($0\leqslant\alpha\leqslant\pi$，$0\leqslant\beta\leqslant\pi$，$0\leqslant\gamma\leqslant\pi$)来表示向量 $\boldsymbol{a}$ 的方向.α、β、γ 称为 $\boldsymbol{a}$ 的方向角，$\cos\alpha$、$\cos\beta$、$\cos\gamma$ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 的方向余弦.同时，也可用 $\cos\alpha$、$\cos\beta$、$\cos\gamma$ 来表示向量 $\boldsymbol{a}$ 的方向，也即可用向量 $\boldsymbol{a}$ 的方向余弦来表示 $\boldsymbol{a}$ 的方向.

设非零向量 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{M_1M_2}$的起点是 $M_1(x_1,y_1,z_1)$，终点是 $M_2(x_2,y_2,z_2)$，过点 M_1、

M_2分别作垂直于三条轴的平面(图 5-15).令 $a_x=x_2-x_1,a_y=y_2-y_1,a_z=z_2-z_1$,则有

$$a_x=\mathrm{Prj}_x\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\cos\alpha,a_y=\mathrm{Prj}_y\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\cos\beta,a_z=\mathrm{Prj}_z\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\cos\gamma,$$

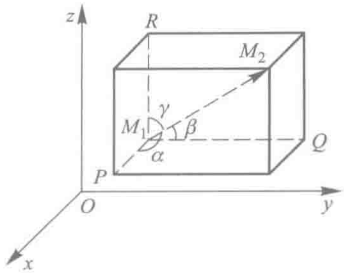

图 5-15

即

$$\cos\alpha=\frac{a_x}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}},\quad \cos\beta=\frac{a_y}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}},\quad \cos\gamma=\frac{a_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}},$$

于是,有以下式子成立

$$\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}=|\boldsymbol{a}|(\cos\alpha\boldsymbol{i}+\cos\beta\boldsymbol{j}+\cos\gamma\boldsymbol{k}),$$

$$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2},$$

$$\boldsymbol{e}_a=\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}=\cos\alpha\boldsymbol{i}+\cos\beta\boldsymbol{j}+\cos\gamma\boldsymbol{k}.$$

显然 $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$.这表明由方向余弦组成的向量$(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$是与向量 $\boldsymbol{a}$ 同方向的单位向量 $\boldsymbol{e}_a$.

例 1　已知向量 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{P_1P_2}$,$P_1$、$P_2$的坐标分别为 $P_1(1,1,1)$,$P_2(-1,6,7)$.求(1) 向量 $\boldsymbol{a}$ 在三个坐标轴上的投影;(2) 向量 $\boldsymbol{a}$ 的分解表示式及坐标表示式;(3) 向量 $\boldsymbol{a}$ 的模;(4) 向量 $\boldsymbol{a}$ 的方向余弦;(5) 与 $\boldsymbol{a}$ 同方向的单位向量.

解　(1) 向量 $\boldsymbol{a}$ 在三个坐标轴上的投影分别为

$$a_x=-1-1=-2,\quad a_y=6-1=5,\quad a_z=7-1=6;$$

(2) 向量 $\boldsymbol{a}$ 的分解表示式为

$$\boldsymbol{a}=-2\boldsymbol{i}+5\boldsymbol{j}+6\boldsymbol{k},$$

坐标表示式为

$$\boldsymbol{a}=(-2,5,6);$$

(3) 向量 $\boldsymbol{a}$ 的模

$$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}=\sqrt{(-2)^2+5^2+6^2}=\sqrt{65};$$

（4）向量 $\boldsymbol{a}$ 的方向余弦

$$\cos\alpha=\frac{a_x}{|\boldsymbol{a}|}=\frac{-2}{\sqrt{65}},\quad \cos\beta=\frac{a_y}{|\boldsymbol{a}|}=\frac{5}{\sqrt{65}},\quad \cos\gamma=\frac{a_z}{|\boldsymbol{a}|}=\frac{6}{\sqrt{65}};$$

（5）与向量 $\boldsymbol{a}$ 同方向的单位向量

$$\boldsymbol{e}_a=\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}=\frac{1}{|\boldsymbol{a}|}(-2\boldsymbol{i}+5\boldsymbol{j}+6\boldsymbol{k})=\frac{1}{\sqrt{65}}(-2\boldsymbol{i}+5\boldsymbol{j}+6\boldsymbol{k}).$$

由向量的线性运算性质也可推得向量坐标表示式相应的运算性质.设 $\boldsymbol{a}=(a_x,a_y,a_z)$，$\boldsymbol{b}=(b_x,b_y,b_z)$，$\lambda$、$\mu$ 为实数，则

$$\lambda\boldsymbol{a}\pm\mu\boldsymbol{b}=(\lambda a_x\pm\mu b_x,\lambda a_y\pm\mu b_y,\lambda a_z\pm\mu b_z).$$

例 2　已知向量 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{AB}$的模为 6，$A$ 点的坐标是(1,2,3)，并且$\overrightarrow{AB}$的方向与向量 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}$ 的方向相同，求点 B 的坐标.

解　设点 B 的坐标为(x,y,z)，则$\overrightarrow{AB}=(x-1)\boldsymbol{i}+(y-2)\boldsymbol{j}+(z-3)\boldsymbol{k}$，又因为 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 方向相同，所以 $\boldsymbol{e}_a=\boldsymbol{e}_b$.由于

$$\boldsymbol{e}_a=\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}=\frac{x-1}{6}\boldsymbol{i}+\frac{y-2}{6}\boldsymbol{j}+\frac{z-3}{6}\boldsymbol{k},\quad \boldsymbol{e}_b=\frac{\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}=\frac{1}{3}\boldsymbol{i}+\frac{-2}{3}\boldsymbol{j}+\frac{2}{3}\boldsymbol{k},$$

对比以上两式，可得

$$\frac{x-1}{6}=\frac{1}{3},\frac{y-2}{6}=\frac{-2}{3},\frac{z-3}{6}=\frac{2}{3}\Rightarrow x=3,y=-2,z=7,$$

所以 B 的坐标为(3,-2,7).

例 3　已知 $\boldsymbol{a}=3\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{b}=3\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{c}=3\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}$，求与向量 $\boldsymbol{c}$ 同方向的单位向量 $\boldsymbol{e}_c$.

典型例题 5.2　设立方体的一条对角线为 OM，一条棱为 OA，且 $|OA|=a$，求$\overrightarrow{OA}$在$\overrightarrow{OM}$方向上的投影 $\mathrm{Prj}_{\overrightarrow{OM}}\overrightarrow{OA}$.

解　
$$\begin{aligned}\boldsymbol{c}&=3\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}=3(3\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k})-2(3\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k})\\&=9\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}+6\boldsymbol{k}-6\boldsymbol{i}-8\boldsymbol{j}+4\boldsymbol{k}=3\boldsymbol{i}-11\boldsymbol{j}+10\boldsymbol{k},\end{aligned}$$

$$|\boldsymbol{c}|=\sqrt{3^2+(-11)^2+10^2}=\sqrt{230},$$

所以

$$\boldsymbol{e}_c=\frac{\boldsymbol{c}}{|\boldsymbol{c}|}=\frac{1}{\sqrt{230}}(3\boldsymbol{i}-11\boldsymbol{j}+10\boldsymbol{k})=\left(\frac{3}{\sqrt{230}},\frac{-11}{\sqrt{230}},\frac{10}{\sqrt{230}}\right).$$

五、向量的数量积与向量积

1. 向量的数量积

在物理学中，我们知道当某物体在恒力 $\boldsymbol{F}$ 的作用下，沿直线从点 M_1移动到点

M_2，即产生了一段位移 $\boldsymbol{s}=\overrightarrow{M_1M_2}$，则力 $\boldsymbol{F}$ 所做的功为 $W=|\boldsymbol{F}|\cdot|\boldsymbol{S}|\cos(\widehat{\boldsymbol{F},\boldsymbol{s}})$.实际上由两向量 $\boldsymbol{F},\boldsymbol{s}$ 确定出一个数量 W.向量间的这种运算在其他实际问题中也经常遇到，故将其抽象化后，可得到向量的数量积的概念.

定义4　两向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的模与它们的夹角余弦的乘积称为 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的数量积(也称为点积或内积)，记为 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$，即 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$.

当 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$ 时，由于 $|\boldsymbol{b}|\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$ 是向量 $\boldsymbol{b}$ 在向量 $\boldsymbol{a}$ 的方向上的投影，所以数量积也可表示为

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b},$$

同理当 $\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0}$ 时，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{b}|\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{a}$.

由数量积定义可知数量积有下面运算性质：

(1) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$;　　(交换律)

(2) $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$;　　(分配律)

(3) $\lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})=(\lambda\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot(\lambda\boldsymbol{b})$.　　(结合律)

容易得到下面的结论：

(1) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|^2$.

(2) 两向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 互相垂直的充要条件是 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$.

对于基本单位向量，显然有

$$\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}=1,$$

$$\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j}=\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{k}=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{i}=0.$$

若 $\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{b}=b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k}$，则有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}&=(a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k})\cdot(b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k})\\&=a_xb_x\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i}+a_xb_y\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j}+a_xb_z\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{k}+a_yb_x\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{i}+a_yb_y\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{j}\\&\quad+a_yb_z\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{k}+a_zb_x\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{i}+a_zb_y\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{j}+a_zb_z\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}\\&=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z.\end{aligned}$$

该式称为数量积的坐标表示，这表明两向量的数量积等于对应坐标的乘积之和.

当 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$，且 $\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0}$ 时，根据向量内积的定义，有

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})\Rightarrow\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\frac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\cdot\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}.$$

由此得到两向量的夹角余弦的坐标表示式.显然向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 互相垂直的充要条件为

$$a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z=0.$$

例 4　已知向量 $\boldsymbol{a}=(3,2,\sqrt{3})$，$\boldsymbol{b}=(1,-1,0)$，求(1) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$；(2) $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角，$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 的夹角；(3) 向量 $\boldsymbol{a}$ 在 $\boldsymbol{b}$ 上的投影.

解　(1) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=3\times1+2\times(-1)+\sqrt{3}\times0=1$；

(2) $|\boldsymbol{a}|=\sqrt{9+4+3}=4$，$|\boldsymbol{b}|=\sqrt{1+1+0}=\sqrt{2}$，

$$\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|}=\frac{1}{4\times\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{8}\Rightarrow(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=\arccos\frac{\sqrt{2}}{8},$$

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(3,2,\sqrt{3})+(1,-1,0)=(4,1,\sqrt{3}),\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(3,2,\sqrt{3})-(1,-1,0)=(2,3,\sqrt{3}),$$

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=4\times2+1\times3+\sqrt{3}\times\sqrt{3}=14,\ |\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=\sqrt{20}=2\sqrt{5},\ |\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=4,$$

$$\cos(\widehat{\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}})=\frac{(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})}{|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|\cdot|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|}=\frac{14}{2\sqrt{5}\times4}=\frac{7\sqrt{5}}{20}\Rightarrow(\widehat{\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}})=\arccos\frac{7\sqrt{5}}{20};$$

$$(3)\quad|\boldsymbol{a}|=\sqrt{9+4+3}=4,\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=4\cdot\frac{\sqrt{2}}{8}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

例 5　在 xOy 平面上，求一单位向量与 $\boldsymbol{b}=(-4,3,7)$ 垂直.

解　设所求向量为 $\boldsymbol{a}=(x,y,z)$，因为 $\boldsymbol{a}$ 在 xOy 平面上，所以 $z=0$；又因为 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$，所以 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$，即 $-4x+3y=0$；$\boldsymbol{a}$ 是单位向量，故 $|\boldsymbol{a}|=1$，即 $x^2+y^2=1$，

典型例题 5.3 试用向量方法证明三角形的余弦定理.

$$\begin{cases}-4x+3y=0,\\x^2+y^2=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=\dfrac{3}{5},\\y=\dfrac{4}{5}\end{cases}\text{或}\begin{cases}x=-\dfrac{3}{5},\\y=-\dfrac{4}{5},\end{cases}$$

故所求向量为 $\left(\frac{3}{5},\frac{4}{5},0\right)$ 或 $\left(-\frac{3}{5},-\frac{4}{5},0\right)$.

2. 两向量的向量积

设 O 为杠杆 L 的支点，力 $\boldsymbol{F}$ 作用于杠杆的 P 点，$\boldsymbol{F}$ 与 $\overrightarrow{OP}$ 的夹角为 θ(图 5-16)，则由物理学知，力 $\boldsymbol{F}$ 对支点 O 的力矩为一向量 $\boldsymbol{M}$，它的模

$$|\boldsymbol{M}|=|OQ|\cdot|\boldsymbol{F}|=|\overrightarrow{OP}|\cdot|\boldsymbol{F}|\sin\theta.$$

向量 $\boldsymbol{M}$ 的方向垂直于 $\overrightarrow{OP}$ 与 $\boldsymbol{F}$ 所确定的平面，$\boldsymbol{M}$ 的指向按右手法则确定，也即当右手的四指从 $\overrightarrow{OP}$ 以不超过 π 的角度转向 $\boldsymbol{F}$ 时，大拇指的指向就是 $\boldsymbol{M}$ 的指向.按如此方法来确定一个向量的问题，在解决实际问题中也时常遇到，我们将其作数学上的抽象，从而在数

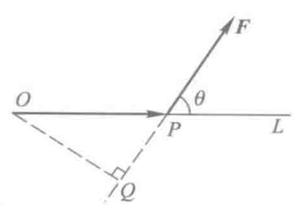

图 5-16