普通高等教育“十三五”规划教材

PUTONG GAODENG JIAOYU “13·5” GUIHUA JIAOCAI

流体力学数值方法

刘国勇　编著

冶金工业出版社
www.cnmip.com.cn

普通 规划教材

流体力学数值方法

刘国勇　编著

北京
冶金工业出版社
2016

内 容 提 要

本书简要介绍了计算流体力学的发展过程及基本理论，系统地讲解了有限差分法、边界元法、有限分析法、有限体积法、谱方法等常用的流体力学数值方法以及网格生成方法。

本书为相关专业高年级本科生及研究生的教学用书，也可作为从事水利、环境、航空航天、气象、冶金、工业制造、土木工程、造船（潜水艇）、能源及化工等工程技术人员的参考用书。

图书在版编目(CIP)数据

流体力学数值方法/刘国勇编著．—北京：冶金工业出版社，2016．5
普通高等教育“十三五”规划教材
ISBN 978-7-5024-7226-9

Ⅰ．①流…　Ⅱ．①刘…　Ⅲ．①流体力学—数值计算—高等学校—教材　Ⅳ．①O35

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2016) 第 093532 号

出 版 人　谭学余
地　　址　北京市东城区嵩祝院北巷 39 号　邮编　100009　电话　(010)64027926
网　　址　www. cnmip. com. cn　电子信箱　yjcbs@ cnmip. com. cn
责任编辑　唐晶晶　美术编辑　吕欣童　版式设计　吕欣童
责任校对　卿文春　责任印制　李玉山
ISBN 978-7-5024-7226-9
冶金工业出版社出版发行；各地新华书店经销；固安华明印业有限公司印刷
2016 年 5 月第 1 版，2016 年 5 月第 1 次印刷
787mm × 1092mm　1/16；12. 25 印张；297 千字；186 页
27. 00 元

冶金工业出版社　投稿电话　(010)64027932　投稿信箱　tougao@cnmip. com. cn
冶金工业出版社营销中心　电话　(010)64044283　传真　(010)64027893
冶金书店　地址　北京市东四西大街 46 号(100010)　电话　(010)65289081(兼传真)
冶金工业出版社天猫旗舰店　yjgycbs. tmall. com

前　言

在流体力学理论研究和工程应用中，描述流体流动的数学方程是非线性偏微分方程组，只有极少数的简化模型可以通过数学方法获得理论分析解，多数情况下只能通过数值计算的途径进行求解。近几十年来，由于高速计算机以及相应的数值计算技术的快速发展，流体力学中的数值方法已成为流体力学研究的另外一个新的重要分支。流体力学中的数值方法是将描述流体运动规律的基本方程做离散化近似处理，即用离散的、有限的数学模型来近似表示连续的、无限的流体动力学问题，用一个有限的信息系统来替代一个无限的信息系统，且该离散的、有限的信息数据库在一定条件下收敛于连续的、无限的流体运动的真实本质。因此，有必要研究流体力学数值方法的适应性、稳定性、收敛性及计算精度。

本书为读者简要介绍了计算流体力学发展过程及基本理论，系统地讲解了常用的流体力学数值方法以及网格生成方法。本书共分为 11 章，第 1 章讲述计算流体力学（CFD）发展概述；第 2 章讲述流体流动的控制方程；第 3 章讲述湍流的数学模型；第 4 章为有限差分法；第 5 章为有限元法；第 6 章为流体力学边界元法；第 7 章为流体力学有限分析法；第 8 章为有限体积法；第 9 章为谱方法；第 10 章为流场计算数值算法；第 11 章为网格生成方法。

本书的主要内容在北京科技大学工程相关专业课程中讲授多次。对于已经具备高等数学、计算方法和流体力学基础的读者，阅读本书并不困难。读者通过本书可以系统地掌握常用流体数值方法的基本原理与求解方法，从而建立起应用这几种数值方法去解决流体力学理论研究和工程应用中各种具体问题的基础。

本书可作为相关专业高年级本科生及研究生的教学参考书，也可作为从事水利、环境、航空航天、气象、冶金、工业制造、土木工程、造船（潜水艇）、能源及化工等工程技术人员的参考用书。

作者在编写本书的过程中，参考了本书末所列出的参考文献，在此对这些参考文献的作者表示衷心感谢。研究生杨广任、宋鸣及陈雪波在资料收集及文档整理方面做了大量工作，在此表示感谢。

由于作者水平所限，加之计算流体力学内容丰富且发展日新月异，书中存在的不足之处，敬请读者批评指正。

作 者

2016年2月于北京科技大学

目　录

1　计算流体力学发展概述 …… 1
1.1　计算流体力学的发展 …… 1
1.2　数值模拟过程 …… 2
1.3　控制方程的离散方法 …… 3
1.3.1　有限差分法 …… 3
1.3.2　有限元法 …… 4
1.3.3　谱方法 …… 4
1.3.4　有限体积法 …… 4
1.4　数值模拟的优点及局限性 …… 5
思考题 …… 5
2　流体流动的控制方程 …… 6
2.1　研究流体运动的方法 …… 6
2.2　流体流动和传热的基本方程 …… 6
2.2.1　连续性方程 …… 6
2.2.2　运动（动量）方程 …… 7
2.2.3　能量方程 …… 8
2.2.4　组分质量守恒方程 …… 9
2.3　牛顿型流体的控制方程 …… 10
2.3.1　应力张量和变形速率张量之间的关系 …… 10
2.3.2　笛卡尔坐标系纳维-斯托克斯方程 …… 10
2.4　流体流动控制方程的定解条件 …… 11
思考题 …… 12
3　湍流的数学模型 …… 13
3.1　湍流现象概述 …… 13
3.2　湍流的数值模拟方法 …… 13
3.3　湍流时均控制方程 …… 14
3.3.1　湍流的基本方程 …… 14
3.3.2　雷诺应力类模型 …… 16
3.3.3　湍动黏度类模型 …… 16
3.4　湍流 k-ε 两方程模型 …… 17

3.4.1　标准 k-ε 两方程模型 …… 17
3.4.2　RNG k-ε 模型 …… 19
3.4.3　可实现的 k-ε 模型 …… 20
3.5　近壁区使用 k-ε 模型的问题及对策 …… 21
3.5.1　近壁区流动的特点 …… 21
3.5.2　近壁区使用 k-ε 模型的问题 …… 22
3.6　雷诺应力模型（RSM） …… 25
3.6.1　雷诺应力输运方程 …… 25
3.6.2　RSM 的控制方程及其解法 …… 28
3.6.3　对 RSM 适用性的讨论 …… 28
3.7　大涡模拟（LES） …… 29
3.7.1　大涡模拟的控制方程 …… 29
3.7.2　亚网格模型 …… 30
3.7.3　大涡模拟的边界条件 …… 31
思考题 …… 31

4　有限差分法 …… 32

4.1　有限差分逼近 …… 32
4.1.1　有限差分网格 …… 32
4.1.2　几种差分近似 …… 33
4.2　差分方程 …… 39
4.2.1　差分格式的构造 …… 39
4.2.2　显式差分格式 …… 40
4.2.3　隐式差分格式 …… 41
4.3　误差与稳定性分析 …… 44
4.3.1　差分方程的相容性 …… 44
4.3.2　差分方程的收敛性 …… 45
4.3.3　差分方程的稳定性 …… 45
4.3.4　波动方程的稳定性分析（CFL 条件） …… 48
思考题 …… 48

5　有限元法 …… 49

5.1　有限元方法基本原理 …… 49
5.1.1　有限元方法基本思想 …… 49
5.1.2　有限元方法解题步骤 …… 50
5.2　有限元方法解题分析 …… 50
5.2.1　写出积分表达式 …… 51
5.2.2　区域剖分 …… 51
5.2.3　确定单元基函数 …… 53

5.2.4　单元分析 …… 56
5.2.5　总体合成 …… 57
5.2.6　边界处理条件 …… 58
5.2.7　解总体有限元方程 …… 60
5.3　有限元方法求解非线性问题 …… 60
5.4　有限元方法求解不定常问题 …… 62
思考题 …… 63

6　流体力学边界元法 …… 64

6.1　边界元法概述 …… 64
6.1.1　边界元法特点 …… 64
6.1.2　边界元法基本思想 …… 65
6.2　边界元法基本原理和解题步骤 …… 65
6.2.1　基本解 …… 66
6.2.2　积分方程 …… 66
6.2.3　边界积分方程 …… 67
6.2.4　边界积分方程的离散求解 …… 69
6.2.5　影响系数矩阵的计算 …… 72
6.2.6　区域内函数值的计算 …… 76
6.3　不可压无旋流动的线性边界元解 …… 78
6.3.1　不可压无旋流动的数学方程 …… 78
6.3.2　线性边界元解题分析 …… 80
6.4　若干线性算子方程的基本解 …… 86
6.4.1　一维方程的基本解 …… 86
6.4.2　二维方程的基本解 …… 87
6.4.3　三维方程的基本解 …… 88
6.5　非线性问题的边界元解法 …… 90
思考题 …… 91

7　流体力学有限分析法 …… 92

7.1　有限分析法的基本思路与求解步骤 …… 92
7.1.1　基本思路 …… 92
7.1.2　求解步骤 …… 92
7.2　椭圆型方程的有限分析解 …… 96
7.2.1　边界函数为指数多项式的有限分析解 …… 96
7.2.2　边界函数为二次多项式的有限分析解 …… 104
7.2.3　边界函数为分段线性多项式的有限分析解 …… 107
7.2.4　有限分析法的自动迎风效应 …… 109
7.3　不可压无旋流动的有限分析解 …… 111

7.4　不可压黏性流动的有限分析解 …… 112
7.4.1　给定涡量的流函数方程有限分析解 …… 112
7.4.2　流函数涡量式的有限分析解 …… 116
7.4.3　基本变量式的有限分析解 …… 118
7.5　非定常不可压黏性流动的有限分析解 …… 119
7.6　非均匀网格的有限分析解 …… 122
思考题 …… 123

8　有限体积法 …… 124

8.1　扩散问题的有限体积法 …… 124
8.1.1　一维稳态扩散问题的有限体积法 …… 125
8.1.2　二维和三维稳态扩散问题的有限体积法 …… 127
8.1.3　非稳态扩散问题的有限体积法 …… 129
8.1.4　线性方程组的求解 …… 132
8.2　对流—扩散问题的有限体积法 …… 135
8.2.1　一维稳态对流—扩散问题的有限体积法 …… 135
8.2.2　中心差分格式 …… 136
8.2.3　离散格式的性质 …… 137
8.2.4　迎风格式 …… 139
8.2.5　混合格式 …… 140
8.2.6　幂指数格式 …… 141
8.2.7　对流—扩散问题的高阶差分格式——QUICK 格式 …… 142
8.2.8　多维对流—扩散问题的离散格式 …… 144
8.3　边界条件的处理 …… 146
8.3.1　入口边界条件 …… 146
8.3.2　出口边界条件 …… 147
8.3.3　壁面边界条件 …… 148
思考题 …… 150

9　谱方法 …… 151

9.1　谱方法简介 …… 151
9.2　伪谱方法或拟谱方法 …… 152
9.3　非线性问题的谱方法 …… 153
9.4　谱方法的误差分析 …… 154
思考题 …… 155

10　流场计算数值算法 …… 156

10.1　交错网格 …… 156
10.1.1　基本变量法求解的有关困难 …… 156

10.1.2　解决方案——交错网格 …… 157
10.2　运动方程的离散 …… 159
10.3　SIMPLE 算法 …… 159
10.3.1　压力与速度的修正 …… 159
10.3.2　压力修正方程 …… 161
10.3.3　SIMPLE 算法的基本思路 …… 161
10.3.4　SIMPLE 算法的讨论 …… 162
10.3.5　SIMPLE 算法压力修正方程的边界条件 …… 163
10.4　SIMPLER 算法 …… 163
10.5　SIMPLEC 算法 …… 165
10.6　PISO 算法 …… 166
思考题 …… 167

11　网格生成方法 …… 168

11.1　引言 …… 168
11.2　结构网格 …… 170
11.2.1　贴体坐标法 …… 170
11.2.2　块结构化网格 …… 176
11.3　非结构网格 …… 179
11.3.1　阵面推进法 …… 180
11.3.2　Delaunay 三角划分法 …… 181
11.3.3　四叉树（2D）/八叉树（3D）方法 …… 183
11.3.4　阵面推进法和 Delaunay 三角划分结合算法 …… 183
思考题 …… 184

参考文献 …… 185

1 计算流体力学发展概述

教学目的

(1) 了解计算流体力学（Computational Fluid Dynamics，CFD）的概念及思想。

(2) 了解 CFD 发展及动向。

(3) 了解并掌握控制方程离散方法。

(4) 理解数值模拟的优点及局限性。

1.1 计算流体力学的发展

传统研究流体的方法有实验方法（17 世纪法国和英国）与分析方法（18 世纪和 19 世纪欧洲），自从计算机问世以来，进而发展成为计算方法。

计算流体力学（Computational Fluid Dynamics，CFD）是一门用数值计算方法直接求解流动主控方程（Euler 或 Navier-Stokes 方程）以发现各种流动现象规律的学科。它综合了计算数学、计算机科学、流体力学、科学可视化等多种学科。广义的 CFD 包括计算水动力学、计算空气动力学、计算燃烧学、计算传热学、计算化学反应流动，甚至包括数值天气预报。

CFD 的基本思想是把原来在时间域及空间域上连续的物理量用一系列有限个离散点上的变量值的集合来代替，通过一定的原则和方式对流动基本方程进行离散，建立起离散点上变量值之间关系的代数方程组，然后求解代数方程组获得变量的近似值。

CFD 的发展主要是围绕着流体力学计算方法（或称计算格式）这条主线不断进步的。

英国气象学家 L. F. Richardson 数值天气预报的努力失败是因为他使用的是中心差分格式，该方法是无条件不稳定的。1928 年，三位应用数学家 R. Courant，K. O. Friedrichs 和 H. Lewy 发表了被称为 CFD 里程碑式的著名论文，开创了稳定性问题的研究。第二次世界大战期间，美国 Los Alamos 国家实验室的科学家发明了描述原子弹所产生的包含激波的爆轰气流的方法。该实验室研究核武器的 J. V. Neumann 提出了人工黏性方法以便捕获激波，该方法的人工黏性思想至今仍然是 CFD 的核心内容之一。另外，J. V. Neumann 还提出了以其名字命名的著名的稳定性分析方法，该方法至今仍然是 CFD 使用最多的稳定性分析方法。因此，J. V. Neumann 被尊称为“CFD 之父”。

CFD 是一门由多领域交叉形成的应用基础学科，它涉及流体力学理论、计算机技术、偏微分方程的数学理论、数值方法等学科。一般认为计算流体力学是从 20 世纪 60 年代中后期逐步发展起来的，大致经历了四个发展阶段：无黏性线性、无黏性非线性、雷诺平均

的N-S方程以及完全的N-S方程。

自20世纪60年代以来CFD技术得到飞速发展，其原动力是不断增长的工业需求，而航空航天工业自始至终是最强大的推动力。传统飞行器设计方法实验昂贵、费时，所获信息有限，迫使人们需要用先进的计算机仿真手段指导设计，大量减少原型机实验，缩短研发周期，节约研究经费。1970年，CFD运用于二维流动模型。1990年，CFD已经可以进行三维流场模拟。

40年来，CFD在湍流模型、网格技术、数值算法、可视化、并行计算等方面取得了飞速发展，并给工业界带来了革命性的变化。如在汽车工业中，CFD和其他计算机辅助工程（CAE）工具一起，使原来新车研发需要上百辆样车减少为目前的十几辆车；国外飞机厂商用CFD取代大量实物实验，如美国战斗机YF-23采用CFD进行气动设计后比前一代YF-17减少了60%的风洞实验量。目前在航空、航天、汽车等工业领域，利用CFD进行的反复设计、分析、优化已成为标准的必经步骤和手段。

当前CFD问题的规模为：机理研究方面如湍流直接模拟，网格数达到了10^9（十亿）量级，在工业应用方面，网格数最多达到了10^7（千万）量级。现在CFD发展到可以完全分析三维黏性湍流及旋涡运动等复杂问题。

近十年来，CFD有了很大的发展，所有涉及流体流动、热质交换、分子输运等现象的问题，几乎都可以通过CFD的方法进行分析和模拟。CFD不仅作为研究工具，而且还作为设计工具运用于航空航天、汽车和发动机、工业制造、土木工程、环境工程和造船（潜水艇）、食品工程、海洋结构工程等领域。

随着计算机技术的发展和所需要解决的工程问题的复杂性的增加，计算流体力学已经发展成为以数值手段求解流体力学物理模型，分析其流动机理为主线，包括计算机技术、计算方法、网格技术和可视化后处理技术等多种技术的综合体。目前计算流体力学主要向两个方向发展：一方面是研究流动非定常稳定性以及湍流流动机理，开展高精度、高分辨率的计算方法和并行算法等的流动机理与算法研究；另一方面是将计算流体力学直接应用于模拟各种实际流动，解决工业生产中的各种问题。

计算流体力学研究工作的优势以及存在的问题和困难有：

（1）优势。“数值实验”比“物理实验”具有更大的自由度和灵活性。例如“自由”地选取各种参数等。“数值实验”可以进行“物理实验”不可能或很难进行的实验；例如：天体内部温度场数值模拟，可控热核反应数值模拟；“数值实验”的经济效益极为显著，而且将越来越显著。

（2）问题与不足。流动机理不明的问题，数值工作无法进行；数值工作自身仍然有许多理论问题有待解决；离散化不仅引起定量的误差，同时也会引起定性的误差，所以数值工作仍然离不开实验的验证。

1.2 数值模拟过程

数值模拟是“在计算机上实现的一个特定的计算，通过数值计算和图像显示履行一个虚拟的物理实验——数值实验”。

数值模拟的步骤包括：建立反映工程问题或物理问题本质的数学模型；寻求高效率、

高精确度的计算方法；编制程序和进行计算；显示计算结果。

对于恒定流动问题，数值模拟过程如图 1-1 所示。如果为非恒定问题，则可将图 1-1 的过程理解为一个时间步的计算过程，循环这一过程求解下一个时间步的变量值。

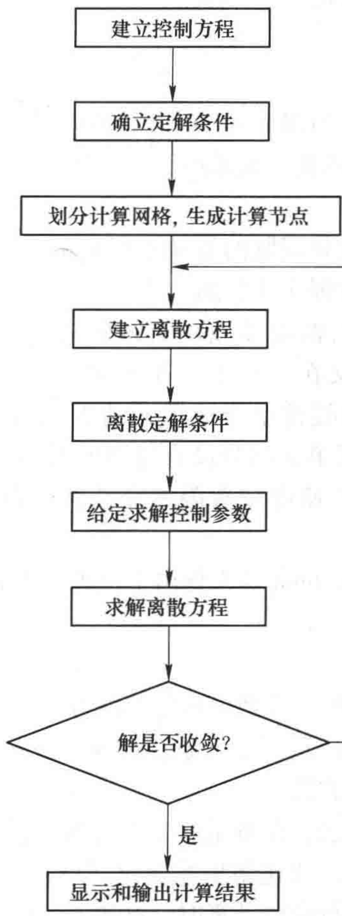

图 1-1　数值模拟过程框图

1.3 控制方程的离散方法

1.3.1 有限差分法

有限差分法（Finite Difference Method，FDM）是应用最早、最经典的数值方法，它是将求解区域划分为矩形或正交曲线网格（或称为差分网格），将控制方程中的每一个微商用差商来代替，从而将连续函数的微分方程离散为网格节点上定义的差分方程，每个方程中包含了本节点及其附近一些节点上的待求函数值，通过求解这些代数方程就可获得所需的数值解。较多用于求解双曲型和抛物型问题。

有限差分法的优点是它建立在经典的数学逼近理论的基础上，容易为人们理解和接

受；有限差分法的主要缺点是对于复杂流体区域的边界形状处理不方便，处理得不好将影响计算精度。

在此基础上发展有：PIC（Particle-in-Cell）、MAC（Marker-and-Cell）、美籍华人陈景仁提出的有限分析法（Finite Analytic Method，FAM）。

1.3.2 有限元法

有限元法（Finite Element Method，FEM）是20世纪80年代开始应用的一种数值解法，它吸收了有限差分法中离散处理的内核，又采用了变分计算中“选择逼近函数对区域进行积分”的合理方法。

有限元法的基本原理是把适定的微分问题的解域进行离散化，将其剖分成相连结又互不重叠的具有一定规则几何形状的有限个子区域（如：在二维问题中可以划分为三角形或四边形；在三维问题中可以划分为四面体或六面体等），这些子区域称之为单元，单元之间以节点相联结。函数值被定义在节点上，在单元中选择基函数（又称插值函数），以节点函数值与基函数的乘积的线性组合成单元的近似解来逼近单元中的真解。有限元法的主要优点是对于求解区域的单元剖分没有特别的限制，因此特别适合处理具有复杂边界流场的区域。有限元法求解速度较有限差分法和有限体积法慢，在CFD中运用不是很广泛。

在有限元法基础上，英国的C. A. Brebbia等人提出了边界元法和混合元法等。

1.3.3 谱方法

谱方法是20世纪70年代发展起来的一种数值求解偏微分方程的方法，它具有“无穷阶”收敛性，可采用快速算法，现已被广泛用于气象、物理、力学等诸多领域，成为继差分法和有限元法之后又一种重要的数值方法。

谱方法是一种高精度的数值计算方法，在解足够光滑的物理问题时，谱方法可以给出准确性很高的近似解，而且收敛速度快。快速傅里叶变化（FFT）的出现，进一步促进了谱方法的迅速发展。但是采用谱方法进行数值计算时，必须严格满足周期性边界条件，这是谱方法进行数值计算时存在的一个局限。

1.3.4 有限体积法

有限体积法（Finite Volume Method，FVM），又称有限容积法，是将计算区域划分为一系列控制体积，将待解微分方程对每一个控制体积积分得出离散方程。它的关键是在导出离散方程过程中，需要对界面上的被求函数本身及其导数的分布做出某种形式的假定。用它导出的离散方程具有守恒性，而且离散方程系数物理意义明确，计算量相对较小。1980年，S. V. Patanker在其专著“Numerical Heat Transfer and Fluid Flow”中对有限体积法进行了全面阐述。FVM现是CFD应用最广泛的一种方法。这种方法研究的扩展也在不断进行，如P. Chow提出适用于任意多边形非结构网格的扩展有限体积法等。

就划分和求解的结果而言，FVM就是特殊的有限差分法。就离散方法而言，有限体积法可视作有限元法和有限差分法的中间物，该方法的主要缺点是不便对离散方程进行数学特性分析。

1.4 数值模拟的优点及局限性

相对实验流体力学而言，数值模拟的优点包括以下几点：

（1）数值模拟可以大幅减少新设计所需的时间和成本。

（2）能研究难以进行或不可能进行受控实验的系统。

（3）能超出通常的行为极限，研究危险条件下系统。

（4）比实验研究更自由、更灵活。

（5）可以无限量地提供研究结果的细节，便于优化设计。

（6）具有很好的重复性，条件容易控制。

数值模拟的局限性有：

（1）数值模拟要有准确的数学模型（非线性偏微分方程数值解现有理论尚不充分，还没有严格的稳定性分析、误差分析或收敛性证明）。

（2）数值实验不能代替物理实验或理论分析。数值模拟只有在网格尺度为零的极限条件下才能获得原方程的精确解。即使有了可靠的理论方程，数值模拟的可靠性仍需要得到实践的验证，必须在一定范围内获得实验数据以提供边界条件。

（3）计算方法的稳定性和收敛性问题。

（4）数值模拟受到计算机条件的限制。

直接用湍流的雷诺平均 N-S 方程数值模拟湍流一般还不可能实现，由于网格最小尺度难以达到湍流的最小尺度，目前只能就几个简单的情形进行模拟。

总之，关于一次模拟的精确度的绝对保证还没有，需要经常地、严格地验证其结果的有效性。成功的数值模拟来自对流体流动物理及数值算法基础的透彻的理解和经验，没有这些，就不能得到最好的结果。

寻找高效率、高准确度的计算方法和发展高容量高性能的计算机系统是计算流体力学近期需要解决的问题。

思 考 题

1-1 CFD 发展的方向及局限性是什么？

1-2 描述主流 CFD 软件控制方程离散方法。

2 流体流动的控制方程

教学目的

（1）了解并掌握流体运动的方程：连续性方程、运动（动量）方程、能量方程。

（2）了解并掌握牛顿型流体的控制方程（N-S方程、伯努利方程）。

（3）了解并掌握流体流动控制方程的定解条件。

2.1 研究流体运动的方法

研究流体运动的方法包括以下两种：

（1）拉格朗日法（Lagrange）。拉格朗日法着眼于每个个别流体质点的研究，综合所有流体质点的运动后便可以得到整个流体的运动规律。简单地说，就是研究各个流体质点的运动及物理量随时间变化的规律。

（2）欧拉法（Euler）。欧拉法着眼于研究流动空间点上的物理量的变化规律，即欧拉法着眼于不同瞬时物理量在空间的分布，而不关心个别质点的运动。

2.2 流体流动和传热的基本方程

2.2.1 连续性方程

质量守恒定律在流场中的数学表达，称为连续方程。

在流场中任取一控制体积为 V 的控制体，其控制面的面积为 S。$\boldsymbol{n}$ 为微元面积矢量 $\mathrm{d}S$ 外法线的单位向量，设 $\boldsymbol{U}$ 为微元表面 $\mathrm{d}S$ 上流体的速度。

质量守恒定律，即单位时间内通过控制面流入的质量之和等于单位时间内控制体中质量的增量。

控制体的流体质量可用微元质量在控制体内的体积积分表示，即 $\int_V \rho \mathrm{d}V$（$\iiint_V \rho \mathrm{d}V$ 的简化表示），则控制体内流体在单位时间的变化量即对时间的变化率应表示为：$\frac{\partial}{\partial t}\int_V \rho \mathrm{d}V$。

单位时间通过控制面流入控制体的净质量之和为 $\oint_S \rho(\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{U})\mathrm{d}S$（$\oint\!\!\int_S \rho(\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{U})\mathrm{d}S$ 的简化表示，用流出质量减流入质量）。

由质量守恒定律有

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_V \rho \mathrm{d}V = -\oint_S \rho(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{U})\mathrm{d}S \tag{2-1}$$

即

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_V \rho \mathrm{d}V + \oint_S \rho(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{U})\mathrm{d}S = 0 \tag{2-2}$$

根据高斯（Gauss）定理，若在封闭的区域中，被积函数 $\rho\boldsymbol{U}$ 连续并一阶可导，则

$$\oint_S \rho(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{U})\mathrm{d}S = \int_V \mathrm{div}(\rho\boldsymbol{U})\mathrm{d}V \tag{2-3}$$

式（2-3）可改写成

$$\int_V \left[\frac{\partial\rho}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho\boldsymbol{U})\right]\mathrm{d}V = 0 \tag{2-4}$$

由于式（2-4）对任意控制体均成立，故式（2-4）被积函数必然恒为零，即

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho\boldsymbol{U}) = 0 \tag{2-5}$$

在直角坐标系中，则式（2-5）可改写成

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0 \tag{2-6}$$

或用张量形式表示为：

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_i)}{\partial x_i} = 0 \tag{2-7}$$

式中，下标 i 可取值为 1，2，3，以表示 3 个空间坐标。

式（2-4）为积分形式的连续方程，式（2-5）~式（2-7）为微分形式的连续方程。

2.2.2 运动（动量）方程

动量守恒定律在流场中的数学表达，称为运动（动量）方程。

动量守恒定律，即作用在控制体上的外力的合力与单位时间内通过控制面流入控制体内的动量之和等于单位时间内控制体中流体动量的增量。

在流场中任取一控制体积为 V 的控制体，其控制面的面积为 S。若设控制体内某 A 流体的密度为 ρ，速度设为 $\boldsymbol{U}$，单位质量流体所受到的质量力为 $\boldsymbol{f}$，微元面积 $\mathrm{d}S$ 外法线的单位向量为 $\boldsymbol{n}$，微元面积矢量 $\mathrm{d}S$ 的应力张量为 $\boldsymbol{\Pi}$，分量为 σ_{ij}，其中 $\boldsymbol{p}_x = (\sigma_{xx}\quad \sigma_{xy}\quad \sigma_{xz}) = (\sigma_{11}\quad \sigma_{12}\quad \sigma_{13})$，则该控制体受到的总质量力为 $\int_V \rho\boldsymbol{f}\mathrm{d}V$，表面力为 $\oint_S \boldsymbol{\Pi}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S$，流体具有的总动量为 $\int_V \rho\boldsymbol{U}\mathrm{d}V$，则动量守恒定律的数学表达式为：

$$\int_V \frac{\partial(\rho\boldsymbol{U})}{\partial t}\mathrm{d}V = \int_V \rho\boldsymbol{f}\mathrm{d}V + \oint_S \boldsymbol{\Pi}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S - \oint_S (\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{U})\rho\boldsymbol{U}\mathrm{d}S \tag{2-8}$$