 高等院校数学精品教材

概率论与数理统计

王信峰 主编



清华大学出版社

 高等院校数学精品教材

概率论与数理统计

主 编 王信峰
副主编 李承耕

清华大学出版社
北 京

内 容 简 介

本书共八章：第1章，随机事件及概率计算；第2章，随机变量及其分布；第3章，随机变量的数字特征；第4章，几种重要的随机变量及其分布；第5章，数理统计基础知识；第6章，参数估计；第7章，假设检验；第8章，方差分析与回归分析。其中第1～4章为概率部分，第5～8章为数理统计部分。基于实际应用的课程开发设计模式是本书的特色，另为便于学习者，书后还附加了排列组合的内容介绍。本书教学目的明确，实际问题具体，有大量翔实的应用实例可供参考，有相当数量的应用问题可供实践。此外，本书还配有数字教学资源，极大地满足了广大师生的教学需要。

本书可作为本科院校非数学专业“概率论与数理统计”课程的教材或参考用书，也可作其他高校相关专业的教材参考用书。

本书封面贴有清华大学出版社防伪标签，无标签者不得销售。

版权所有，侵权必究。侵权举报电话：010-62782989 13701121933

图书在版编目（CIP）数据

概率论与数理统计/王信峰主编. —北京：清华大学出版社，2016
高等院校数学精品教材
ISBN 978-7-302-42995-1

I. 概… II. 王… III. ①概率论—高等学校—教材②数理统计—高等学校—教材 IV. ①O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2016) 第 031101 号

责任编辑：佟丽霞

封面设计：钱金华

责任校对：赵丽敏

责任印制：王静怡

出版发行：清华大学出版社

网 址：<http://www.tup.com.cn>, <http://www.wqbook.com>

地 址：010-北京市海淀区学研大厦 A 座 邮 编：100084

社 总 机：010-62770175

邮 购：010-62786544

投稿与读者服务：010-62776969, c-service@tup.tsinghua.edu.cn

质量反馈：010-62772015, zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn

印 装 者：三河市鑫鑫科达彩色印刷包装有限公司

经 销：全国新华书店

开 本：185mm × 260mm

印 张：15.25 字 数：372 千字

版 次：2016 年 7 月第 1 版

印 次：2016 年 7 月第 1 次印刷

印 数：1~2000

定 价：39.60 元

前 言

推进教育事业改革和发展是一项长期而艰巨的任务.《国家中长期教育改革和发展规划纲要》中要求我们各级学校都要积极地开展各个领域的改革,要求在改革中求生存求发展.为了进一步适应数学教学改革的需要,经过多年的教学实践与研究,凝练完成了这本《概率论与数理统计》,希望它能在改革大潮中激起一点儿浪花.

本书突出“应用”特色,注重培养学生的实践能力,基础理论力求逐渐深入,基本应用技能和数学建模思想贯穿始终.文字叙述准确、简明扼要、通俗易懂、“以例释理”、理论联系实际.本书内容包括:第1章,随机事件及概率计算;第2章,随机变量及其分布;第3章,随机变量的数字特征;第4章,几种重要的随机变量及其分布;第5章,数理统计基础知识;第6章,参数估计;第7章,假设检验;第8章,方差分析与回归分析.其中第1~4章为概率论部分,第5~8章为数理统计部分,概率论与数理统计两部分知识相对独立完整,具有一定的可剪裁性和拼接性,可根据不同的培养目标将内容裁剪拼接,使前后课程互相衔接,浑然一体.本书内容覆盖面广,满足了各专业大类对理论、技能及基本素质的要求.

本书努力体现如下特色:

1. 每章配题均按照典型问题配置,计算题量通常2~3题,以思想方法为主,作为课后作业留给学生.

2. 有关应用问题的编排,尽量选用贴近经济、管理、实际生活等方面的相关应用,以突出经管类教材的特色.

3. 概念力求标准统一,以便于保持学生对概念理解的热情并培养学生对概念关注的习惯.

4. 例题编排由浅入深、内容讲解尽量由易到难.例如,大数定理与中心极限定理在本书中都有所涉及,只是在必要的时候才作了简单介绍.用以给读者以想象空间或让读者理解相关内容.

5. 随机变量的概率、数字特征等的一般计算,是概率统计计算的思想基础.为强化一般随机变量的有关概念,将常见随机变量列为一章,放在随机变量的数字特征之后处理.同时这一章的笔墨重点放在二项分布与正态分布上,以突出这两类分布在实际应用中的作用.

6. 为适应数学基础比较弱的学生的学习,除内容、讲解从易到难外,还专门添加了关于排列组合的附录,以利于学生学习与查阅.

7. 配有数字教学资源,如电子教案、本书习题解答、课程复习网站等内容供师生参考(可到清华大学出版社网站下载或直接向作者发E-mail索取).

本书内容紧密结合专业要求,强调用真实的“实际问题”,营造现实工作过程中待解决问题的情境;主张用问题启发学生的思维,鼓励学生基于“解决问题”的学习、基于“实际应用”

的学习；通过设计各种情境下真实的“实际问题”，开拓学生的创新思维与想象空间；充分利用各种信息为学生提供跨学科的知识链接，提高学生的综合素质与能力。

在编写过程中，本书参考了国内已出版的同类教材（文献 [1-22]），吸收了它们的许多精华和优点，在题材的选取上作了一些变动，适当地增加了一些新内容，有大量翔实的应用实例可供参考，有相当数量的习题可供练习。

本书取材新颖、阐述严谨、内容丰富、重点突出、推导简洁、思路清晰、深入浅出、图文并茂、富有启发性，便于教学与自学。书中引用了上百个应用实例，简要地介绍了“概率论”与“数理统计”在国民经济各领域中的实际应用，展示了“概率论”与“数理统计”的强大威力和不可替代的重要地位。

全书由北京联合大学王信峰教授执笔编写，清华大学出版社张琦玮编辑认真编辑审校了书稿，纠正了书中很多疏漏和不妥，吕同富教授、清华大学出版社佟丽霞编辑在本书编写之前作了大量的组织、协调等工作，在此表示衷心的感谢。本次编写《概率论与数理统计》是数学教学改革的一个尝试，效果如何还有待实践的检验。希望广大师生和同仁在使用过程中批评指正，把数学教学改革进一步推向深入。

本书可作为本科院校非数学专业“概率论与数理统计”课程的教材，也可作为高职高专院校相关专业课程参考用书。

王信峰

2016年5月

目 录

第 1 章 随机事件及概率计算	1
1.1 样本空间与随机事件	1
1.1.1 样本空间	1
1.1.2 随机事件的概念	2
1.1.3 随机事件的关系及运算	3
1.2 随机事件的概率	5
1.2.1 概率的定义及计算	6
1.2.2 概率的性质	9
1.3 条件概率与全概率公式	11
1.3.1 条件概率与乘法公式	11
1.3.2 全概率公式与贝叶斯公式	14
1.4 事件的独立性	16
1.4.1 两个事件的独立性	16
1.4.2 三个事件的独立性	18
1.4.3 n 个事件的独立性与伯努利概型	18
1.5 本章小结与典型题解析	20
1.5.1 主要内容	20
1.5.2 典型题解析	20
习题 1	23
第 2 章 随机变量及其分布	26
2.1 随机变量	26
2.1.1 随机变量的有关概念	26
2.1.2 离散型随机变量的分布律	27
2.1.3 连续型随机变量的概率密度	29

2.2 随机变量的分布函数	31
2.2.1 分布函数的概念	31
2.2.2 离散型随机变量的分布函数	32
2.2.3 连续型随机变量的分布函数	33
2.3 二维随机变量及其分布	34
2.3.1 二维随机变量的分布函数	35
2.3.2 二维离散型随机变量及其分布律	36
2.3.3 二维连续型随机变量的概率密度	40
2.4 随机变量的独立	43
2.5 二维随机变量的条件分布	44
2.5.1 二维离散型随机变量的条件分布律	45
2.5.2 二维连续型随机变量的条件分布	46
2.6 随机变量函数的分布	47
2.6.1 离散型随机变量函数的分布	47
2.6.2 一维连续型随机变量函数的分布	49
2.6.3 二维连续型随机变量函数的分布	50
2.7 本章小结与典型题解析	54
2.7.1 主要内容	54
2.7.2 典型题解析	55
习题 2	58

第 3 章 随机变量的数字特征 63

3.1 随机变量的数学期望	63
3.1.1 数学期望的概念	63
3.1.2 随机变量函数的数学期望	66
3.1.3 数学期望的运算性质	69
3.2 随机变量的方差	71
3.2.1 方差的概念	71
3.2.2 方差的运算性质	73
3.3 协方差与相关系数	74
3.3.1 随机变量的协方差	74
3.3.2 随机变量的相关系数	76

3.4 随机变量的另几个数字特征	77
3.4.1 原点矩与中心矩	77
3.4.2 分位数	78
3.4.3 变异系数	79
3.5 本章小结与典型题解析	80
3.5.1 主要内容	80
3.5.2 典型题解析	80
习题 3	84
第 4 章 几种重要的随机变量及其分布	87
4.1 两点分布与二项分布	87
4.1.1 两点分布 (0-1 分布)	87
4.1.2 二项分布	88
4.2 正态分布	90
4.2.1 正态分布的概率密度	90
4.2.2 正态分布随机变量的概率计算	92
4.2.3 正态分布的线性组合	95
4.3 另外几种常见的分布	96
4.3.1 泊松分布	96
4.3.2 均匀分布	98
4.3.3 指数分布	99
4.4 近似服从正态分布——中心极限定理	102
4.5 本章小结与典型题解析	105
4.5.1 主要内容	105
4.5.2 典型题解析	106
习题 4	108
第 5 章 数理统计基础知识	112
5.1 样本及其联合分布	112
5.1.1 总体与个体	112
5.1.2 简单随机样本	113

5.2 样本统计量	115
5.2.1 样本统计量的概念	115
5.2.2 总体分布函数的近似	116
5.3 抽样分布	117
5.3.1 χ^2 分布	117
5.3.2 t 分布	119
5.3.3 F 分布	120
5.4 正态总体的几个重要结论	121
5.4.1 单正态总体的几个重要结论	122
5.4.2 双正态总体的几个重要结论	124
5.5 本章小结与典型题解析	125
5.5.1 主要内容	125
5.5.2 典型题解析	126
习题 5	127
第 6 章 参数估计	131
6.1 参数的点估计	131
6.1.1 点估计的基本概念	131
6.1.2 矩估计法	132
6.1.3 最大似然估计	134
6.2 参数点估计的评价标准	136
6.2.1 无偏性	136
6.2.2 有效性	137
6.2.3 一致 (相合) 性	138
6.3 参数的区间估计	139
6.3.1 区间估计的基本思想	139
6.3.2 单正态总体参数的置信区间	141
6.3.3 双正态总体参数的置信区间	145
6.4 本章小结与典型题解析	149
6.4.1 主要内容	149
6.4.2 典型题解析	149
习题 6	151

第 7 章 假设检验	157
7.1 假设检验的基本思想	157
7.1.1 假设检验问题	157
7.1.2 假设检验的概率原理	158
7.1.3 假设检验的步骤与实例求解	159
7.2 单正态总体参数的假设检验	161
7.2.1 正态总体均值假设检验	161
7.2.2 正态总体方差 σ^2 假设检验 (χ^2 检验)	165
7.3 双正态总体参数的假设检验	167
7.3.1 双正态总体均值差 $\mu_1 - \mu_2$ 的检验	167
7.3.2 双正态总体两个方差比 σ_1^2/σ_2^2 的检验	169
7.4 总体分布的 χ^2 检验	170
7.4.1 总体分布 χ^2 检验的基本思想与步骤	170
7.4.2 总体分布 χ^2 检验实例	171
7.5 本章小结与典型题解析	174
7.5.1 主要内容	174
7.5.2 典型题解析	174
习题 7	177
第 8 章 方差分析与回归分析	182
8.1 单因素方差分析	182
8.1.1 方差分析的基本问题	182
8.1.2 方差分析的原理与方法	184
8.1.3 单因素方差分析举例	186
8.2 回归分析	189
8.2.1 一元线性回归分析	189
8.2.2 回归分析问题的解决方案	191
8.2.3 关于一元非线性回归	197
8.3 本章小结与典型题解析	200
8.3.1 主要内容	200
8.3.2 典型题解析	201
习题 8	206

附录 A 排列组合	210
A.1 基本原理	210
A.2 排列	211
A.2.1 不重复的排列	211
A.2.2 可重复的排列	212
A.3 组合	213
附录 B 附表	216
习题答案	227
参考文献	234

第 1 章 随机事件及概率计算

中学已经学过本章的大部分内容,本章对该部分进行复习,以便于更好地对接本课程其他内容.同时,为将来工作中的数学语言交流,建议注意事件的关系运算以及在求解相关概率计算时的事件设定和运算表示,以便于更深入地理解概率及其计算的理论依据.

学习目标与要求

1. 理解随机现象及统计规律
2. 理解样本空间的概念,理解随机事件概率的定义
3. 掌握事件的关系运算,掌握概率的加法公式
4. 掌握条件概率与乘法公式,掌握全概率公式与贝叶斯公式
5. 理解事件独立的概念,掌握随机事件的独立性
6. 理解伯努利概型,掌握伯努利概型的概率计算

1.1 样本空间与随机事件

1.1.1 样本空间

1. 随机现象及统计规律

自然界和人类社会实践中所发生的现象多种多样.有一类现象是**确定现象**,它在一定条件下必然出现,如在一个标准大气压下将水加热到 100°C 便会沸腾、水往低处流、向上抛一个石子必然下落等.另一类现象是**随机现象**,随机现象情况下,即使完全相同的条件也会出现不同结果,换句话说,条件不能完全决定结果.如重复抛掷一枚硬币,其结果可能是字面向上也可能是花面向上,只有抛掷完成后才能观察到真正的结果;同一工艺条件下生产出的灯泡,其寿命长短参差不齐,一直到用坏才能知道一只灯泡的使用寿命;一批新产品投放市场,可能畅销也可能滞销,到底是畅销还是滞销,也只有经过市场检验后才知道答案;射击运动员用同一支枪向同一目标射击,无论怎样控制设计条件不变,每次弹着点总不尽相同等.

随机现象在一次次观察或试验中,其各次的结果都呈现出不确定性,但如果在相同条件下进行大量地重复观察或试验,其结果却往往会呈现出某种明显的规律性.例如,多次重复地抛掷同一枚均匀硬币,尽管每次抛掷试验之前都不知道其字面朝上还是花面朝上,但随着重复抛掷次数的增加,出现字面朝上的次数,会随着投掷总次数的增加逐渐趋于总次数的 $\frac{1}{2}$.我们把这种在相同条件下进行大量重复试验,随机现象所呈现的规律性称为随机现象的**统计规律性**.一种观点认为,概率论与数理统计就是研究和揭示随机现象所具有的这种统计规律性的一门数学学科.而这一研究则往往从随机试验开始.

2. 随机试验

广义而言,对事物某一特征的观察、检测、测量等都称为试验.而研究随机现象的试验称为**随机试验**,具体定义如下.

定义 1.1 随机试验

具有如下三个特征的试验叫做**随机试验** (random experiment):

- (1) 可以在同一条件下重复进行;
- (2) 每次试验的可能结果不止一个, 并且在试验之前能明确知道试验的所有可能结果;
- (3) 进行每一次试验之前无法预先确定哪一个结果会出现.

以下是一些随机试验的例子.

例 1.1 E_1 : 抛掷一枚硬币, 观察花面 H 、字面 T 出现的情况.

E_2 : 抛掷一颗骰子, 观察出现的点数.

E_3 : 从一副无王牌的扑克中任抽一张, 记录牌点.

E_4 : 在大街上任找一人, 询问其当前的月收入.

E_5 : 从一班名字中任选一个, 观察是男生还是女生 (或观察其出生年月).

随机试验是研究随机现象的基本手段, 而随机试验中所出现的所有可能结果则是研究随机现象的突破口.

3. 样本空间

通过随机试验来研究随机现象, 尽管在每次试验之前不能预知试验的结果, 但试验的所有可能结果组成的集合是已知的, 而这一集合就是样本空间.

定义 1.2 样本空间、样本点

随机试验 E 的所有可能结果组成的集合称为**样本空间**, 记为 Ω . 样本空间的元素, 即 E 的每个可能的结果称为**样本点**, 记为 ω .

如, 对于随机试验“投掷一枚骰子, 观察点数”, 其样本点为 1、2、3、4、5、6, 样本空间为 $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, 如图 1.1 所示; 而对于随机试验“抛一枚硬币, 观察其字面及花面”, 若记 H = “花面”, T = “字面”, 则其样本点为 H, T , 样本空间为 $\{H, T\}$; 对于随机试验“任取一个灯泡, 测其使用寿命”, 其样本空间为 $\{t | t \geq 0\}$, 而样本点则为任意一个大于等于零的实数.



图 1.1 骰子的点数

通常, 不同的随机试验对应不同的样本空间, 而样本空间则构成了研究随机现象的基本数学模型. 应当注意的是, 即使相同的随机试验, 试验目的不同, 对应的样本空间也不同. 如, “投掷一枚骰子”, 若目的是考察点数, 则样本空间为 $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$; 若考察大小点, 则其样本空间为 $\{\text{大点}, \text{小点}\}$. 因此, 以下所说的随机试验往往包含相应的试验目的.

1.1.2 随机事件的概念

为对试验结果作更细致的研究, 引入以下定义.

定义 1.3 随机事件

随机试验所形成样本空间的子集称为**随机事件**, 简称事件. 通常用大写英文字母 A, B, C 等表示.

随机事件也可以认为是对随机试验结果的一种预言或概括, 它可能发生也可能不发生.

例 1.2 对于随机试验“投掷一枚骰子, 观察点数”, $A = \{\text{大于 3 点}\}$, $B = \{\text{小于 3 点}\}$, $C = \{\text{等于 6 点}\}$, $D = \{\text{大于 6 点}\}$, $\Omega = \{\text{小于等于 6 点}\}$ 等均为随机事件, 因为它们都是这一随机试验对应样本空间 $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ 的子集, 事实上, $A = \{4, 5, 6\}$, $B = \{1, 2\}$, $C = \{6\}$,

$D = \emptyset$, $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. 注意, 这些事件的每一个也同样都是这里的随机试验结果的一种预言.

另外值得注意的是, 有的事件简单, 有的事件复杂. 例如从上述例子的随机事件 $A = \{4, 5, 6\}$, $B = \{1, 2\}$, $C = \{6\}$ 中可以看出, 事件 A 由随机试验的三个可能结果 4、5、6 所构成, 事件 B 由随机试验的两个可能结果 1、2 构成, 它们均由随机试验的多个可能结果联合构成, 而 C 只包含随机试验的一个可能结果 6, 它不能再分解, 且多个这样的事件可以构成比较复杂的事件, 如 A, B . 为细分它们, 我们定义如下基本事件和复合事件.

定义 1.4 基本事件、复合事件

只包含一种随机试验可能结果 (或一个样本点构成) 的事件, 称为**基本事件**. 由若干基本事件组合而构成 (或多个样本点构成) 的事件称为**复合事件**.

基本事件是可以发生但不可能再分解的随机事件.

最后, 上例 1.2 中的事件 $D = \emptyset$, $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ 是样本空间的两个非常特殊的子集, 在此约定为两个特殊事件, 定义如下.

定义 1.5 必然事件、不可能事件

在一定条件下必然发生的事件称为**必然事件**. 在一定条件下必然不能发生的事件称为**不可能事件**. 必然事件由样本空间的所有样本点构成, 为样本空间, 常用 Ω 表示, 不可能事件为空集, 常用 \emptyset 表示.

1.1.3 随机事件的关系及运算

随机事件是样本空间的子集, 首先是集合, 因此, 集合的相关运算及运算法则、集合的文氏图 (Vn) 表示等都适用于这里的随机事件.

1. 包含关系

若事件 B 发生必然导致事件 A 发生, 则称事件 A 包含事件 B (或称事件 B 包含于事件 A), 记为 $A \supset B$ 或 $B \subset A$. 如图 1.2 所示.

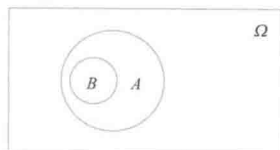


图 1.2 包含关系

2. 相等关系

若 $B \supset A$ 且 $A \supset B$, 即事件 A 发生必导致事件 B 发生, 同时事件 B 发生同样也必导致事件 A 发生, 此时, 则称事件 A 与 B 相等, 记为 $A = B$.

可见, 当且仅当事件 A 与事件 B 完全相同, 或者说它们包含完全一样的基本事件时, $A = B$.

3. 事件的和 (并)

A 与 B 至少有一个发生的事件, 即“事件 A 或事件 B 发生”的事件, 称为事件 A 与事件 B 的和 (并), 记为 $A \cup B$. 如图 1.3 所示.

有限多个事件 A_1, A_2, \dots, A_n 的并记为 $\bigcup_{i=1}^n A_i$; 可列无穷多个事件 $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ 的并记为 $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$.

4. 事件的积 (交)

A 与 B 同时发生的事件, 称为事件 A 与 B 的积 (交), 记为 $A \cap B$. 如图 1.4 所示.

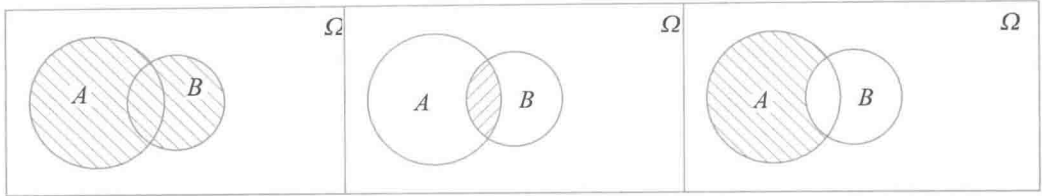


图 1.3 并 $A \cup B$

图 1.4 交 $A \cap B$

图 1.5 差 $A - B$

有限多个事件 A_1, A_2, \dots, A_n 的积记为 $\bigcap_{i=1}^n A_i$; 可列无穷多个事件 $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$

的积记为 $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$.

5. 事件的差

A 发生 B 不发生的事件, 称为事件 A 与事件 B 的差, 记为 $A - B$. 如图1.5 所示.

一般地, $A - B \neq B - A$.

6. 互不相容事件 (互斥事件)

若事件 A 与 B 不能同时发生, 即 $AB = \emptyset$, 则称事件 A 与 B 互不相容. 互不相容也称为互斥. 如图1.6 所示.

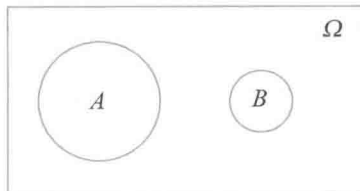


图 1.6 互斥 (不相容)

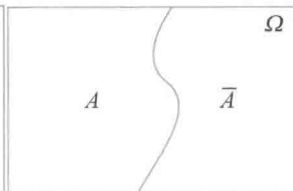


图 1.7 对立 (互逆)

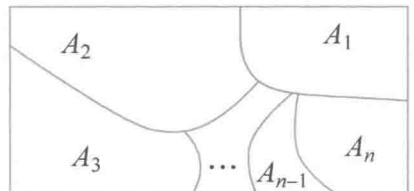


图 1.8 样本空间的划分

7. 对立事件 (逆事件)

若事件 A 与 B 不能同时发生, 且至少一个必然发生, 即 $AB = \emptyset$, 且 $A \cup B = \Omega$, 则称事件 A 与事件 B 互为对立事件 (或逆事件), 记为 $B = \bar{A}$, 或 $A = \bar{B}$. 如图1.7所示.

8. 完备事件组 (样本空间的划分)

若事件 A_1, A_2, \dots, A_n 两两互不相容, 且 $A_i A_j = \emptyset (i \neq j)$, $\sum_{i=1}^n A_i = \Omega$, 则称事件 A_1, A_2, \dots, A_n 构成一个完备事件组. 如图1.8 所示.

例 1.3 在掷骰子试验中, 目的是考察朝上面的点数, 则有样本空间 $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. 记事件 $A = \{\text{点数为 } 2\}$, $B = \{\text{点数为偶数}\}$, $C = \{\text{点数为小于 } 3 \text{ 的偶数}\}$, $D = \{\text{点数为 } 1\}$, $E = \{\text{点数小于 } 4\}$, $F = \{\text{点数为奇数}\}$, 则

$$A = \{2\}, B = \{2, 4, 6\}, C = \{2\}, D = \{1\}, E = \{1, 2, 3\}, F = \{1, 3, 5\},$$

因此, 有如下关系或运算结果:

- (1) $B \supset A$ 或 $A \subset B$;
- (2) $A = C$;
- (3) $A \cup D = \{\text{点数小于 } 3\} = \{1, 2\}$;
- (4) $A \cap B = \{\text{点数为 } 2\} = \{2\}$;
- (5) $B - E = \{\text{点数为 } 4 \text{ 或 } 6\} = \{4, 6\}$, $E - B = \{\text{点数为 } 1 \text{ 或 } 3\} = \{1, 3\}$;
- (6) 事件 B 与 D 为互不相容事件;
- (7) B 与 F 互为对立事件, 它们满足 $B = \bar{F}$, 或 $F = \bar{B}$. 亦即 $B \cap F = \emptyset$ 且 $B \cup F = \Omega$;

(8) 容易看出, 三事件 $E - B, B - E$ 与 $\{2, 5\}$ 构成样本空间 Ω 的一个划分. 以下以定理形式, 给出事件所满足的算律.

定理 1.1 设 A, B, C 为事件, 则有以下运算法则成立.

- (1) 交换律: $A \cup B = B \cup A, A \cap B = B \cap A$;
- (2) 结合律: $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C), (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$;
- (3) 分配律: $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C), (A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$;
- (4) 德摩根律: $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}, \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

例 1.4 现从含有 5 件次品的 100 件产品中任取 3 件进行检验. 记 $A_i = \{3 \text{ 件中恰有 } i \text{ 件次品}\} (i = 1, 2, 3)$, 试用 $A_i (i = 1, 2, 3)$ 或其对立事件表示下列事件: $A = \{3 \text{ 件中至少有一件次品}\}, B = \{3 \text{ 件中至少有两件次品}\}, C = \{3 \text{ 件都是合格品}\}$.

解 由题意分析, 事件 A 等同于三种情况的并: 3 件中有一件次品、3 件中有两件次品、3 件中有 3 件次品. 因此有

$$A = A_1 \cup A_2 \cup A_3,$$

同样, “3 件中至少有两件次品”是指“3 件中有两件次品或有 3 件次品”, 因此

$$B = A_2 \cup A_3,$$

最后, “3 件都是合格品”则表示“3 件都不是次品”, 即

$$C = \overline{A_1 A_2 A_3} = \overline{A_1} \cup \overline{A_2} \cup \overline{A_3} = \overline{A}.$$

例 1.5 设 A, B, C 是三个事件, 请以 A, B, C 的运算表示以下各事件.

- (1) A 发生, B 与 C 都不发生;
- (2) A, B, C 至少有一个发生;
- (3) A, B, C 恰有一个发生;
- (4) A, B, C 至多一个发生;
- (5) A, B, C 不多于两个发生.

解 以 $D_i (i = 1, 2, 3, 4, 5)$ 表示要求的事件. 注意到事件 A 不发生就是事件 \overline{A} 发生.

(1) 事件 B 与 C 都不发生, 就是事件 \overline{B} 发生, 事件 \overline{C} 也发生, 因此本题事件就是“事件 $A, \overline{B}, \overline{C}$ ”都发生, 因此有 $D_1 = A \cap \overline{B} \cap \overline{C}$.

(2) A, B, C 至少有一个发生, 就是事件 $A \cup B \cup C$, 因此 $D_2 = A \cup B \cup C$.

(3) A, B, C 恰有一个发生, 就是“ A 发生, B, C 都不发生, 或 B 发生, A, C 都不发生, 或 C 发生, B, A 都不发生”, 因此有 $D_3 = (A \cap \overline{B} \cap \overline{C}) \cup (\overline{A} \cap B \cap \overline{C}) \cup (\overline{A} \cap \overline{B} \cap C)$.

(4) A, B, C 至多一个发生, 就是“ A, B, C 恰有一个发生”, 或“ A, B, C 都不发生”, 因此有 $D_4 = D_3 \cup (\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C})$.

(5) A, B, C 不多于两个发生, 就是“ A, B, C 中至少有一个不发生”, 或“ $\overline{A}, \overline{B}, \overline{C}$ 中至少有一个发生”, 因此 $D_5 = \overline{A} \cup \overline{B} \cup \overline{C}$ 或 $D_5 = \overline{A \cap B \cap C}$.

1.2 随机事件的概率

人们研究随机现象, 不仅要知道可能出现哪些事件, 更希望知道事件发生的可能性大小, 这就需要一个刻画事件发生可能性大小的度量指标, 这种度量应能反映随机现象所呈现的统计

规律性，我们称这个刻画事件发生可能性大小的度量指标为事件发生的概率。为此，我们从最早出现的古典概型讲起。

1.2.1 概率的定义及计算

1. 古典概型

古典概型中的“古典”表明了这种问题起源的古老，它源于赌博。博弈的形式多种多样，但是它们的前提是“公平”，即“机会均等”，而这正是古典定义适用的重要条件：同等可能。16世纪意大利数学家和赌博家卡尔丹(1501—1576)所说的“诚实的骰子”，即道明了这一点。在卡尔丹以后约三百年的时间里，帕斯卡、费马、伯努利等数学家都在古典概率的计算、公式推导和扩大应用等方面做了重要的工作。直到1812年，法国数学家拉普拉斯(1749—1827)在《概率的分析理论》中给出的概率古典定义，成为最早的概率计算问题及概率计算方法。以下是整理后的古典概型定义。

定义 1.6 古典概型

若随机试验 E 具有如下特征

- (1) 有限性：试验的样本空间只包括有限多个样本点，即 $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$ ；
- (2) 等可能：试验中每个基本事件发生的可能性相等。

则称 E 为古典概型(也称等可能概型)。

设古典概型 E 的样本空间为 $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$ ，即样本点总数为 n 。根据等可能性原则，可知每个基本事件发生的概率均为 $\frac{1}{n}$ 。给定事件 $A = \{\omega_{i_1}, \omega_{i_2}, \dots, \omega_{i_k}\}$ ，其包含 k 个样本点，则事件 A 的概率为

$$P(A) = k \cdot \frac{1}{n} = \frac{\text{组成}A\text{的基本事件个数}}{\text{样本空间的基本事件总数}} \quad (1.1)$$

实际问题 1.1 掷骰子中的概率

依次抛掷两粒骰子，观察它们出现的点数。

- (1) 写出这一随机试验的样本空间；
- (2) 求事件 $A = \text{“两粒骰子点数相同”}$ 与 $B = \text{“两粒骰子点数之和为 4”}$ 的概率。

解 (1) 记 $(i, j) (i, j = 1, 2, \dots, 6)$ 表示第一粒骰子投 i 点，第二粒骰子投 j 点，则样本空间为

$$\Omega = \{(1, 1), (1, 2), \dots, (1, 6), (2, 1), \dots, (2, 6), \dots, (6, 1), \dots, (6, 6)\},$$

其中共计 36 个基本事件。

(2) 事件“两粒骰子点数相同”出现有 6 种可能，即 $A = \{(1, 1), (2, 2), \dots, (6, 6)\}$ ；事件“两粒骰子点数之和为 4”也有 3 种可能，即 $B = \{(1, 3), (3, 1), (2, 2)\}$ 。问题是古典概型问题，因此

$$P(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}, \quad P(B) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}.$$

实际问题 1.2 抽取产品的概率

一批产品共有 42 件，其中有一等品 15 件，二等品 14 件，三等品 13 件，今从这批产品中一次任取 3 件(取后不放回)。求这 3 件产品分属下列情形的概率。(1) $A = \{3\text{件产品都是一等品}\}$ ；(2) $B = \{3\text{件产品等级相同}\}$ ；(3) $C = \{3\text{件产品等级不相同}\}$ 。