泛函分析

康淑瑰　主编

郭建敏　崔亚琼　郭彩霞　黄利忠　编

科学出版社

泛函分析

康淑瑰　主编

郭建敏　崔亚琼　郭彩霞　黄利忠　编

山西省特色专业建设项目

山西大同大学“一院一品”建设项目

山西省教学平台项目——专业改革课程建设专项

科学出版社

北京

内 容 简 介

本书是为数学类各专业本科生泛函分析课程编写的教材，在介绍泛函分析基本知识的同时，重视与经典分析、线性代数等课程之间的联系，让学生感受数学知识的产生和应用过程，注意数学思想方法的渗透、数学思维方式的训练和知识的更新. 全书共 5 章，分别介绍距离空间、赋范线性空间、内积空间、Banach 空间上的有界线性算子和 Hilbert 空间上的有界线性算子. 每章均配有习题.

本书需要读者具备高等数学和线性代数的基础知识，可作为数学与应用数学、信息与计算科学专业本科生以及工科研究生的教学用书，也可作为相关科研人员的参考书.

图书在版编目（CIP）数据

泛函分析/康淑瑰主编；郭建敏等编. —北京：科学出版社，2017. 1
ISBN 978-7-03-051478-3

Ⅰ. ①泛… Ⅱ. ①康… ②郭… Ⅲ. ①泛函分析-高等学校-教材
Ⅳ. ①O177

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2017) 第 000385 号

责任编辑：王 静／责任校对：张凤琴
责任印制：张 伟／封面设计：迷底书装

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

北京东华虎彩印刷有限公司 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2017 年 1 月第 一 版 开本：720 × 1000 B5
2017 年 1 月第一次印刷 印张：9 1/2
字数：192 000

定价：29.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

前　言

19 世纪末, 分析数学出现了抽象化的趋势, 探求其中结论与方法的一般性和统一性是它的突出特点. 泛函分析是将数学中不同学科的某些对象之间相似的思想和方法, 加以归纳和总结, 建立一套对同种类型的对象进行统一处理的新理论.

作为现代数学的基础课之一, 泛函分析是从事数学理论研究和实际应用的科技工作者不可缺少的一门学科. 它将实数域上的基本理论推广到一般线性空间上, 综合运用分析、代数、几何的观点和方法研究数学问题. 通过这门课程的学习, 学生可清楚有限维空间与无穷维空间的区别和联系, 掌握运用代数、分析和拓扑知识研究问题的方法.

本书是全体编者在山西大同大学数学类专业长期任教过程中, 将各自的心得体会融合到专业知识中形成的, 凝聚了全体编者的心血. 编者在知识传授过程中, 注重相关课程之间联系的同时, 加强其中所蕴含的数学思想方法的介绍, 提高学生数学素养和思维能力. 全书共 5 章, 前 3 章介绍空间理论, 后两章介绍算子理论. 第 2 章由康淑瑰编写并完成全书的统筹工作, 第 1 章、第 3 章、第 4 章、第 5 章分别由郭建敏、郭彩霞、崔亚琼、黄利忠编写.

本书的完成得到山西省教学平台项目 —— 专业改革课程建设专项和山西省特色专业建设项目以及山西大同大学 “一院一品” 建设项目、教学名师项目支持, 也得到山西大同大学领导和教务处的支持, 我们在此一并表示感谢. 也感谢科学出版社工作人员为本书出版所付出的辛勤劳动. 我们会努力办好山西大同大学数学专业, 为中国教育事业做贡献. 使中国成为人才大国是我们的共同愿望, 让我们一起为之努力!

编者虽然尽了很大努力, 但由于水平所限, 加之数学教育的不断发展, 书中不足与疏漏是难免的. 我们真诚希望各位同行与读者提出宝贵意见, 使我们不断改进, 提高质量.

全体编者

2015 年 12 月于山西大同大学

目　录

第1章 距离空间

当一个集合被赋予某种结构, 我们称之为空间. 泛函分析的基础建立在集合的两种结构之上, 一种是拓扑 (本书体现为距离) 结构, 另一种是代数结构, 即线性结构. 距离空间是 n 维 Euclid 空间 $\mathbf{R}^n$ 的推广, 它把 Euclid 空间中两点间距离的数学本质抽象出来, 从而在更一般的集合上建立起抽象的距离空间理论. 它是泛函分析空间理论的重要组成之一, 为今后更复杂空间中一些类似问题的统一处理提供了基础.

1.1 距离空间的基本概念

数学分析主要研究 n 维 Euclid 空间及其上函数的分析性质. 当我们定义了 $\mathbf{R}^n$ 中的距离, 就可以在此基础上给出邻域、内点、聚点、开集、闭集、极限等基本概念, 更进一步可以研究连续性、有界性、敛散性、微分与积分等重要理论. 所以, "距离" 在数学分析中起着根本的作用. 现在, 我们把 "距离" 最基本的性质抽象化, 移植到一般的抽象集合上去, 从而给出距离空间的概念.

1.1.1 距离空间的定义及例子

定义 1.1.1 设 X 是非空集合, 如果按某一对应法则, 对于 X 中的任意两点 x,y, 有一个确定实数 $\rho(x,y)$ 与之对应, 且满足下列条件:

(i) **非负性** $\rho(x,y)\geqslant 0$, $\rho(x,y)=0$ 当且仅当 $x=y$;

(ii) **对称性** $\rho(x,y)=\rho(y,x)$;

(iii) **三角不等式** $\rho(x,y)\leqslant\rho(x,z)+\rho(z,y)$, 其中 z 为 X 中的任意一点, 则称 $\rho(x,y)$ 是 x,y 之间的**距离**, 称 $X\times X$ 上的函数 $\rho=\rho(\cdot,\cdot)$ 为 X 上的一个**距离**, 并称 X 按 ρ 为**距离空间或度量空间**, 记为 (X,ρ). 在不引起混淆的情况下, 也可简称为距离空间 X.

其中条件 (i)~(iii) 通常称为距离三公理. 由 (iii) 易得 $|\rho(x,z)-\rho(y,z)|\leqslant\rho(x,y)$ 也成立.

若 A 是 X 的非空子集, 则 (A,ρ) 也是一距离空间, 称 A 是 X 的**子空间**.

在任意一个非空集合上, 我们都可以定义距离. 例如, 对于 X 中任意两点 x,y,

定义

$$\rho(x,y)=\begin{cases}1, & x\neq y,\\ 0, & x=y,\end{cases}$$

易证 (X,ρ) 是一个距离空间. 我们称之为**离散距离空间或平凡距离空间**.

下面介绍一些常用的距离空间.

例 1.1.1 n 维欧氏空间 $\mathbf{R}^n$.

对任意 $x=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$, $y=(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n)\in\mathbf{R}^n$, 定义

$$\rho(x,y)=\left(\sum_{k=1}^{n}(\xi_k-\eta_k)^2\right)^{\frac{1}{2}}, \tag{1.1.1}$$

则 $(\mathbf{R}^n,\rho)$ 是一距离空间.

距离公理 (i) 与 (ii) 显然成立. 下面验证 (iii). 为此先证明 Cauchy 不等式

$$\left(\sum_{k=1}^{n}a_kb_k\right)^2\leqslant\sum_{k=1}^{n}a_k^2\sum_{k=1}^{n}b_k^2.$$

事实上, 任取实数 λ, 则

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k+\lambda b_k)^2=\sum_{k=1}^{n}a_k^2+2\lambda\sum_{k=1}^{n}a_kb_k+\lambda^2\sum_{k=1}^{n}b_k^2\geqslant 0.$$

等式右端是关于 λ 的一个二次三项式, 于是它的判别式不大于 0, 即 Cauchy 不等式成立. 从而

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^2&=\sum_{k=1}^{n}a_k^2+2\sum_{k=1}^{n}a_kb_k+\sum_{k=1}^{n}b_k^2\\&\leqslant\sum_{k=1}^{n}a_k^2+2\left[\left(\sum_{k=1}^{n}a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n}b_k^2\right)\right]^{\frac{1}{2}}+\sum_{k=1}^{n}b_k^2\\&=\left[\left(\sum_{k=1}^{n}a_k^2\right)^{\frac{1}{2}}+\left(\sum_{k=1}^{n}b_k^2\right)^{\frac{1}{2}}\right]^2.\end{aligned}$$

设 $x=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$, $y=(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n)$, $z=(\zeta_1,\zeta_2,\cdots,\zeta_n)\in\mathbf{R}^n$, 在上式中令 $a_k=\xi_k-\zeta_k, b_k=\zeta_k-\eta_k$, 则

$$\left[\sum_{k=1}^{n}(\xi_k-\eta_k)^2\right]^{\frac{1}{2}}\leqslant\left[\sum_{k=1}^{n}(\xi_k-\zeta_k)^2\right]^{\frac{1}{2}}+\left[\sum_{k=1}^{n}(\zeta_k-\eta_k)^2\right]^{\frac{1}{2}},$$

即

$$\rho(x,y) \leqslant \rho(x,z)+\rho(z,y).$$

所以 $(\mathbf{R}^n,\rho)$ 是一个距离空间.

类似于 $\mathbf{R}^n$, 我们也可以在 n 维复向量空间 $\mathbf{C}^n$ 中, 定义距离

$$\rho(x,y)=\left(\sum_{k=1}^{n}|\xi_k-\eta_k|^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

其中 $x=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$, $y=(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n)\in\mathbf{C}^n$, 可以验证 $(\mathbf{C}^n,\rho)$ 也是一个距离空间.

同一个集合上定义距离的方式是不唯一的, 即在同一个集合中, 可以引进不同的距离使其成为不同的距离空间. 比如 $\mathbf{R}^n$ 中还常常有如下两种距离:

$$\rho_1(x,y)=\max_{1\leqslant k\leqslant n}|\xi_k-\eta_k|; \tag{1.1.1$'$}$$

$$\rho_2(x,y)=\sum_{k=1}^{n}|\xi_k-\eta_k|. \tag{1.1.1$''$}$$

尽管如此, 我们还是应当根据集合的特点适当地引进距离, 以充分反映这些特点. 比如在 $\mathbf{R}^n$ 中, 我们常用的还是欧氏距离.

例 1.1.2 空间 $C[a,b]$.

$C[a,b]$ 是指定义在 $[a,b]$ 上所有实 (或复) 连续函数构成的集合. $C[a,b]$ 中任意两个元素 x,y 之间的距离定义为

$$\rho(x,y)=\max_{t\in[a,b]}|x(t)-y(t)|, \tag{1.1.2}$$

则 $C[a,b]$ 按照 (1.1.2) 中定义的 ρ 是一个距离空间.

证 由于 $x(t)-y(t)$ 也是 $[a,b]$ 上的连续函数, 所以有最大值. 距离公理 (i) 与 (ii) 显然成立, 下面验证 (iii) 成立.

设 $x,\ y,\ z\in C[a,b]$, 则

$$\begin{aligned}|x(t)-y(t)| &\leqslant |x(t)-z(t)|+|z(t)-y(t)|\\ &\leqslant \max_{t\in[a,b]}|x(t)-z(t)|+\max_{t\in[a,b]}|z(t)-y(t)|\\ &=\rho(x,z)+\rho(z,y).\end{aligned}$$

因此

$$\rho(x,y)=\max_{t\in[a,b]}|x(t)-y(t)|\leqslant\rho(x,z)+\rho(z,y),$$

故 $C[a,b]$ 按 (1.1.2) 式的距离是一个距离空间.

例 1.1.3 空间 $L^p(E)(1\leqslant p<\infty)$, 其中 $E\subset\mathbf{R}^n$ 为可测集.

$L^p(E)$ 表示定义在可测集 E 上所有 p 幂可积函数构成的集合, 其中任意两个几乎处处相等的函数视为同一元素. $L^p(E)$ 中任意两个元素 x,y 之间的距离定义为

$$\rho(x,y)=\left(\int_E|x(t)-y(t)|^p\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p}}, \tag{1.1.3}$$

则 $L^p(E)$ 按照 (1.1.3) 定义的 ρ 是一个距离空间.

为了验证三角不等式, 需用到两个著名的不等式

$$\int_E|x(t)y(t)|\mathrm{d}t\leqslant\left(\int_E|x(t)|^p\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_E|y(t)|^q\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{q}}, \tag{1.1.4}$$

其中 $x\in L^p(E)$, $y\in L^q(E)$, p,q 互为相伴数且 $1<p,q<\infty$.

$$\left(\int_E|x(t)+y(t)|^p\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p}}\leqslant\left(\int_E|x(t)|^p\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\int_E|y(t)|^p\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p}}, \tag{1.1.5}$$

其中 $x,y\in L^p(E)$, $1\leqslant p<\infty$. (1.1.4) 式称为 **Hölder 不等式**, (1.1.5) 式称为 **Minkowski 不等式**.

例 1.1.4 空间 $L^\infty(E)$.

如果存在可测集 E 的某个零测度子集 E_0, 使得可测函数 x 在集合 $E\setminus E_0$ 上有界, 则称函数 x 在 E 上是**本性有界**的. 可测集 E 上所有本性有界可测函数构成的集合记为 $L^\infty(E)$, 其中任意两个几乎处处相等的函数视为同一元素. $L^\infty(E)$ 中任意两个元素 x,y 之间的距离定义为

$$\begin{aligned}\rho(x,y)&=\inf_{\substack{mE_0=0\\E_0\subset E}}\left\{\sup_{t\in E\setminus E_0}|x(t)-y(t)|\right\}\\&=\operatorname*{ess\,sup}_{t\in E}|x(t)-y(t)|,\end{aligned} \tag{1.1.6}$$

则 $L^\infty(E)$ 按照 (1.1.6) 式定义的 ρ 是一个距离空间.

证 只需证三角不等式成立. 设 $x,y,z\in L^\infty(E)$, 由下确界的定义, 对任意 $\varepsilon>0$, 存在 E 的子集 E_1,E_2, $mE_1=mE_2=0$, 使得

$$\sup_{t\in E\setminus E_1}|x(t)-z(t)|<\rho(x,z)+\frac{\varepsilon}{2},$$

$$\sup_{t\in E\setminus E_2}|z(t)-y(t)|<\rho(z,y)+\frac{\varepsilon}{2}.$$

注意到 $m(E_1\cup E_2)=0$, 则有

$$\begin{aligned}\rho(x,y)&\leqslant \sup_{t\in E\setminus(E_1\cup E_2)}|x(t)-y(t)|\\&\leqslant \sup_{t\in E\setminus(E_1\cup E_2)}|x(t)-z(t)|+\sup_{t\in E\setminus(E_1\cup E_2)}|z(t)-y(t)|\\&\leqslant \sup_{t\in E\setminus E_1}|x(t)-z(t)|+\sup_{t\in E\setminus E_2}|z(t)-y(t)|\\&<\rho(x,z)+\rho(z,y)+\varepsilon.\end{aligned}$$

由 ε 的任意性, 可得 $\rho(x,y)\leqslant\rho(x,z)+\rho(z,y)$. 因此 $L^\infty(E)$ 按照 (1.1.6) 中的 ρ 是一个距离空间.

与函数空间 $L^p(E)(1\leqslant p<\infty)$ 相对应的还有序列空间 $l^p(1\leqslant p<\infty)$.

例 1.1.5 空间 $l^p(1\leqslant p<\infty)$.

l^p 是由满足不等式 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|\xi_n|^p<\infty$ 的实 (或复) 数列 $x=\{\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n,\cdots\}$ 构成的集合. 任取 l^p 中两个元素 $x=\{\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n,\cdots\}$ 及 $y=\{\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n,\cdots\}$, 定义距离

$$\rho(x,y)=\left(\sum_{n=1}^{\infty}|\xi_n-\eta_n|^p\right)^{\frac{1}{p}},\tag{1.1.7}$$

则 $l^p(1\leqslant p<\infty)$ 按照 (1.1.7) 式定义的 ρ 是一个距离空间.

与空间 $L^p(E)(1\leqslant p<\infty)$ 类似, 三角不等式的验证要用到下列离散形式的 **Hölder 不等式和 Minkowski 不等式**.

$$\sum_{n=1}^{\infty}|\xi_n\eta_n|\leqslant\left(\sum_{n=1}^{\infty}|\xi_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{n=1}^{\infty}|\eta_n|^q\right)^{\frac{1}{q}},\tag{1.1.8}$$

其中 $x=\{\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n,\cdots\}\in l^p$, $y=\{\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n,\cdots\}\in l^q$, p,q 互为相伴数且满足 $1<p,q<\infty$.

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty}|\xi_n+\eta_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}\leqslant\left(\sum_{n=1}^{\infty}|\xi_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum_{n=1}^{\infty}|\eta_n|^p\right)^{\frac{1}{p}},\tag{1.1.9}$$

其中 $x=\{\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n,\cdots\}\in l^p$, $y=\{\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n,\cdots\}\in l^p$, $1\leqslant p<\infty$.

例 1.1.6 空间 l^∞.

l^∞ 是由一切有界的实 (或复) 数列构成的集合. l^∞ 中任意两个元素 x, y 之间的距离定义为

$$\rho(x,y)=\sup_{1\leqslant n<\infty}|\xi_n-\eta_n|,\tag{1.1.10}$$

其中 $x=\{\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n,\cdots\}$, $y=\{\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n,\cdots\}$. 不难证明 (1.1.10) 中定义的 ρ 满足距离公理的全部条件, 因此 l^∞ 按照 (1.1.10) 式定义的距离 ρ 是一个距离空间.

例 1.1.7 空间 s.

s 是由一切实 (或复) 数序列 $\{\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_k,\cdots\}$ 构成的集合. s 中任何两个元素 x,y 之间的距离定义为

$$\rho(x,y)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}\frac{|\xi_k-\eta_k|}{1+|\xi_k-\eta_k|}, \tag{1.1.11}$$

其中 $x=\{\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_k,\cdots\}$, $y=\{\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_k,\cdots\}$, 则 s 按照 (1.1.11) 定义的距离 ρ 是一个距离空间.

证 式 (1.1.11) 右边的 $\dfrac{1}{2^k}$ 是收敛因子, 保证级数收敛. 距离公理 (i), (ii) 显然成立. 为证三角不等式, 考虑 $[0,\infty)$ 上的函数 $f(t)=\dfrac{t}{1+t}$. 易见 $f'(t)=\dfrac{1}{(1+t)^2}>0$, 所以 $f(t)$ 是单增的. 由此设 $x=\{\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_k,\cdots\}$, $y=\{\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_k,\cdots\}$, $z=\{\zeta_1,\zeta_2,\cdots,\zeta_k,\cdots\}$, 由于

$$|\xi_k-\eta_k|\leqslant|\xi_k-\zeta_k|+|\eta_k-\zeta_k|,$$

则有

$$\begin{aligned}\frac{|\xi_k-\eta_k|}{1+|\xi_k-\eta_k|}&\leqslant\frac{|\xi_k-\zeta_k|+|\zeta_k-\eta_k|}{1+|\xi_k-\zeta_k|+|\zeta_k-\eta_k|}\\&=\frac{|\xi_k-\zeta_k|}{1+|\xi_k-\zeta_k|+|\zeta_k-\eta_k|}+\frac{|\zeta_k-\eta_k|}{1+|\xi_k-\zeta_k|+|\zeta_k-\eta_k|}\\&\leqslant\frac{|\xi_k-\zeta_k|}{1+|\xi_k-\zeta_k|}+\frac{|\zeta_k-\eta_k|}{1+|\zeta_k-\eta_k|}.\end{aligned}$$

在不等式两边乘 $\dfrac{1}{2^k}$ 并求和, 则得

$$\begin{aligned}\rho(x,y)&=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}\frac{|\xi_k-\eta_k|}{1+|\xi_k-\eta_k|}\\&\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}\frac{|\xi_k-\zeta_k|}{1+|\xi_k-\zeta_k|}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}\frac{|\zeta_k-\eta_k|}{1+|\eta_k-\zeta_k|}\\&=\rho(x,z)+\rho(y,z).\end{aligned}$$

因此 s 按照 (1.1.11) 中定义的距离 ρ 是一个距离空间.

1.1.2 距离空间中的收敛性

在非空集合中引入距离后, 与距离有关的概念就可以推广到一般的距离空间中, 收敛性是其中之一. 在学习收敛性质的过程中, 注意与数学分析中的相应结论作比较.

定义 1.1.2 设 $\{x_n\}(n=1,2,\cdots)$ 是距离空间 X 中的一个点列, x_0 是 X 中的一点. 若当 $n\to\infty$ 时, 有 $\rho(x_n,x_0)\to 0$, 则称点列 $\{x_n\}$ 收敛于 x_0, 记为

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \quad \text{或} \quad \{x_n\}\to x_0\ (n\to\infty).$$

有时也简记为

$$x_n\to x_0,\quad n\to\infty,$$

称 x_0 为 $\{x_n\}$ 的**极限**.

定理 1.1.1 设 $\{x_n\}$ 为距离空间 X 中的一个收敛点列, 则下列性质成立:

(i) $\{x_n\}$ 的极限是唯一的;

(ii) 如果 x_0 是 $\{x_n\}$ 的极限, 那么 $\{x_n\}$ 的任一子列 $\{x_{n_k}\}$ 均收敛且以 x_0 为极限.

证 (i) 若 $\{x_n\}$ 的极限不唯一. 设 $x_n\to x_0$, 且 $x_n\to y_0(n\to\infty)$, 则对任意 $\varepsilon>0$, 存在自然数 N, 当 $n>N$ 时, 有

$$\rho(x_n,x_0)<\frac{\varepsilon}{2} \quad \text{且} \quad \rho(x_n,y_0)<\frac{\varepsilon}{2}.$$

由三角不等式, 当 $n>N$ 时, 得

$$\rho(x_0,y_0)\leqslant \rho(x_0,x_n)+\rho(x_n,y_0)<\varepsilon.$$

由 ε 的任意性知, $\rho(x_0,y_0)=0$, 故 $x_0=y_0$.

(ii) 设 $x_n\to x_0(n\to\infty)$, 即对任意 $\varepsilon>0$, 存在自然数 N, 当 $n>N$ 时,

$$\rho(x_n,x_0)<\varepsilon.$$

故当 $k>N$ 时, $n_k\geqslant k>N$, 则 $\rho(x_{n_k},x_0)<\varepsilon$, 即 $x_{n_k}\to x_0(k\to\infty)$.

我们看到, 在距离空间中极限的概念是通过距离来定义的. 值得注意的是, 同一个非空集合, 一般来说, 不同的距离所决定的收敛是不一样的. 例如, 在 $\mathbf{R}$ 中可以定义距离

$$\rho_1(x,y)=|x-y|,$$

也可以定义距离

$$\rho_2(x,y)=\begin{cases} 0, & x=y,\\ 1, & x\neq y,\end{cases}$$

点列 $\left\{\dfrac{1}{n}\right\}$ 依 ρ_1 收敛于 0, 但在 ρ_2 下却不是收敛列.

如果在集合 X 上定义两种不同的距离 ρ_1 与 ρ_2, 它们所决定的收敛性相同, 我们就说 ρ_1 与 ρ_2 **等价**, 即得如下定义.

定义 1.1.3　称集合 X 上的两距离 ρ_1 与 ρ_2 是**等价**的, 若对于 X 中任一点列 $\{x_n\}$ 及点 $x_0 \in X$, $\rho_1(x_n, x_0) \to 0(n \to \infty)$ 的充要条件是 $\rho_2(x_n, x_0) \to 0(n \to \infty)$.

如果一个非空集合中定义了两个或两个以上的距离, 那么由它们导出的收敛可以等价也可以不等价. 当距离不等价时, 便得到本质上不同的两个或两个以上的距离空间.

下面考察几个具体的距离空间中收敛性的涵义.

对于 $\mathbf{R}^n$ 来说, 按 (1.1.1), (1.1.1)$'$ 及 (1.1.1)$''$ 定义的距离彼此等价, 且距离收敛都等价于按坐标分量收敛, 即 $\rho(x^{(m)}, x) \to 0$ 的充要条件是点列 $\{x^{(m)}\} = \{(\xi_1^{(m)}, \xi_2^{(m)}, \cdots, \xi_n^{(m)})\}$ 的每个坐标列 $\{\xi_k^{(m)}\}(m=1,2,\cdots)$ 收敛于 $x=(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)$ 的相应坐标 $\xi_k(k=1,2,\cdots,n)$.

在空间 $C[a,b]$ 中, 若 $\rho(x_n, x_0) \to 0(n \to \infty)$, 即

$$\max_{a \leqslant t \leqslant b} |x_n(t) - x_0(t)| \to 0, \quad n \to \infty,$$

则对任意 $\varepsilon > 0$, 存在着仅与 ε 有关的 N, 使得当 $n > N$ 时, 对所有的 $t \in [a,b]$, 有

$$|x_n(t) - x_0(t)| \leqslant \max_{a \leqslant t \leqslant b} |x_n(t) - x_0(t)| < \varepsilon,$$

即函数列 $\{x_n(t)\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于函数 $x_0(t)$. 反之, 如果 $\{x_n(t)\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于 $x_0(t)$, 则 $\rho(x_n, x_0) \to 0(n \to \infty)$.

因此, $C[a,b]$ 中的点列按距离收敛等价于函数列在 $[a,b]$ 上一致收敛, 这种收敛在分析中有重要的作用.

在 $C[a,b]$ 中还可以定义其他的距离, 但相应的收敛未必与一致收敛等价. 由于 $[a,b]$ 上连续函数皆 Lebesgue 可积, 从而对 $C[a,b]$ 中任意两个元素 x, y, 可定义距离

$$\rho_1(x,y) = \int_{[a,b]} |x(t) - y(t)| \mathrm{d}t. \tag{1.1.12}$$

容易看出, $C[a,b]$ 按照 ρ_1 是一个距离空间而且是 $L[a,b]$ 的子空间. 在 $C[a,b]$ 中取函数列

$$x_n(t) = \left(\frac{t-a}{b-a}\right)^n, \quad t \in [a,b], \quad n = 1, 2, \cdots.$$

由 Lebesgue 控制收敛定理, $\{x_n\}$ 按照距离 ρ_1 收敛于 $C[a,b]$ 中的零元素. 但作为函数列, $\{x_n(\cdot)\}$ 在 $[a,b]$ 上显然不一致收敛于零. 因此在 $C[a,b]$ 中, 按照距离 ρ_1 导出的收敛概念不等价于函数列的一致收敛.

1.1.3 距离空间上的映射

为了更全面地认识距离空间, 还可以研究两个距离空间之间的映射, 其中以连续映射尤为重要, 这是连续函数概念在距离空间的推广.

定义 1.1.4 设 (X,ρ), (Y,ρ_1) 都是距离空间. 如果对任一 $x\in X$, 按照某个对应法则必有 Y 中唯一的 y 与之对应, 则称这个对应是一个**映射**. 映射常用记号 T 来表示, 据此有 $Tx=y$.

在泛函分析中, 习惯把映射 (特别是线性空间上的映射) 称为**算子**, 把值域为数集的算子称为**泛函**.

若对任意的 $x_1,x_2\in X$, 当 $x_1\neq x_2$ 时, $Tx_1\neq Tx_2$, 则称 T 是由距离空间 X 到距离空间 Y 的**单射**. 若 $T(X)=Y$, 则称 T 为**满射**. 既是单射又是满射的映射称为**双射**或**一一映射**. 此时对于任一 $y\in Y$, 必存在唯一的 $x\in X$, 使得

$$Tx=y. \tag{1.1.13}$$

因此通过 (1.1.13) 我们得到一个新的映射, 它将 y 映射成 x. 称这个映射为 T 的**逆映射**, 记为 T^{-1}. 于是

$$T^{-1}y=x.$$

容易看出, 对任意 $x\in X$, 有 $T^{-1}(Tx)=x$; 对任意 $y\in Y$, 则有 $T(T^{-1}y)=y$. 当 T 存在逆映射时, 称 T 是**可逆的**.

定义 1.1.5 设映射 $T:X\to Y$, $A\subset X$. 称集合 $\{Tx:x\in A\}$ 为集合 A 的**像**, 记为 $T(A)$. 设 $B\subset Y$, 则称集合 $\{x:Tx\in B\}$ 为集合 B 的**原像**, 记为 $T^{-1}(B)$.

定义 1.1.6 设 (X,ρ), (Y,ρ_1) 都是距离空间, $T:X\to Y$ 是一个映射, $x_0\in X$. 如果对任意 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 当 $\rho(x,x_0)<\delta$ 时, 有 $\rho_1(Tx,Tx_0)<\varepsilon$ 成立, 则称映射 T 在点 x_0 处**连续**. 如果映射 T 在 X 中的每一点处都连续, 则称 T 在 X 上**连续**, 且称 T 是**连续映射**.

定理 1.1.2 距离 $\rho(x,y)$ 是关于 x 和 y 的二元连续泛函, 即若 $x_n\to x_0, y_n\to y_0(n\to\infty)$, 则 $\rho(x_n,y_n)\to\rho(x_0,y_0)(n\to\infty)$.

证 由三角不等式得

$$\begin{aligned}\rho(x_n,y_n)&\leqslant\rho(x_n,x_0)+\rho(x_0,y_n)\\&\leqslant\rho(x_n,x_0)+\rho(x_0,y_0)+\rho(y_0,y_n),\end{aligned}$$

因此

$$\rho(x_n,y_n)-\rho(x_0,y_0)\leqslant\rho(x_n,x_0)+\rho(y_n,y_0).$$

同样地, 有

$$\rho(x_0,y_0)-\rho(x_n,y_n)\leqslant\rho(x_n,x_0)+\rho(y_n,y_0).$$

因而

$$|\rho(x_n,y_n)-\rho(x_0,y_0)|\leqslant\rho(x_n,x_0)+\rho(y_n,y_0),$$

所以 $\rho(x_n,y_n)\to\rho(x_0,y_0)(n\to\infty)$.

关于映射的连续性, 有以下的等价说法.

定理 1.1.3 设 $T:X\to Y$, 则 T 在点 $x_0\in X$ 连续的充分必要条件是对任意收敛于 x_0 的点列 $\{x_n\}\subset X$, 有 $\{Tx_n\}$ 收敛于 Tx_0.

证 **必要性** 设 T 在点 x_0 处连续, 则对任意 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 使得当 $\rho(y,x_0)<\delta$ 时, $\rho_1(Ty,Tx_0)<\varepsilon$. 若 $\{x_n\}\subset X(n=1,2,\cdots)$ 收敛于 x_0, 则存在 $N>0$, 使得当 $n>N$ 时, $\rho(x_n,x_0)<\delta$. 因此当 $n>N$ 时, 有 $\rho_1(Tx_n,Tx_0)<\varepsilon$, 即 $\{Tx_n\}\to Tx_0$.

充分性 假设不然, 若 T 在 x_0 处不连续, 则存在 $\varepsilon_0>0$, 对每个 $n\in N$, 都有 $x_n\in X$, 使得 $\rho(x_n,x_0)<\dfrac{1}{n}$, 但 $\rho_1(Tx_n,Tx_0)\geqslant\varepsilon_0$. 即在 X 中 $x_n\to x_0$, 但在 Y 中 Tx_n 不收敛于 Tx_0, 这与已知矛盾. 所以 T 在点 x_0 处连续.

连续映射的两个重要特例是同胚映射及等距映射.

定义 1.1.7 设 (X,ρ), (Y,ρ_1) 都是距离空间, $T:X\to Y$ 是一个映射. 若 T 存在逆映射, 且 T 及其逆映射 T^{-1} 均连续, 则称 T 是 X 到 Y 上的**同胚映射**. 此时称 X 与 Y**同胚**.

设 T 是双映射, 且对任意的 $x,y\in X$, 有 $\rho_1(Tx,Ty)=\rho(x,y)$, 则称 T 是 X 到 Y 上的**等距映射**, 此时称 X 与 Y**等距**. 显然, 等距映射均为同胚映射.

如果仅限于讨论距离空间的性质, 这时空间是由什么元素组成的并不重要, 两个同胚或等距的距离空间没有本质的差别, 在很多情况下可视为同一.

例 1.1.8 $y=\arctan x$ 是 $\mathbf{R}$ 到 $\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$ 上的同胚映射, 从而 $\mathbf{R}$ 与 $\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$ 同胚. $y=\mathrm{e}^x$ 是 $\mathbf{R}$ 到 $(0,\infty)$ 上的同胚映射, 因此 $\mathbf{R}$ 与 $(0,\infty)$ 同胚.

1.2 距离空间的点集 · 稠密性与可分性

1.2.1 几类特殊的点集

为了进一步研究距离空间中极限、连续等概念, 有必要研究距离空间中的特殊点集. 这些概念在《数学分析》《复变函数》以及《实变函数》中都曾给出过, 现在把这些概念和结论相应地推广到一般的距离空间, 大多数定义的叙述和定理的证明, 几乎可以把前面的行文逐字逐句地移植过来, 而无须进行多大改变. 尽管如此, 由于一般距离函数的广泛性, 仍需仔细对待这里概念的拓广, 而且我们会发现, 在泛函分析中这些概念丰富得多, 也深刻得多.