科技用書

高等工程數學

ADVANCED ENGINEERING MATHEMATICS

（下）

孫育義 譯

ERWIN KREYSZIG
Professor of Mathematics
Ohio State University
Columbus, Ohio

FOURTH EDITION

大行出版社印行

高等工程數學

ADVANCED ENGINEERING MATHEMATICS

孫育義 譯

ERWIN KREYSZIG
Professor of Mathematics
Ohio State University
Columbus, Ohio

FOURTH EDITION

（下册）

大行出版社印行

中華民國七十　年十月　　日初版
書　名：高等工程數學（下）
著作者：孫　育　義　譯
發行人：裴　振　九
出版者：大　行　出　版　社
社址：台南市體育路41巷26號
電話：６１３６８５號
本社免費郵政劃撥帳號南字第32936號
本社登記證字第：行政院新聞局
局版台業字第0395號
總經銷：成大書局有限公司
台南市體育路41巷26號
電話：６５１９１６號
特　價：平二八〇元精三二〇元
編　號：Q00010－00548

高等工程數學

下冊　目錄

第十章　符立爾級數及積分（Fourier Series and Integrals）

第十一章　偏微分方程式（Partial Differential Equations）

第十七章 剩值積分法（Integration by the Methed of Residues）

第十八章 複變解析函數與位勢理論（Complex Analytic Functions and Potential Theory）

第十九章 數值分析（Numerical Analysis）

第二十章　概率及統計學（Probability and Statistics）

第十章符立爾級數及積分

(Fourier Series and Integrals)

週期性函數經常在工程問題中出現。此等函數如能以簡單之週期性函數，例如正弦、餘弦等表示，則其實際用途極爲重要。由此卽導出所謂符立爾級數。此類級數係爲紀念法國物理學家約瑟夫 - 符立爾（ *JOSEPH FOURIER* 1768 - 1830年 ）而命名，爲解答各種包含常微分及偏微分方程式問題之一極有效工具。

本章將討論並說明有關符立爾級數之基本觀念、事實、及技巧。包括範例闡釋以及若干重要之工程應用問題。更進一步之應用，將於下章之偏微分方程式及界值問題中討論。

符立爾級數之理論相當複雜，但其應用則較爲簡易。從某一觀點看，符立爾級數較泰勒級數更爲普遍。因甚多具有實用興趣之非連續週期性函數可展開爲符立爾級數，但不能以泰勒級數表之。

本章最後一節將致力於符立爾積分之討論。在偏微分方程式之應用，則將於下章研討之（ 11.6 節 ）。

研讀本章前之預修課目：基本積分學。

短期課程可省略之節數： 10.6 - 10.8 節。

習題答案：附錄 1 。

10-1 週期性函數·三角函數

若函數 $f(x)$ 對所有實數 x 均有定義，且有一正數 T 能使對所有之 x 而言，有

(1) $$f(x+T)=f(x)$$

則稱 $f(x)$ 為具有**週期性**。數字 T 則稱為 $f(x)$ 之**週期**[1]。此種函數之圖形可在長度為 T 之任何區間內之圖形，作週期性之重複變化而得（圖 203）。

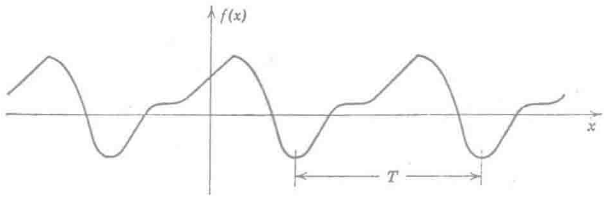

圖 203　週期性函數

由(1)知，若 n 為任意整數，則對所有之 x 而言，有

$$f(x+nT)=f(x)$$

故 $2T$，$3T$，$4T$，…等亦為 $f(x)$ 之週期。此外，若 $f(x)$ 及 $g(x)$ 之週期為 T，則函數

$$f(x)=af(x)+bg(x)\qquad(a，b\text{ 為常數})$$

之週期亦等於 T。

註 1：若週期性函數 $f(x)$ 具有最小週期 T（>0），則稱此為 $f(x)$ 之**原始週期**（*Primitive period*）。例如，$\sin x$ 與 $\sin 2x$ 之原始週期分別為 2π 與 π。無原始週期之週期性函數之例有 $f=$常數及 $f(x)=0$〔x 為有理數〕，熟知之週期性函數有正弦與餘弦函數。注意函數 $f=c=$常數，由定義亦為週期性函數，因其對任何正值 T 均能滿足(1)

本章前數節將討論週期爲 2 π 之各種函數，而以下列週期爲 2 π 之簡單函數

$$1 \quad \cos x, \sin x, \quad \cos 2x, \sin 2x, \cdots, \cos nx, \sin nx$$

表示之問題（圖 204 ）。與此有關之級數形式爲

$$(2) \qquad a_0 + a_1 \cos x + b_1 \sin x + a_2 \cos 2x + b_2 \cos 2x + \cdots,$$

其中 a_0，a_1，a_2，…，b_1，b_2，…均爲實值常數。此種級數稱爲**三角級數**（Trigonometric series），而 a_n 及 b_n 則稱爲此級數之**係數**。

吾人可看出此級數中每一項之週期均爲 2 π。故，**若級數具有收歛性，則其和亦爲週期等於 2 π 之函數**。

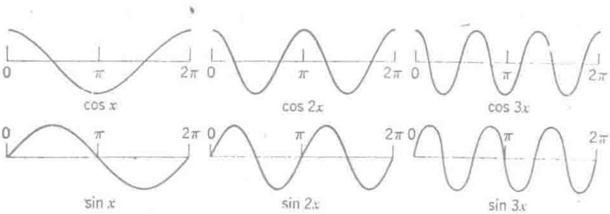

圖 204　餘弦及正弦函數之週期爲 2 π

在工程問題中出現之週期性函數通常均較複雜，故有將其用簡單週期性函數表示之必要。吾人將明瞭任何出現於應用問題中，例如有關振動問題等，週期爲 2 π 之週期性函數 $f(x)$，均可以三角級數表示。同時將導出(2)中各係數以 $f(x)$ 表示之公式，使(2)具有收歛性，其和恰爲 $f(x)$。稍後將推廣所得之結果至週期爲任意數值之函數；此種推廣方法極爲簡單。

第10－1節　習題

試求下列各函數之最小正值週期。

1　$\cos x$，$\sin x$，$\cos 2x$，$\sin 2x$，$\cos \pi x$，$\sin \pi x$，$\cos 2\pi x$，$\sin 2\pi x$

2. $\cos nx$，$\sin nx$，$\cos\dfrac{2\pi x}{k}$，$\sin\dfrac{2\pi x}{k}$，$\cos\dfrac{2\pi nx}{k}$，$\sin\dfrac{2\pi nx}{k}$

試繪出下列各函數精確之圖形。

3. $\sin x$，　$\sin x+\frac{1}{3}\sin 3x$，　$\sin x+\frac{1}{3}\sin 3x+\frac{1}{5}\sin 5x$

$$f(x)=\begin{cases}-\pi/4 & \text{當}\quad -\pi<x<0\\ \pi/4 & \text{當}\quad 0<x<\pi\end{cases}\qquad \text{以及} f(x+2\pi)=f(x)$$

4. $\sin 2\pi x$，　$\sin 2\pi x+\frac{1}{3}\sin 6\pi x$，　$\sin 2\pi x+\frac{1}{3}\sin 6\pi x+\frac{1}{5}\sin 10\pi x$

5. $\sin x$，$\sin x-\frac{1}{2}\sin 2x$，　$\sin x-\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{1}{3}\sin 3x$

$f(x)=x/2$　當　$-\pi<x<\pi$　以及 $f(x+2\pi)=f(x)$

6. $-\cos x$，　$-\cos x+\frac{1}{4}\cos 2x$，　$-\cos x+\frac{1}{4}\cos 2x-\frac{1}{9}\cos 3x$，

$f(x)=x^2/4-\pi^2/12$　當　$-\pi<x<\pi$　以及　$f(x+2\pi)=f(x)$

7. $f(x)=x^3$　當　$-\pi<x<\pi$　以及　$f(x+2\pi)=f(x)$

8. $f(x)=e^x$　當　$-\pi<x<\pi$　以及　$f(x+2\pi)=f(x)$

9. $f(x)=\cosh 2x$　當　$-\pi<x<\pi$ 以及 $f(x+2\pi)=f(x)$

10. $$f(x)=\begin{cases}0 & \text{當}\quad -\pi<x<0\\ x & \text{當}\quad 0<x<\pi\end{cases}\qquad \text{以及} f(x+2\pi)=f(x)$$

11. $f(x)=\begin{cases} -x^2 & \text{當} \quad -\pi<x<0 \\ x^2 & \text{當} \quad 0<x<\pi \end{cases}$ 以及$f\,(\,x+2\pi=f(x)$

12. $f(x)=\begin{cases} 1 & \text{當} \quad -\pi<x<0 \\ \cos^2 2x & \text{當} \quad 0<x<\pi \end{cases}$ 以及$f\,(\,x+2\pi\,)=f(x)$

13. 若T爲$f(x)$之一週期，試證nT，$n=2$，3，…亦爲該函數之週期。

14. 若$f(x)$及$g(x)$具有週期T，試證$h=af+bg$（a，b爲常數），具有週期T。因此所有週期爲T之函數形成一向量空間。

15. 試證函數$f(x)=$常數爲具有每一正值週期T之週期性函數。

16. 若$f(x)$爲x之週期性函數，其週期爲T，試證$f\,(\,ax\,)$，$a>0$，爲x之週期性函數，其週期爲T/a，以及$f\,(\,x/b\,)$，$b>0$，爲x之週期性函數，其週期爲bT。對$f(x)=\sin x$，$a=b=2$，驗證上述結果。

試求下列各積分之值，其中$n=0$，1，2，…（此等積分式爲吾人今後討論所需之典型範例）。

17. $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\cos nx dx$

18. $\displaystyle\int_0^{\pi}\sin nx dx$

19. $\displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2}x\cos nx dx$

20. $\displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2}x\sin nx dx$

21. $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}x\sin nx dx$

22. $\displaystyle\int_0^{\pi}x\sin nx dx$

23. $\displaystyle\int_0^{\pi}x^2\cos nx dx$

24. $\displaystyle\int_0^{\pi}e^x\cos nx dx$

25. $\displaystyle\int_{-\pi}^{0}e^x\sin nx dx$

10-2　符立爾級數・歐勒級數公式

設 $f(x)$ 爲週期等於 2π 之週期性函數，且可用下述三角級數表示

$$(1)\qquad f(x)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

已知如此之函數 $f(x)$，吾人欲求對應級數(1)中之係數 a_n 與 b_n。

先求 a_0。將(1)兩邊由 $-\pi$ 至 π 積分，可得

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx=\int_{-\pi}^{\pi}\left[a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)\right]dx$$

若此級數能逐項積分[2]，則可得

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx=a_0\int_{-\pi}^{\pi}dx+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\,dx+b_n\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\,dx\right)$$

右邊首項等於 $2\pi a_0$，而由直接積分，卽知所有右邊其他各項積分值均爲零。故第一個結果爲

$$(2)\qquad a_0=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx$$

吾人可用相似程序以求 a_1，a_2，…之值。將(1)乘以 $\cos mx$，其中 m 爲任意正整數，然後由 $-\pi$ 積分至 π，可得

$$(3)\qquad \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos mx\,dx=\int_{-\pi}^{\pi}\left[a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+bx\sin nx)\right]\cos mx\,dx$$

右邊逐項積分可得

$$a_0\int_{-\pi}^{\pi}\cos mx\,dx+\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\cos mx\,dx+b_n\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\cos mx\,dx\right]$$

第一項爲零。應用附錄 3 內(11)可得

註 2：吾人將就一致收斂性之情形證明此爲可行（參考 16.6 節中定理 3）。

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \ \cos mx \ dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(n+m)x \ dx + \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(n-m)x \ dx,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \ \cos mx \ dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \sin(n+m)x \, dx + \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \sin(n-m)x \, dx$$

上式等號右邊四項積分爲零，僅第一式中之最後一項，當$n=m$時等於π。因在(3)中此項被乘以a_m，故(3)之右邊等於$a_m\pi$，故得第二結果爲

$$a_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos mx \ dx, \qquad m=1,2,\cdots\cdots \tag{4}$$

最後求(1)中之b_1，b_2，…。若將(1)乘以$\sin mx$，其中m爲任意正整數，然後由$-\pi$積分至π，可得

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin mx \ dx = \int_{-\pi}^{\pi} \left[a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx)\right]\sin mx \ dx 。\tag{5}$$

逐項積分後，右邊變成

$$a_0\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \ dx + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \ \sin mx \ dx + b_n\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \ \sin mx \, dx\right]$$

第一項積分爲零。次一積分型式前曾論及，且知對所有之$n=1, 2,\cdots$，其值爲零。最後一項積分可變換爲

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \ \sin mx \, dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(n-m)x \, dx - \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(\cos(n+m)x \ dx。$$

最後一項爲零。右邊第一項當$n\neq m$時爲零，當$n=m$時爲π。因(5)中此項被乘以b_m，故(5)式右邊等於$b_m\pi$，因此可得最後結

果如下：

$$b_m=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin mx dx, \qquad m=1,2,\cdots\cdots$$

以n取代m後，總結可得下列所謂歐勒公式：

$$\text{(6)}\quad \begin{aligned} &\text{(a)}\quad a_0=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx \\ &\text{(b)}\quad a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\ dx \\ &\text{(c)}\quad b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\ dx \end{aligned} \qquad n=1,2,\cdots,$$

注意由於被積分函數具有週期性，(6)中之積分區間可以長度爲2π之任意區間取代之，例如，區間$0\leqq x\leqq 2\pi$。

若已知一週期爲2π之週期性函數，則由(6)可求得a_n及b_n之值，而形成三角級數。

$$\text{(7)}\quad a_0+a_1\cos x+b_1\sin x+\cdots+a_n\cos nx+b_n\sin nx+\cdots$$

此級數稱爲對應於$f(x)$之**符立爾級數**。由(6)求得之係數稱爲$f(x)$之**符立爾級數**（ Fourier coefficients ）。

由定積分定義知，若$f(x)$爲連續，或僅具分段連續性（即在積分區間內，除有限數目之跳躍點而外，其餘均爲連續），則(6)中之積分存在。利用(6)即可得$f(x)$之符立爾係數值。剩下之問題爲：如上所得之符立爾級數是否具有收歛性？又其和是否爲$f(x)$？本節稍後將予討論。

茲舉一簡易例題，以說明(6)之實際用途。若干其他例題將在以下幾節中出現。

例 1　方波

試求圖 205 a 中所示週期性函數$f(x)$之符立爾係數。此函數之解析表示法爲