

科技用書

高等工程數學

**ADVANCED
ENGINEERING
MATHEMATICS**

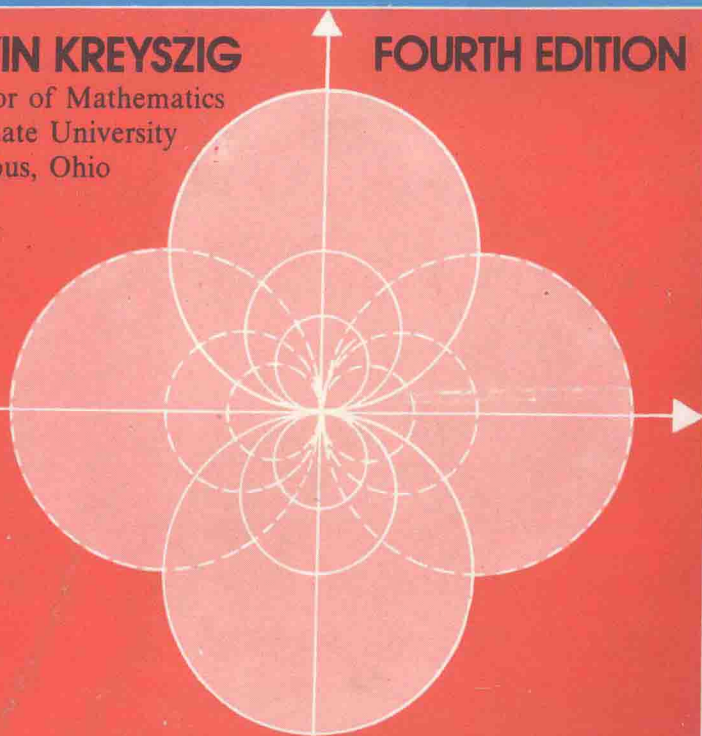
(下)

孫育義 譯

ERWIN KREYSZIG

Professor of Mathematics
Ohio State University
Columbus, Ohio

FOURTH EDITION



大行出版社印行

高等工程數學

ADVANCED ENGINEERING MATHEMATICS

孫育義 譯

ERWIN KREYSZIG

Professor of Mathematics
Ohio State University
Columbus, Ohio

FOURTH EDITION

(下冊)

大行出版社印行



中華民國七十 年十月 日初版

書 名：高等工程數學（下）

著作者：孫 育 義 譯

發行人：裴 振 九

出版者：大 行 出 版 社

社址：台南市體育路41巷26號

電話：6 1 3 6 8 5 號

本社免費郵政劃撥帳號南字第32936號

本社登記證字第：行政院新聞局

局版台業字第0395號

總經銷：成大書局有限公司

台南市體育路41巷26號

電話：6 5 1 9 1 6 號

特 價：平二八〇元精三二〇元

編 號：Q 00010 - 00548

同業友好・敬請愛護

高等工程數學

下冊 目錄

第十章 符立爾級數及積分 (Fourier Series and Integrals)

10-1	週期性函數・三角級數	2
10-2	符立爾級數・尤勒公式	5
10-3	任意週期之函數	15
10-4	偶函數與奇函數	19
10-5	半幅展開式	25
10-6	不用積分決定符立爾係數	31
10-7	強迫振動	39
10-8	利用三角函數多項次之近似法・平方誤差	43
10-9	符立爾積分	46

第十一章 偏微分方程式 (Partial Differential Equations)

11-1	基本觀念	59
11-2	模型化：繩索之振動・一度波形方程式	62
11-3	分離變數法(乘積法)	64
11-4	波動方程式之笛阿倫伯解答	75
11-5	一度熱傳導	80
11-6	無限長桿內之熱量傳導	86
11-7	模型化：薄膜之振動・二度波形方程式	93
11-8	長方型薄膜	96

11-9 極坐標中之拉氏運算	106
11-10 圓形薄膜・貝索方程式	110
11-11 拉卜拉氏方程式・位勢	117
11-12 球面坐標中之拉氏方程式・雷建德方程式	123
11-13 應用於偏微分方程式的拉氏變換運算法	129

第十二章 複數・複變解析函數案

(Complex Numbers Complex Analytic Functions)

12-1 複數	137
12-2 複數之極坐標式・三角不等式	144
12-3 複平面中之曲線及區域	148
12-4 複數函數・極限・導數・解析函數	152
12-5 高奇・利曼方程式・拉卜拉氏方程式	159
12-6 有理函數・根	166
12-7 指數函數	171
12-8 三角函數與雙曲函數	175
12-9 對數・一般乘冪	179

第十三章 保角寫像 (Conformal Mapping)

13-1 寫像	186
13-2 保角寫像	194
13-3 線性分數變換	201
13-4 特殊線性分數變換	204
13-5 其他基本函數之寫像	211
13-6 利曼曲面	221

第十四章 複數積分 (Complex Integrals)

14-1	複平面內之線積分	229
14-2	複變線積分之基本性質	237
14-3	高奇積分定理	239
14-4	以不定積分法求線積分值	250
14-5	高奇積分公式	254
14-6	解析函數之導數	258

第十五章 數列與級數 (Sequences and Series)

15-1	數列	264
15-2	級數	269
15-3	數列與級數之高奇收斂原理	273
15-4	單調實數列・萊布尼茲實級數試驗法	278
15-5	級數及斂及發散之試驗法	283
15-6	級數運算	291

第十六章 冪級數，泰勒級數，勞倫級數 (Power Series, Taylor Series, Laurent Series)

16-1	冪級數	297
16-2	以冪級數表示之函數	307
16-3	泰勒級數	313
16-4	基本函數之泰勒級數	391
16-5	求冪級數之實用方法	322
16-6	一致收斂	329
16-7	勞倫級數	340
16-8	在無限遠處之解析性・零點與奇點	349

第十七章 剩值積分法 (Integration by the Method of Residues)

17-1	剩值	359
17-2	剩值定理	364
17-3	實變積分之求法	368
17-4	其他的實變積分型式	374

第十八章 複變解析函數與位勢理論 (Complex Analytic Functions and Potential Theory)

18-1	靜電場	382
18-2	兩度空間之流體運動	387
18-3	諧和函數之一般性質	397
18-4	波義生積分公式	402

第十九章 數值分析 (Numerical Analysis)

19-1	誤差和錯誤・自動計算機	409
19-2	用疊代法解方程式	416
19-3	有限差分	426
19-4	插值法	432
19-5	線規	441
19-6	數值積分與微分	447
19-7	一階微分 方程式之數值解法	461
19-8	二階微分方程式之數值解法	471
19-9	線性方程式系統・高斯消去法	478
19-10	線性方程式系統・以疊代法求解	485
19-11	線性方程式系統・情況欠妥	490

19-12 最小平方法	495
19-13 矩陣特值之容限	500
19-14 利用疊代法以求特值	506
19-15 漸近展開式	511

第二十章 概率及統計學 (Probability and Statistics)

20-1 數學統計之性質及目的	525
20-2 樣品之表列及圖示法	527
20-3 樣品均值及樣品方差	537
20-4 隨機實驗，結果，事象	541
20-5 概率	547
20-6 排列及組合	554
20-7 隨機變數・離散及連續分佈	559
20-8 分佈之均值及方差	568
20-9 二項式，波義生，及超比分佈	575
20-10 常態分佈	582
20-11 多個隨機變數之分佈	592
20-12 隨機抽樣・隨機數	603
20-13 參數之估計	606
20-14 置信曲間	612
20-15 假設之檢驗，判定	624
20-16 品質管制	641
20-17 接受抽樣	647
20-18 配合之適度・ χ^2 - 檢驗	655
20-19 非參量性檢驗	660
20-20 成對度量・配合直線	664

附錄 1：單號習題答案	673
附錄 2：若干特殊函數之公式	717
附錄 3：數值表	725
若干常數值	741

第十章 符立爾級數及積分

(*Fourier Series and Integrals*)

週期性函數經常在工程問題中出現。此等函數如能以簡單之週期性函數，例如正弦、餘弦等表示，則其實際用途極為重要。由此即導出所謂符立爾級數。此類級數係為紀念法國物理學家約瑟夫 - 符立爾 (*JOSEPH FOURIER* 1768 - 1830年) 而命名，為解答各種包含常微分及偏微分方程式問題之一極有效工具。

本章將討論並說明有關符立爾級數之基本觀念、事實、及技巧。包括範例闡釋以及若干重要之工程應用問題。更進一步之應用，將於下章之偏微分方程式及界值問題中討論。

符立爾級數之理論相當複雜，但其應用則較為簡易。從某一觀點看，符立爾級數較泰勒級數更為普遍。因甚多具有實用興趣之非連續週期性函數可展開為符立爾級數，但不能以泰勒級數表之。

本章最後一節將致力於符立爾積分之討論。在偏微分方程式之應用，則將於下章研討之 (11.6 節)。

研讀本章前之預修課目：基本積分學。

短期課程可省略之節數：10.6 - 10.8 節。

習題答案：附錄 1。

10-1 週期性函數・三角函數

若函數 $f(x)$ 對所有實數 x 均有定義，且有一正數 T 能使對所有之 x 而言，有

$$(1) \quad f(x+T) = f(x)$$

則稱 $f(x)$ 為具有週期性。數字 T 則稱為 $f(x)$ 之週期¹。

此種函數之圖形可在長度為 T 之任何區間內之圖形，作週期性之重複變化而得(圖 203)。

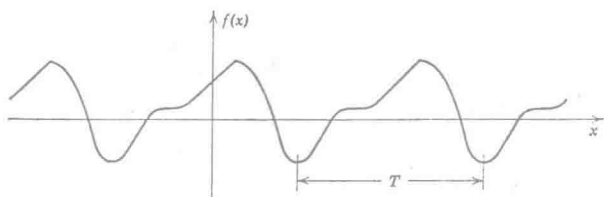


圖 203 週期性函數

由(1)知，若 n 為任意整數，則對所有之 x 而言，有

$$f(x+nT) = f(x)$$

故 $2T, 3T, 4T, \dots$ 等亦為 $f(x)$ 之週期。此外，若 $f(x)$ 及 $g(x)$ 之週期為 T ，則函數

$$f(x) = af(x) + bg(x) \quad (a, b \text{ 為常數})$$

之週期亦等於 T 。

註 1：若週期性函數 $f(x)$ 具有最小週期 $T(>0)$ ，則稱此為 $f(x)$ 之原始週期 (Primitive period)。例如， $\sin x$ 與 $\sin 2x$ 之原始週期分別為 2π 與 π 。無原始週期之週期性函數之例有 $f = \text{常數}$ 及 $f(x) = 0$ [x 為有理數]，熟知之週期性函數有正弦與餘弦函數。注意函數 $f = c = \text{常數}$ ，由定義亦為週期性函數，因其對任何正值 T 均能滿足(1)

本章前數節將討論週期為 2π 之各種函數，而以下列週期為 2π 之簡單函數

$$1 \quad \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots, \cos nx, \sin nx$$

表示之問題（圖 204）。與此有關之級數形式為

$$(2) \quad a_0 + a_1 \cos x + b_1 \sin x + a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x + \dots,$$

其中 $a_0, a_1, a_2, \dots, b_1, b_2, \dots$ 均為實值常數。此種級數稱為三角級數 (Trigonometric series)，而 a_n 及 b_n 則稱為此級數之係數。

吾人可看出此級數中每一項之週期均為 2π 。故，若級數具有收斂性，則其和亦為週期等於 2π 之函數。

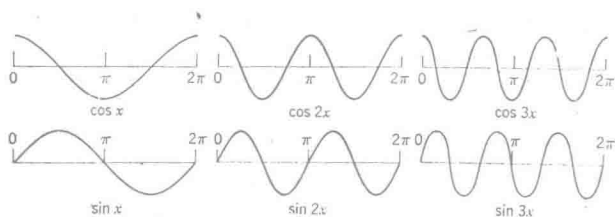


圖 204 餘弦及正弦函數之週期為 2π

在工程問題中出現之週期性函數通常均較複雜，故有將其用簡單週期性函數表示之必要。吾人將明瞭任何出現於應用問題中，例如有關振動問題等，週期為 2π 之週期性函數 $f(x)$ ，均可以三角級數表示。同時將導出(2)中各係數以 $f(x)$ 表示之公式，使(2)具有收斂性，其和恰為 $f(x)$ 。稍後將推廣所得之結果至週期為任意數值之函數；此種推廣方法極為簡單。

第10—1節 習題

試求下列各函數之最小正值週期。

$$1 \quad \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \cos \pi x, \sin \pi x, \cos 2\pi x, \sin 2\pi x$$

4 高等工程數學(下)

$$2 \quad \cos nx, \sin nx, \cos \frac{2\pi x}{k}, \sin \frac{2\pi x}{k}, \cos \frac{2\pi nx}{k}, \\ \sin \frac{2\pi nx}{k}$$

試繪出下列各函數精確之圖形。

$$3 \quad \sin x, \quad \sin x + \frac{1}{3} \sin 3x, \quad \sin x + \frac{1}{3} \sin 3x + \frac{1}{5} \sin 5x$$

$$f(x) = \begin{cases} -\pi/4 & \text{當 } -\pi < x < 0 \\ \pi/4 & \text{當 } 0 < x < \pi \end{cases} \quad \text{以及 } f(x+2\pi)=f(x)$$

$$4 \quad \sin 2\pi x, \quad \sin 2\pi x + \frac{1}{3} \sin 6\pi x, \quad \sin 2\pi x + \frac{1}{3} \sin 6\pi x \\ + \frac{1}{5} \sin 10\pi x$$

$$5 \quad \sin x, \sin x - \frac{1}{2} \sin 2x, \quad \sin x - \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{1}{3} \sin 3x$$

$$f(x) = x/2 \quad \text{當 } -\pi < x < \pi \quad \text{以及 } f(x+2\pi)=f(x)$$

$$6 \quad -\cos x, \quad -\cos x + \frac{1}{4} \cos 2x, \quad -\cos x + \frac{1}{4} \cos 2x -$$

$$\frac{1}{9} \cos 3x,$$

$$f(x) = x^2/4 - \pi^2/12 \quad \text{當 } -\pi < x < \pi \quad \text{以及 } f(x+2\pi)=f(x)$$

$$7 \quad f(x) = x^3 \quad \text{當 } -\pi < x < \pi \quad \text{以及 } f(x+2\pi)=f(x)$$

$$8 \quad f(x) = e^x \quad \text{當 } -\pi < x < \pi \quad \text{以及 } f(x+2\pi)=f(x)$$

$$9 \quad f(x) = \cosh 2x \quad \text{當 } -\pi < x < \pi \quad \text{以及 } f(x+2\pi)=f(x)$$

$$10 \quad f(x) = \begin{cases} 0 & \text{當 } -\pi < x < 0 \\ x & \text{當 } 0 < x < \pi \end{cases} \quad \text{以及 } f(x+2\pi)=f(x)$$

$$\begin{aligned}
 11. \quad f(x) &= \begin{cases} -x^2 & \text{當 } -\pi < x < 0 \\ x^2 & \text{當 } 0 < x < \pi \end{cases} \quad \text{以及 } f(x+2\pi) = f(x) \\
 12. \quad f(x) &= \begin{cases} 1 & \text{當 } -\pi < x < 0 \\ \cos^2 2x & \text{當 } 0 < x < \pi \end{cases} \quad \text{以及 } f(x+2\pi) = f(x)
 \end{aligned}$$

13. 若 T 為 $f(x)$ 之一週期，試證 nT ， $n=2, 3, \dots$ 亦為該函數之週期。
14. 若 $f(x)$ 及 $g(x)$ 具有週期 T ，試證 $h = af + bg$ (a, b 為常數)，具有週期 T 。因此所有週期為 T 之函數形成一向量空間。
15. 試證函數 $f(x) = \text{常數}$ 為具有每一正值週期 T 之週期性函數。
16. 若 $f(x)$ 為 x 之週期性函數，其週期為 T ，試證 $f(ax)$ ， $a > 0$ ，為 x 之週期性函數，其週期為 T/a ，以及 $f(x/b)$ ， $b > 0$ ，為 x 之週期性函數，其週期為 bT 。對 $f(x) = \sin x$ ， $a = b = 2$ ，驗證上述結果。

試求下列各積分之值，其中 $n = 0, 1, 2, \dots$ (此等積分式為吾人今後討論所需之典型範例)。

$$\begin{aligned}
 17. \quad & \int_0^{\pi/2} \cos nx dx & 18. \quad & \int_0^{\pi} \sin nx dx \\
 19. \quad & \int_{-\pi/2}^{\pi/2} x \cos nx dx & 20. \quad & \int_{-\pi/2}^{\pi/2} x \sin nx dx \\
 21. \quad & \int_{-\pi}^{\pi} x \sin nx dx & 22. \quad & \int_0^{\pi} x \sin nx dx \\
 23. \quad & \int_0^{\pi} x^2 \cos nx dx & 24. \quad & \int_0^{\pi} e^x \cos nx dx \\
 25. \quad & \int_{-\pi}^0 e^x \sin nx dx
 \end{aligned}$$

10-2 符立爾級數 · 歐勒級數公式

6 高等工程數學 (下)

設 $f(x)$ 為週期等於 2π 之週期性函數，且可用下述三角級數表示

$$(1) \quad f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

已知如此之函數 $f(x)$ ，吾人欲求對應級數(1)中之係數 a_n 與 b_n 。

先求 a_0 。將(1)兩邊由 $-\pi$ 至 π 積分，可得

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \int_{-\pi}^{\pi} \left[a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \right] dx$$

若此級數能逐項積分²，則可得

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = a_0 \int_{-\pi}^{\pi} dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx dx \right)$$

右邊首項等於 $2\pi a_0$ ，而由直接積分，即知所有右邊其他各項積分值均為零。故第一個結果為

$$(2) \quad a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx$$

吾人可用相似程序以求 $a_1, a_2, \dots$ 之值。將(1)乘以 $\cos mx$ ，其中 m 為任意正整數，然後由 $-\pi$ 積分至 π ，可得

$$(3) \quad \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos mx dx = \int_{-\pi}^{\pi} \left[a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \right] \cos mx dx$$

右邊逐項積分可得

$$a_0 \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cos mx dx \right]$$

第一項為零。應用附錄 3 內(11)可得

註 2：吾人將就一致收斂性之情形證明此為可行（參考 16.6 節中定理 3）。

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx \, dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos (n+m) x \, dx + \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos ($$

$$n-m) x \, dx ,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cos mx \, dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \sin (n+m) x \, dx + \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \sin ($$

$$n-m) x \, dx$$

上式等號右邊四項積分爲零，僅第一式中之最後一項，當 $n = m$ 時等於 π 。因在(3)中此項被乘以 a_m ，故(3)之右邊等於 $a_m \pi$ ，故得第二結果爲

$$(4) \quad a_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos mx \, dx, \quad m = 1, 2, \dots$$

最後求(1)中之 $b_1, b_2, \dots$ 。若將(1)乘以 $\sin mx$ ，其中 m 爲任意正整數，然後由 $-\pi$ 積分至 π ，可得

$$(5) \quad \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin mx \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \left[a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \right] \sin mx \, dx。$$

逐項積分後，右邊變成

$$a_0 \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \, dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \sin mx \, dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin mx \, dx \right]$$

第一項積分爲零。次一積分型式前曾論及，且知對所有之 $n = 1, 2, \dots$ ，其值爲零。最後一項積分可變換爲

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin mx \, dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos (n-m) x \, dx - \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos ($$

$$\cos (n+m) x \, dx。$$

最後一項爲零。右邊第一項當 $n \neq m$ 時爲零，當 $n = m$ 時爲 π 。

因(5)中此項被乘以 b_m ，故(5)式右邊等於 $b_m \pi$ ，因此可得最後結

8 高等工程數學 (下)

果如下：

$$b_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin mx dx, \quad m = 1, 2, \dots$$

以 n 取代 m 後，總結可得下列所謂歐勒公式：

$$\begin{aligned} (a) \quad a_0 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx \\ (b) \quad a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx \\ (c) \quad b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx \end{aligned} \quad n = 1, 2, \dots$$

注意由於被積分函數具有週期性，(6)中之積分區間可以長度為 2π 之任意區間取代之，例如，區間 $0 \leq x \leq 2\pi$ 。

若已知一週期為 2π 之週期性函數，則由(6)可求得 a_n 及 b_n 之值，而形成三角級數。

$$(7) \quad a_0 + a_1 \cos x + b_1 \sin x + \dots + a_n \cos nx + b_n \sin nx + \dots$$

此級數稱為對應於 $f(x)$ 之符立爾級數。由(6)求得之係數稱為 $f(x)$ 之符立爾級數 (Fourier coefficients)。

由定積分定義知，若 $f(x)$ 為連續，或僅具分段連續性（即在積分區間內，除有限數目之跳躍點而外，其餘均為連續），則(6)中之積分存在。利用(6)即可得 $f(x)$ 之符立爾係數值。剩下之問題為：如上所得之符立爾級數是否具有收斂性？又其和是否為 $f(x)$ ？本節稍後將予討論。

茲舉一簡易例題，以說明(6)之實際用途。若干其他例題將在以下幾節中出現。

例 1 方波

試求圖 205 a 中所示週期性函數 $f(x)$ 之符立爾係數。此函數之解析表示法為