工业和信息化普通高等教育“十三五”规划教材

21世纪高等学校规划教材

线性代数

孙蕾 田春红 ◎ 主编

孙艳波 刚蕾 蔡剑 ◎ 副主编

中国工信出版集团

人民邮电出版社

POSTS & TELECOM PRESS

工业和信息化普通高等教育“十三五”规划教材

21 世纪高等学校规划教材

线性代数

孙蕾 田春红 ◎ 主编

孙艳波 刚蕾 蔡剑 ◎ 副主编

人民邮电出版社

北京

图书在版编目（CIP）数据

线性代数 / 孙蕾，田春红　主编. -- 北京 : 人民邮电出版社，2016.8
21世纪高等学校规划教材
ISBN 978-7-115-42595-9

Ⅰ. ①线… Ⅱ. ①孙… ②田… Ⅲ. ①线性代数－高等学校－教材 Ⅳ. ①O151.2

中国版本图书馆CIP数据核字(2016)第164600号

内 容 提 要

本书主要是为应用型本科非数学专业学生编写的。全书共 8 章，内容包括行列式、矩阵、向量空间、线性方程组、方阵的特征值与特征向量、实二次型、线性空间与线性变换、线性代数在数学建模中的应用。书后附有部分习题的参考答案。

本书适合作为应用型本科非数学专业“线性代数”课程的教材，也可供自学者学习参考。

◆ 主　　编　孙　蕾　田春红
副 主 编　孙艳波　刚　蕾　蔡　剑
责任编辑　张孟玮
责任印制　彭志环

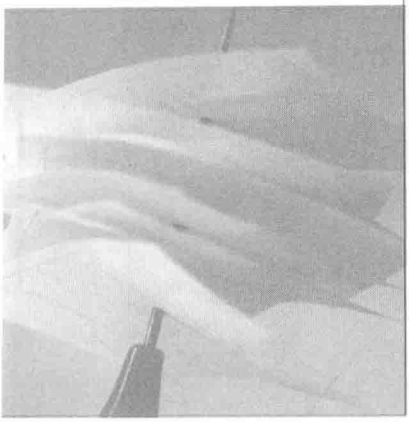
◆ 人民邮电出版社出版发行　　北京市丰台区成寿寺路 11 号
邮编　100164　　电子邮件　315@ptpress.com.cn
网址　http://www.ptpress.com.cn
三河市海波印务有限公司印刷

◆ 开本：787×1092　1/16
印张：13.75　　　　2016 年 8 月第 1 版
字数：359 千字　　　2016 年 8 月河北第 1 次印刷

定价：34.00 元

读者服务热线：(010)81055256　印装质量热线：(010)81055316
反盗版热线：(010)81055315

前　言 Preface



当前，应用型本科院校大多定位于培养创新应用型人才，但在教学时往往照搬传统成熟的线性代数教材，导致基础课教育偏离了应用型人才的培养目标。因此，通过基础课程改革对学生实践能力与创新能力的培养，提升办学质量，逐步形成应用型本科的办学特色已成为当务之急。正是在这一形势下，我们在总结多年本科线性代数教学经验、探索此类院校本科线性代数教学发展动向、分析同类教材发展趋势的基础上，编写了这套适合应用型本科院校本科生层次各专业使用的教材。

考虑到应用型本科院校仍然有很多同学需要考研，本书的前 6 章涵盖了工学、经济学硕士研究生入学考试有关线性代数的所有内容，而第 7 章是线性代数的重要组成部分。本书的前 6 章内容适合于 40 学时左右的“线性代数”课程教学，能够满足应用型本科院校非数学专业“线性代数教学基础要求”。本书具有以下特色。

（1）考虑到本课程内容抽象、课程教学一般安排在前三个学期及学生的学习能力，本书在组织内容时注重取材合适，要求恰当，内容阐述循序渐进且简单易懂，富有启发性；对某些比较难以掌握的概念与方法都做了必要的说明，便于学生自学，使学生能够掌握线性代数的基本理论与基本方法。

（2）为了加深读者对概念的理解，培养其逻辑推理能力，书中对于比较简单的定理尽量给出证明，这有助于读者对这些定理的掌握和运用；对于某些证明过程复杂的定理和性质，书中省略了其证明过程；少数定理的证明加了“*”号，读者只要记住定理的结论、弄清楚含义即可。对于一些线性代数中难度较大且超出教学基本要求的内容和题目也标注了“*”号。

（3）本书突出了线性代数的应用性，在全书前 6 章的最后一节和第 8 章给出了线性代数相关理论和方法的应用，有助于帮助读者了解一些实际问题的求解过程，提高用数学的方法分析、解决实际问题的能力。

（4）书中对前 7 章都进行了小结，提出了需要掌握的基本概念、公式和结论，以及需要加强练习的内容；前 7 章都配有相应的习题，大部分习题在书后有答案或提示，希望通过练习有助于读者巩固和熟

练掌握所学知识。

全书共包括 8 章内容，分别为行列式、矩阵、向量空间、线性方程组、方阵的特征值与特征向量、实二次型、线性空间与线性变换、线性代数在数学建模中的应用。其中第 1 章、第 8 章由孙艳波编写，第 2 章由蔡剑编写，第 3 章、第 4 章由田春红编写，第 5 章、第 6 章由孙蕾编写，第 7 章由刚蕾编写。全书由孙蕾统稿。

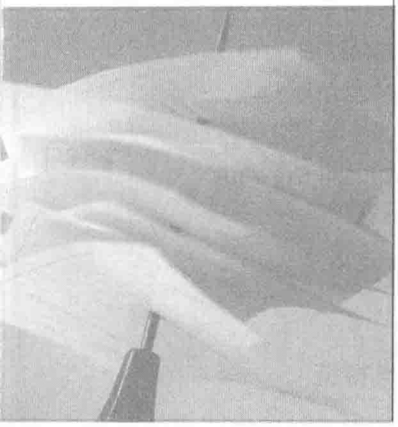
本书的编写采纳了同行们提出的一些宝贵的意见和建议，在此向他们表示衷心的感谢。

我们编写的教材是对“线性代数”课程教学改革的一种探索。虽然编者付出了很多努力，但不足之处仍在所难免。不当之处敬请读者予以批评指正。

编者

2016 年 5 月

目 录 Contents



第7章 线性空间与线性变换 / 165

*第8章 线性代数在数学建模中的应用 / 187

部分习题参考答案 / 201

参考文献 / 212

第1章 行列式

在生产实践中，一些变量之间的关系可以直接地或近似地表示为线性函数，因此研究线性函数是非常重要的. 线性代数主要是研究线性函数，在线性代数中线性方程组是一个基础部分，也是一个重要部分. 研究线性方程组首先需要了解行列式这个重要工具. 行列式是人们从解线性方程组的需要中建立起来的. 1750 年，瑞士数学家克拉默（Cramer）写了一篇文章，他使用行列式构造 xOy 平面上的某些曲线方程组，而且给出了著名的用行列式解线性方程组的克拉默法则. 1812 年，法国数学家柯西（Cauchy）发表了一篇关于应用行列式计算多面体体积的文章. 柯西的文章引起了人们对行列式的极大兴趣，许多数学家投入研究，持续大约 100 年的时间，基本上形成了完整的行列式理论.

行列式在数学本身或其他学科分支（如物理、力学等）上都有广泛的应用.

在本章中，我们首先介绍 n 阶行列式的定义、性质及计算，最后是著名的克拉默法则.

1.1 排列与逆序

为引出 n 阶行列式的定义，首先介绍有关排列与逆序的概念.

1.1.1 排列

定义 1.1.1 由自然数 $1,2,\cdots,n$ 组成的一个有序数组称为一个 n 阶**排列**，记为 $(j_1j_2\cdots j_n)$. 所有 n 阶排列的总数是 $n!$ 个.

例如，由自然数 1，2，3 组成的一个有序数组（2 1 3）为一个三阶排列，所有的三阶排列有 3! 个，即（1 2 3），（1 3 2），（2 1 3），（2 3 1），（3 1 2），（3 2 1）.

又如，由 1，2，3，4 组成的一个有序数组（2 4 3 1）是一个四阶排列，所有的四阶排列有 4! 个，即 24 个不同排列.

1.1.2 逆序

定义 1.1.2 在一个排列中，任取一对数，如果较大的数排在较小的数之前，就称这对数构成一个**逆序**，一个排列中包含的逆序总数称为这个排列的**逆序数**，记为 $\sigma(j_1j_2\cdots j_n)$（或 $\tau(j_1j_2\cdots j_n)$）.

例如，在三阶排列（2 1 3）中构成逆序的数对有 2 和 1，因此这个三阶排列的逆序数为 1，即 σ（2 1 3）=1.

又如，四阶排列（2 4 3 1）中构成逆序的数对有 2 和 1，4 和 3，4 和 1，3 和 1，因此 σ (2 4 3 1)=4.

一个排列，若各数是按由小到大的自然顺序排列，这种排列称为**自然排列**. $(1\,2\cdots n)$ 称为 n 阶自

然排列. 显然自然排列的逆序数为零.

定义 1.1.3 逆序数是偶数的排列称为**偶排列**，逆序数是奇数的排列称为**奇排列**.

例如，自然排列$(1\,2\cdots n)$的逆序数为 0，因此为偶排列，（2 1 3）的逆序数为 1，因此为奇排列.

例 1 确定五阶排列（4 5 3 2 1）的逆序数，并指出排列的奇偶性.

解 $\sigma(4\,5\,3\,2\,1)=3+3+2+1=9$，故排列（4 5 3 2 1）为奇排列.

例 2 计算$\sigma(n\ (n-1)\cdots 2\,1)$.

解 $\sigma(n\ (n-1)\cdots 2\,1)=(n-1)+(n-2)+\cdots+2+1+0=\dfrac{n(n-1)}{2}$.

1.1.3 对换

定义 1.1.4 在一个n阶排列中，任意对换两个元素的位置，其余元素不动，称为该排列的一个**对换**.

对换对排列的奇偶性是会产生影响的. 如$\sigma(2\,4\,3\,1)=4$,（2 4 3 1）是偶排列，现对换 2 和 1 的位置，得$\sigma(1\,4\,3\,2)=3$，$(1\,4\,3\,2)$是奇排列. 事实上，我们有如下定理.

定理 1.1.1 对换必改变排列的奇偶性.

***证** （1）相邻位置元素的对换（称为邻换）. 设

$$(\cdots j_i j_{i+1}\cdots)\xrightarrow{(j_i,j_{i+1})}(\cdots j_{i+1} j_i\cdots),$$

如果j_i和j_{i+1}在原排列中构成一个逆序，则邻换后就构成一个顺序，反之，如果j_i和j_{i+1}在原排列中构成一个顺序，则邻换后就构成一个逆序，因此邻换前后两个排列的逆序数差 1，而其余元素的逆序数没有发生变化，所以改变了排列的奇偶性.

（2）任意位置元素的对换. 设

$$(\cdots j_i j_{i+1}\cdots j_{i+m} j_{i+m+1}\cdots)\xrightarrow{(j_i,j_{i+m+1})}(\cdots j_{i+m+1} j_{i+1}\cdots j_{i+m} j_i\cdots),$$

该对换可分解成：先作m次邻换，即

$$(\cdots j_i j_{i+1}\cdots j_{i+m} j_{i+m+1}\cdots)\to(\cdots j_{i+1}\cdots j_{i+m} j_i j_{i+m+1}\cdots),$$

再作$m+1$次邻换，即

$$(\cdots j_{i+1}\cdots j_{i+m} j_i j_{i+m+1}\cdots)\to(\cdots j_{i+m+1} j_{i+1}\cdots j_{i+m} j_i\cdots),$$

该过程共进行了$2m+1$次邻换，由（1）的结论，两个排列的奇偶性改变了.

证毕.

推论 1.1.1 在所有n阶排列（$n\geqslant 2$）中，奇排列和偶排列各占一半.

只要将$n!$个n阶排列一一列出，对每个排列中的第一个和第二个元素作一个对换，这时我们得到的仍然是原来的$n!$个n阶排列，然而每个排列的奇偶性都发生了改变. 因此奇偶排列的个数应当是相同的.

***推论 1.1.2** 任何一个n阶排列都可通过若干次对换变成自然排列，且所作对换次数的奇偶性与这个排列的奇偶性相同.

因为一个n阶排列可通过若干次对换变成自然排列，并且所作对换的次数就是排列奇偶性变化的次数，而自然排列是偶排列，因此结论成立.

1.2 行列式的定义

首先我们考虑用消元法求解二元一次方程组和三元一次方程组，从中引出二阶和三阶行列式的定义. 然后把这些定义推广，得到 n 阶行列式的定义.

1.2.1 二阶行列式

考察二元线性方程组：

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2, \end{cases} \tag{1.2.1}$$

其中 b_1,b_2 是常数，$a_{11},a_{12},a_{21},a_{22}$ 是未知量的系数，可简单记为 $a_{ij}(i,j=1,2)$. a_{ij} 有两个下标 i,j. a_{ij} 为第 i 个方程第 j 个未知量 x_j 的系数. 例如 a_{21} 就是第二个方程中第一个未知量 x_1 的系数. 这里的线性是指方程组中未知量 x_j 的次数都是一次的.

现在采用消元法求解方程组（1.2.1），为了消去 x_2，用 a_{22} 乘第一个方程，a_{12} 乘第二个方程，得

$$\begin{cases} a_{11}a_{22}x_1 + a_{12}a_{22}x_2 = b_1a_{22}, \\ a_{12}a_{21}x_1 + a_{12}a_{22}x_2 = a_{12}b_2. \end{cases}$$

然后两方程相减，得到只含有 x_1 的方程

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = b_1a_{22} - a_{12}b_2. \tag{1.2.2}$$

为了消去 x_1，用 a_{21} 乘第一个方程，a_{11} 乘第二个方程，得

$$\begin{cases} a_{11}a_{21}x_1 + a_{12}a_{21}x_2 = b_1a_{21}, \\ a_{11}a_{21}x_1 + a_{11}a_{22}x_2 = a_{11}b_2. \end{cases}$$

然后两方程相减，得到只含有 x_2 的方程

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = a_{11}b_2 - b_1a_{21}. \tag{1.2.3}$$

由式（1.2.2）和式（1.2.3）可知，若

$$D = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0,$$

则方程组（1.2.1）有唯一解

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}},\ x_2 = \frac{a_{11}b_2 - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}. \tag{1.2.4}$$

由式（1.2.4）给出的 x_1 与 x_2 的表达式，分母都是 D，它仅依赖于方程组（1.2.1）的 4 个系数. 为了便于记住 D 的表达式，我们引进二阶行列式的概念.

定义 1.2.1 把

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

称为二阶行列式.

它含有两行，两列. 横写的称为行，竖写的称为列. 行列式中的数 $a_{ij}(i,j=1,2)$ 称为行列式的元素，i 表示 a_{ij} 所在的行数，j 表示 a_{ij} 所在的列数. a_{ij} 表示位于行列式第 i 行第 j 列的元素. 例如，a_{12} 表示位于行列式第 1 行第 2 列的元素.

二阶行列式表示一个数，其值为 2！项的代数和：一个是在从左上角到右下角的对角线（又称为行列式的主对角线）上的两个元素的乘积，取正号；另一个是从右上角到左下角的对角线上的两个元素的乘积，取负号. 例如

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 5 \end{vmatrix} = 1\times 5 - 2\times(-3) = 11,$$

其中 $a_{11}=1, a_{12}=2, a_{21}=-3, a_{22}=5$. 又如

$$\begin{vmatrix} x+y & x \\ x & x-y \end{vmatrix} = (x+y)\times(x-y) - x\times x = -y^2,$$

其中 $a_{11}=x+y, a_{12}=x, a_{21}=x, a_{22}=x-y$.

根据定义 1.2.1，我们容易得知式（1.2.4）中两个分子可以分别写成

$$b_1a_{22}-a_{12}b_2 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, \quad a_{11}b_2 - b_1a_{21} = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}.$$

如果我们记

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix},$$

那么当 $D\neq 0$ 时，方程组（1.2.1）有唯一解，而且这唯一解可以表示为

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}.$$

其中 D 是由方程组（1.2.1）的系数确定的二阶行列式，与右端常数项无关，故称 D 为方程组（1.2.1）的**系数行列式**.

D_1 是把 D 中的第一列（x_1 的系数）a_{11},a_{12} 换成常数项 b_1,b_2，D_2 是把 D 中的第二列（x_2 的系数）a_{21},a_{22} 换成常数项 b_1,b_2. 这样求解二元一次方程组就归结为求三个二阶行列式的值. 像这样用行列式来表示解的形式简便且容易记忆.

例 1 计算行列式

$$D = \begin{vmatrix} \sin\theta & \cos\theta \\ -\cos\theta & \sin\theta \end{vmatrix}.$$

解 $\begin{vmatrix} \sin\theta & \cos\theta \\ -\cos\theta & \sin\theta \end{vmatrix} = \sin^2\theta - (-\cos^2\theta) = 1.$

例 2 用行列式解线性方程组

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 = 1, \\ 3x_1 + 5x_2 = 2. \end{cases}$$

解 因为系数行列式

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = -2 \neq 0,$$

所以方程组有唯一解. 又

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = -3, \quad D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 1,$$

所以方程组的唯一解是

$$x_1=\frac{D_1}{D}=\frac{3}{2},\quad x_2=\frac{D_2}{D}=-\frac{1}{2}.$$

1.2.2 三阶行列式

对于含有三个未知量 x_1,x_2,x_3 的线性方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1,\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2,\\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3,\end{cases}\tag{1.2.5}$$

也可以用消元法求解. 为了求得 x_1，需要消去 x_2 和 x_3. 消元过程可以分两步进行.

第一步从方程组（1.2.5）的前两个方程和后两个方程中消去 x_3，得到含有 x_1 和 x_2 的线性方程组，即

$$\begin{cases}(a_{11}a_{23}-a_{13}a_{21})x_1+(a_{12}a_{23}-a_{13}a_{22})x_2=b_1a_{23}-a_{13}b_2,\\ (a_{21}a_{33}-a_{23}a_{31})x_1+(a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32})x_2=b_2a_{33}-a_{23}b_3.\end{cases}$$

第二步再消去 x_2，得到

$$\begin{aligned}&(a_{11}a_{22}a_{33}-a_{11}a_{32}a_{23}+a_{21}a_{32}a_{13}-a_{21}a_{12}a_{33}+a_{31}a_{12}a_{23}-a_{31}a_{22}a_{13})x_1\\ &=b_1a_{22}a_{33}-b_1a_{32}a_{23}+b_2a_{32}a_{13}-b_2a_{12}a_{33}+b_3a_{12}a_{23}-b_3a_{22}a_{13}.\end{aligned}$$

若 x_1 的系数不为零，则得到

$$x_1=\frac{D_1}{D},$$

其中

$$\begin{aligned}D&=a_{11}a_{22}a_{33}-a_{11}a_{32}a_{23}+a_{21}a_{32}a_{13}-a_{21}a_{12}a_{33}+a_{31}a_{12}a_{23}-a_{31}a_{22}a_{13}\\ &=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\ a_{21}&a_{22}&a_{23}\\ a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}\neq 0,\end{aligned}$$

$$D_1=b_1a_{22}a_{33}-b_1a_{32}a_{23}+b_2a_{32}a_{13}-b_2a_{12}a_{33}+b_3a_{12}a_{23}-b_3a_{22}a_{13}=\begin{vmatrix}b_1&a_{12}&a_{13}\\ b_2&a_{22}&a_{23}\\ b_3&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}.$$

同理可得

$$x_2=\frac{D_2}{D},\ x_3=\frac{D_3}{D},$$

其中

$$D_2=\begin{vmatrix}a_{11}&b_1&a_{13}\\ a_{21}&b_2&a_{23}\\ a_{31}&b_3&a_{33}\end{vmatrix},\quad D_3=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&b_1\\ a_{21}&a_{22}&b_2\\ a_{31}&a_{32}&b_3\end{vmatrix}.$$

与解二元线性方程组一样，称 D 为方程组（1.2.5）的系数行列式，D_1,D_2,D_3 分别是用常数列来替换 D 中的第一列、第二列、第三列的系数得到的. 这样我们得到了三阶行列式.

定义 1.2.2 把

$$\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\ a_{21}&a_{22}&a_{23}\\ a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}\tag{1.2.6}$$

称为三阶行列式.

三阶行列式的值是 3！项的代数和，每一项都是取自不同行、不同列的三个元素的乘积再附上正负号，三项附正号，三项附负号.

我们可以用**对角线法则**来记忆三阶行列式中每一项及前面的正、负号. 如图 1.2.1 所示，其中各实线连接的三个元素的乘积前面带有正号，各虚线连接的三个元素的乘积前面带有负号.

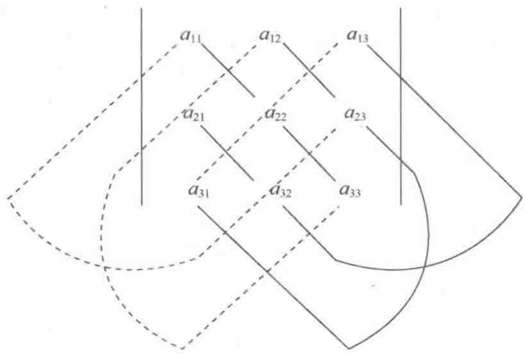


图 1.2.1

例 3 利用三阶行列式定义计算出行列式的值

$$D=\begin{vmatrix}-2 & 1 & 2\\ 2 & 3 & 0\\ 0 & 5 & 1\end{vmatrix}.$$

解 由三阶行列式的定义得

$$\begin{aligned}D&=(-2)\times3\times1+1\times0\times0+2\times2\times5\\&\quad-2\times3\times0-1\times2\times1-(-2)\times0\times5\\&=12.\end{aligned}$$

由三阶行列式的定义可看出，每一项都可表示成

$$a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}, \tag{1.2.7}$$

其中行标形成了一个三阶自然排列（1 2 3），列标形成了一个三阶排列 $(j_1j_2j_3)$. 再看每一项前面所带的符号与该列标所成排列的奇偶性的关系. 在式（1.2.6）中，第一、二、三项列标所形成的排列分别为（1 2 3），（2 3 1），（3 1 2），它们都是偶排列，这三项前面都带正号；第四、五、六项列标所形成的排列恰相反，都是奇排列，前面都是负号. 于是式(1.2.7)中的项 $a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$ 应带符号 $(-1)^{\sigma(j_1j_2j_3)}$.

因此式（1.2.6）又可写成

$$\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}=\sum_{(j_1j_2j_3)}(-1)^{\sigma(j_1j_2j_3)}a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3},$$

其中 $\sum\limits_{(j_1j_2j_3)}$ 表示列标形成的三阶排列 $(j_1j_2j_3)$ 要取遍所有的三阶排列求和.

同样地，二阶行列式也可写成

$$\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}=\sum_{(j_1j_2)}(-1)^{\sigma(j_1j_2)}a_{1j_1}a_{2j_2}.$$

这样，二阶、三阶行列式的定义形式已一致了. 推广二阶、三阶行列式的定义形式，可以给出 n 阶行列式的定义.

1.2.3 n阶行列式

定义 1.2.3 由 n^2 个数组成 n 行 n 列的 n 阶行列式定义为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{(j_1 j_2 \cdots j_n)} (-1)^{\sigma(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n},$$

其中 $\sum\limits_{(j_1 j_2 \cdots j_n)}$ 表示列标形成的 n 阶排列 $(j_1 j_2 \cdots j_n)$ 要取遍所有的 n 阶排列求和，共有 $n!$ 项.

特别地，约定**一阶行列式**为 $|a_{11}| = a_{11}$.

综上所述，n 阶行列式定义的代数和具有以下三项特点.

（1）有 $n!$ 项相加，其最后结果是一个数值；

（2）每项有 n 个数相乘，而每个数取自不同行不同列；

（3）每项的符号由列标排列 $(j_1 j_2 \cdots j_n)$ 的奇偶性决定，即符号是 $(-1)^{\sigma(j_1 j_2 \cdots j_n)}$，且在 $n!$ 项中，一半符号为正，一半符号为负.

例 4 计算行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

这种主对角线（从左上角到右下角的一条对角线）上方的元素全为零的行列式称为**下三角行列式**.

解 只需把 $n!$ 项中不为零的项找出来，求代数和即可. 根据定义 1.2.3，从第一行开始，只有取 $j_1 = 1$ 的项 $a_{11}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$ 可能不为零，再取第二行元素，根据不同列的要求，只有取 $j_2 = 2$ 的项 $a_{11}a_{22}\cdots a_{nj_n}$ 可能不为零，依次往下类推得

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{\sigma(12\cdots n)} a_{11}a_{22}\cdots a_{nn} = \prod_{i=1}^{n} a_{ii},$$

即下三角行列式的值等于主对角线元素的乘积.

类似地，上三角行列式和对角行列式也有同样的结论：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

显然，若下（上）三角或对角行列式的主对角上的元素有零元素，则该行列式的值为零.

例如，$\begin{vmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 5 \times (-2) \times (-1) \times 1 = 10$.

又如，$\begin{vmatrix} 3 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 3\times4\times0\times(-1)=0$.

例 5 计算 n 阶反对角行列式

$$D=\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & d_1 \\ 0 & 0 & \cdots & d_2 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & d_{n-1} & \cdots & 0 & 0 \\ d_n & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

解 只需把 $n!$ 项中不为零的项找出来，求代数和即可. 根据定义 1.2.3，从第一行开始，只有取 $j_1=n$ 的项 $a_{1n}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$ 可能不为零，再取第二行元素，根据不同列的要求，只有取 $j_2=n-1$ 的项 $a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{nj_n}$ 可能不为零，依次往下类推只剩下一项可能不为零：$a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}=d_1d_2\cdots d_n$，其前边的符号为 $(-1)^{\sigma(n(n-1)\cdots 21)}$，即

$$D=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}d_1d_2\cdots d_n.$$

类似地，反上三角行列式和反下三角行列式也有同样的结论成立：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,n-1} & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \cdots & 0 & 0 \\ a_{n1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n-1,2}a_{n1},$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & 0 & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{n-1,2} & \cdots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n-1,2}a_{n1}.$$

1.3 行列式的性质

因为 n 阶行列式是 $n!$ 项求和，而且每一项都是 n 个数的乘积，当 n 比较大时，利用行列式定义进行计算，计算量会非常大，例如，$10!=3628800$. 所以对于阶数较大的行列式很难直接用定义去求它的值，这时利用行列式的性质可以有效地解决行列式的求值问题. 下面我们来研究行列式的性质.

设 n 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

将其行与列互换得

$$D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1}\\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix},$$

称行列式 D^{T} 为 D 的**转置行列式**.

1.3.1 二阶、三阶行列式的性质

性质 1.3.1 行列式的行与列互换，行列式值不变.

根据三阶行列式的定义，可得行列式与它的转置行列式的值，比较即得证.

例如，设

$$D=\begin{vmatrix}-2 & 1 & 2\\ 2 & 3 & 0\\ 0 & 5 & 1\end{vmatrix},$$

则它的转置行列式为

$$D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix}-2 & 2 & 0\\ 1 & 3 & 5\\ 2 & 0 & 1\end{vmatrix},$$

利用定义 1.2.2 可算出 $D=D^{\mathrm{T}}=12$.

由性质 1.3.1 可知，在行列式中行与列所处的地位相同，因此凡是对行成立的性质对列也成立，反之亦然.

性质 1.3.2 行列式任意两行（列）互换后行列式反号.

证 设 $D=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}$，不妨设行列式的第一行与第二行互换，则得到新的行列式

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix}a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix} &= a_{21}a_{12}a_{33}+a_{22}a_{13}a_{31}+a_{23}a_{11}a_{32}-a_{23}a_{12}a_{31}-a_{22}a_{11}a_{33}-a_{21}a_{13}a_{32}\\ &=-(a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32})\\ &=-\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}.\end{aligned}$$

证毕.

为了运算方便，我们以 $r_i \leftrightarrow r_j$ 表示行列式中的第 i 行与第 j 行互换，以 $c_i \leftrightarrow c_j$ 表示行列式第 i 列与第 j 列互换. 在计算时要注意每互换一次则变一次正负号.

例如，$\begin{vmatrix}-2 & 1 & 2\\ 2 & 3 & 0\\ 0 & 5 & 1\end{vmatrix}=(-6)+0+20-0-2-0=12$，交换第一行和第二行的元素，则 $\begin{vmatrix}2 & 3 & 0\\ -2 & 1 & 2\\ 0 & 5 & 1\end{vmatrix}=$