HIT

数学 · 统计学系列

The Collection of Exercise of Conic Section (Book 3, Vol.1)

圆锥曲线习题集（下册 · 第1卷）

陈传麟 著

哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

数学·统计学系列

圆锥曲线习题集

The Collection of Exercise of Conic Section (Book 3,Vol.1)

下册（第1卷）

陈传麟 著

哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内容简介

本书是《圆锥曲线习题集》的下册第1卷，内收有关椭圆的命题500道，抛物线的命题200道，双曲线的命题200道，综合命题100道，另有圆和直线的命题300道，全书合计1 300道，绝大部分是首次发表.

1 300道命题都是证明题，全部附图. 全书分成5章45节，有些命题可供专题研究.

本书可作为大专院校师生和中学数学教师的参考用书，也可作为数学爱好者的补充读物.

图书在版编目(CIP)数据

圆锥曲线习题集. 下册. 第1卷/陈传麟著. —哈尔滨：哈尔滨工业大学出版社，2017.1

ISBN 978-7-5603-6196-3

Ⅰ.①圆… Ⅱ.①陈… Ⅲ.①圆锥曲线—高等学校—习题集 Ⅳ.①O123.3-44

中国版本图书馆CIP数据核字(2016)第222545号

策划编辑 刘培杰 张永芹
责任编辑 张永芹 王勇钢
封面设计 孙茵艾
出版发行 哈尔滨工业大学出版社
社　　址 哈尔滨市南岗区复华四道街10号 邮编150006
传　　真 0451-86414749
网　　址 http://hitpress.hit.edu.cn
印　　刷 哈尔滨市工大节能印刷厂
开　　本 787mm×1092mm 1/16 印张43.5 字数780千字
版　　次 2017年1月第1版 2017年1月第1次印刷
书　　号 ISBN 978-7-5603-6196-3
定　　价 78.00元

作者简介

陈传麟,1940 年生于上海.

1963 年安徽大学数学系本科毕业.

1965 年试建立欧几里得几何的对偶原理,并于当年获得成功.

2011 年发表专著《欧氏几何对偶原理研究》(上海交通大学出版社).

2013 年至 2016 年编撰《圆锥曲线习题集》(上、中、下(第 1 卷)三册,哈尔滨工业大学出版社).

蜀道难　难于上青天

罗马　不是一天建成的

◎ 序

本书是《圆锥曲线习题集》的下册第 1 卷，内收椭圆的命题 500 道，抛物线的命题 200 道，双曲线的命题 200 道，综合命题 100 道，另有圆和直线的命题 300 道，全书合计 1 300 道，全部都是证明题，书中九成以上的命题是首次发表. 其中值得我们重视的都加上了“*”或“**”.

和以往一样，欧氏几何的对偶原理仍然是下册推崇的解题方法.

以下给出 5 个例子.

第 1 个例子

命题 939 设 Z 是椭圆 α 的焦点，椭圆 β 在 α 的内部且过 Z，α 与 β 有且仅有两个公共点 A,B，它们都是 α,β 的切点，过 A,B 分别作 α,β 的公切线，这两条公切线交于 M，过 Z 作 β 的切线 t，如图 939 所示，求证：$t\perp ZM$.

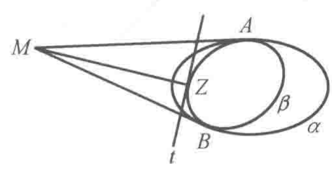

图 939

如果把图 939 的点 Z 视为“无穷远直线”，即当作“黄假线”，那么，在“黄几何”的观点下，椭圆 β 是“抛物线”——“黄抛物线”，椭圆 α 是“圆”——“黄圆”（因为 α 的焦点 Z 被当作了“黄假线”），且“黄圆”在“黄抛物线”的内部，MA，MB 是它们的

两个"切点"——"黄切点"，所以，M 应当理解为这两个"黄切点"的联线，至于 t，那是"黄抛物线"β 上的"无穷远点"(凡抛物线都有且仅有一个无穷远点，而且，这个无穷远点在抛物线的对称轴上)，把以上这些理解综合起来，画出我们自己的图形，那就是图 939.1，在那里，圆 O 与抛物线 α 相切于 A,B，相当于(对偶于)图 939 的 MA,MB，图 939.1 的 AB 显然与抛物线 α 的对称轴 m 垂直，所以，相当于说图 939 的 ZM 与 t 垂直(为什么？).这就是为什么书上说命题 939 的正确性是明显的.

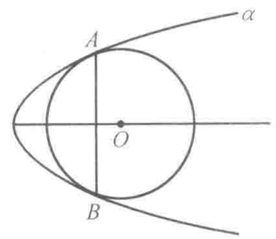

图 939.1

因为点被当作"直线"，直线被当作"点"，所以，用"黄几何"的观点处理问题总是困难的，本书对很多需要作"黄几何"处理的命题，都给出了这方面的提醒，如同命题 939 那样.

有时也会给出"蓝几何"的提醒，特别是可能会想不到的时候，例如下面的例子.

第 2 个例子

＊＊ **命题 953** 设双曲线 β 是由双曲线 α 经过平移所得，α 的一条渐近线与 β 的一条渐近线相交于 C，过 C 分别作 α,β 的切线，切点分别为 D,E，过 C 作 DE 的平行线，并在此线上取一点 P，设 PD 交 CE 于 F，PE 交 CD 于 G，FG 交 DE 于 N，如图 953 所示，求证：N 是 DE 的中点.

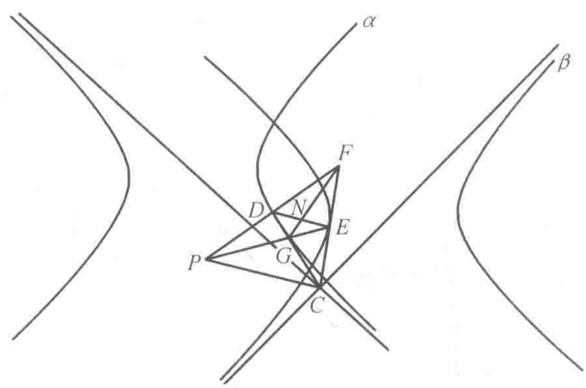

图 953

这道命题源于命题 923.1：

命题 923.1 设两圆 O_1,O_2 相交于 A,B，过 A 作圆 O_1 的切线，同时，过 B 作圆 O_2 的切线，这两切线交于 C，过 C 分别作圆 O_1,O_2 的切线，切点分别为 D,E,DE 交 AB 于 M，如图 923.1 所示，求证：M 是 DE 的中点.

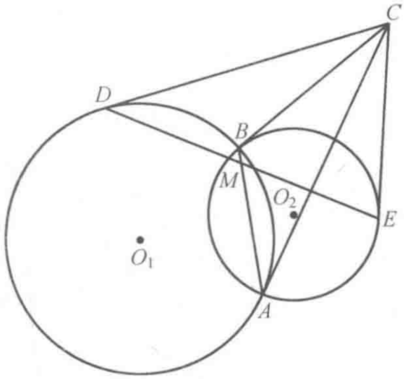

图 923.1

如果把图 923.1 的 AB 当作"蓝假线"，那么，A,B,M 都成了"无穷远点"——"蓝假点"，图中的两个圆都成了"双曲线"——"蓝双曲线"，AC 是"蓝双曲线"O_1 的渐近线之一(另一条未画出)，BC 是"蓝双曲线"O_2 的渐近线之一(另一条未画出)，这两条"蓝双曲线"的渐近线两两平行(因而是"平移"关系)，从中各取一条方向不同的渐近线，设它们交于 C，过 C 分别作这两条"蓝双曲线"的切线，切点分别为 D,E，以上就是"蓝观点"下对图 923.1 的理解，按此作图，就产生了图 953.

现在的问题是，命题 923.1 的题断"求证：M 是 DE 的中点"，这句话在"蓝几何"中作何理解？其实，我们说图 923.1 的 M 是 DE 的中点，在"蓝种人"(持"蓝几何"观点的人)眼里，就相当于说："蓝直线"DE 上的 N(N 是指直线 DE 上的无穷远点)是"蓝线段"DE 的"蓝中点"，那么，如何寻找"蓝种人"眼里的"蓝点"N 呢？在我们这里，它可是看不见，摸不着的无穷远点，虽然，DE 上的无穷远点是画不出来的，但是，可以用一条与 DE 平行的直线，把它指示出来，具体说，就是在图 923.1 的 $\triangle CDE$ 中，进行如下作图：在 CM 上取一点 P，如图 * 所示，设 DP 交 CE 于 F，EP 交 CD 于 G，那么，FG 与 DE 平行(因为 M 是 DE 的中点)，等价于说，FG 与 DE 相交于无穷远点 N. 这就是为什么在命题 953 的题设的后半段有如下叙述："过 C 作 DE 的平行线，并在此线上取一点 P，设 PD 交 CE 于 F，PE 交 CD 于 G，FG 交 DE 于 N，如图 953 所示，……"

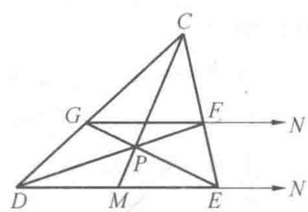

图 *

经上述解释，命题 953 被还原(逆对偶)成命题 923.1，要想证明前一命题，只要证明后一命题就行了，问题的难度大大地降低了.

第 3 个例子

* * **命题 474** 设椭圆 α 的左焦点为 Z，左准线为 f，$\triangle ABC$ 外切于 α，Z 恰

好是$\triangle ABC$的垂心，BC交f于P，过P作α的切线，且交AZ于M，过M且与α相切的直线记为l，如图474所示，求证：

① M是AZ的中点；

② $l \parallel BC$.

这道命题本来源于下面的命题474′.

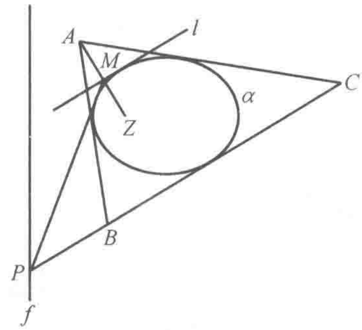

图474

命题474′ 设$\triangle ABC$内接于圆O，H是$\triangle ABC$的垂心，AH交BC于N，交圆O于E，AO交圆O于D，如图474′所示，求证：

① N是HE的中点；

② $DE \parallel BC$.

这是因为在“黄观点”下（以图474的Z为“黄假线”），图474的α是一个“黄圆”，f是它的“黄圆心”，$\triangle ABC$是这个“黄圆”的“黄内接三角形”，命题474经“逆对偶”，就成了命题474′，图474与图474′的对偶关系如下：

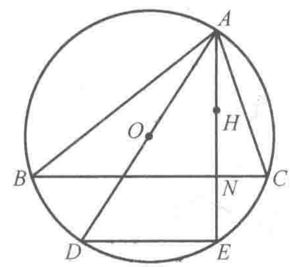

图474′

图474的点A,B,C分别对偶于图474′的直线BC,CA,AB；

图474的点P,M分别对偶于图474′的直线AD,DE；

图474的直线BC,CA,AB分别对偶于图474′的A,B,C；

图474的PM和l分别对偶于图474′的点AD和DE；

图474的无穷远直线对偶于图474′的垂心H.（把无穷远直线和垂心相对偶，此举很重要，下面还会遇到）

对命题474′作进一步加工，才成了命题474.1：

命题474.1 设$\triangle ABC$内接于圆O，H是$\triangle ABC$的垂心，AO交圆O于D，如图474.1所示，求证：BC与DH互相平分.

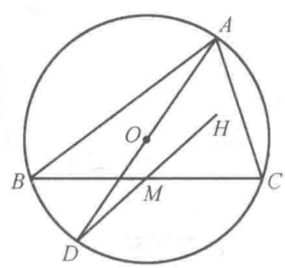

图474.1

书中直接说命题474的源命题是命题474.1，其实，中间有一个命题474′的过渡.

第4个例子

* * **命题997** 设α,β,γ是三条全等的抛物线，它们两两相交，且有着公共的焦点Z，β,γ的公切线记为l_1；γ,α的公切线记为l_2；α,β的公切线记为l_3，这三条公切线两两相交，构成$\triangle ABC$，如图997所示，求证：Z是$\triangle ABC$的垂心.

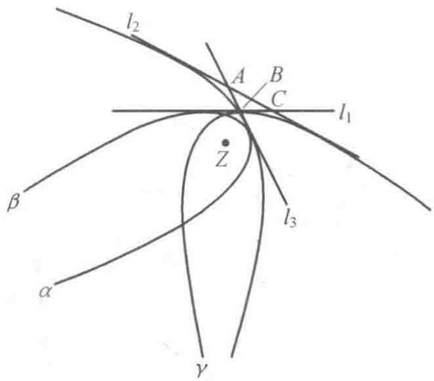

图 997

本命题源于下面的命题 997.1.

命题 997.1 设三圆 O_1,O_2,O_3 彼此全等,它们两两相交,产生四个交点 A,B,C,H,其中 H 是这三个圆的公共交点,如图 997.1 所示,求证:H 是 $\triangle ABC$ 的垂心.

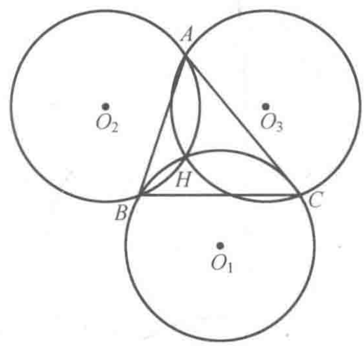

图 997.1

按理说,平面上任何一点都有资格充当"黄假线"(无穷远直线),但是,以某个特殊点为"黄假线",会简化图形,简化解题过程,效果极好,本题就以图 997.1 的垂心 H 为"黄假线",那么,在"黄种人"(持"黄几何"观点的人)眼里,三圆 O_1,O_2,O_3 都成了全等的有着公共焦点的"黄抛物线",每两条"黄抛物线"都有且仅有一条"黄公切线". 例如,A 就是"黄抛物线"O_2,O_3 的"黄公切线",把"黄种人"的这些理解画成我们熟悉的图形,就成了图 997 那样,就是说,图 997.1 和图 997 反映的是同一件事. 不同的是,图 997.1 是画给"黄种人"看的,而图 997 是给我们自己看的. 命题 997 和命题 997.1 同真同假,因此,把证明命题 997 换成证明命题 997.1,是"吃小亏占大便宜"的买卖.

之所以选图 997.1 中 $\triangle ABC$ 的垂心作为"黄假线",是因为这样一来,原先平面上的无穷远直线,在"黄观点"下,成了"黄三角形"ABC 的"黄垂心".(为什么?)这也就是为什么命题 997 的结论是"求证:Z 是 $\triangle ABC$ 的垂心".

在其他场合,我们可以选取三角形的内心(或外心)作为"黄假线",那么,原先平面上的无穷远直线,在"黄观点"下,就成了"黄三角形"的"黄内心"(或"黄外心").

第 5 个例子

命题 1008 设 P 是 $\triangle ABC$ 内或外一点，另有一个 $\triangle A'B'C'$，使得 $B'C' \parallel AP$，$C'A' \parallel BP$，$A'B' \parallel CP$，过 A'，B'，C' 分别作 BC，CA，AB 的平行线，如图 1008 所示，求证：这三次平行线共点（此点记为 Q）.

此命题称为“马克斯威尔（Maxwell）定理”，下面的命题 1008.1 和命题 1008.3 分别是该定理的“黄表示”和“蓝表示”，因此，不妨分别称为“黄马克斯威尔定理”和“蓝马克斯威尔定理”.

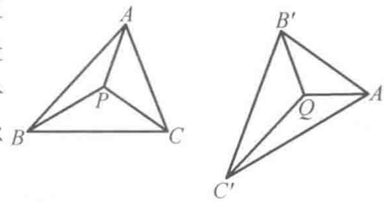

图 1008

命题 1008.1 设 Z 是 $\triangle ABC$ 外一点，在 BC，CA，AB 上各取一点，依次记为 D，E，F，又在 ZD，ZE，ZF 上各取一点，A'，B'，C'. 设 ZA 交 $B'C'$ 于 D'，ZB 交 $C'A'$ 于 E'，ZC 交 $A'B'$ 于 F'，如图 1008.1 所示，求证：“D'，E'，F' 三点共线”的充要条件是“D，E，F 三点共线”.

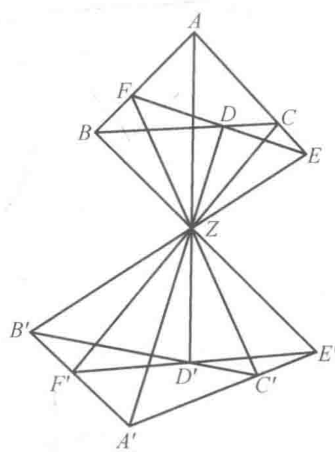

图 1008.1

命题 1008.3 设 P 是 $\triangle ABC$ 内一点，直线 z 分别交 BC，CA，AB 于 A'，B'，C'，AP，BP，CP 分别交 z 于 D，E，F，过 D，E，F 各作一直线，它们两两相交，构成 $\triangle A''B''C''$，如图 1008.3 所示，求证：三直线 $A'A''$，$B'B''$，$C'C''$ 共点（此点记为 Q）.

命题 1008 仅涉及点和直线，它的“黄表示”（指图 1008.1，一个命题在“黄几何”中的表现称“黄表示”）或“蓝表示”（指图 1008.3，一个命题在“蓝几何”中的表现称“蓝表示”），都显得很容易，尤其是“蓝表示”，与我们的图形（指图 1008）有很多相近之处.

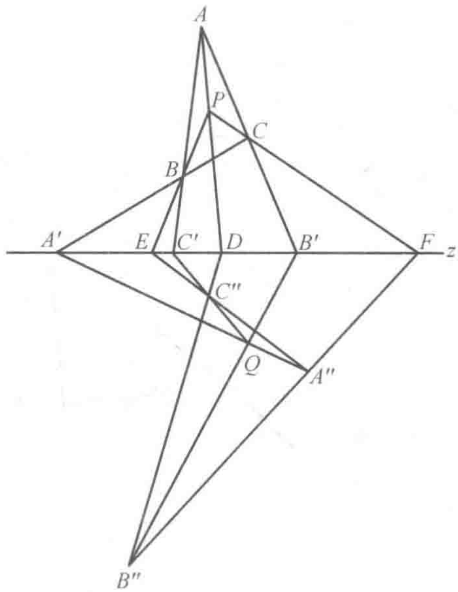

图 1008.3

不论是“黄表示”还是“蓝表示”，其结果都产生了我们前所未知的新命题，这正是欧氏几何对偶原理的价值所在.

审题解题，仁者见仁，智者见智，并无定论，我们完全可以选用自己熟悉的解法，而不必拘泥于一种指定方法. 青菜萝卜各有所好，只是孰优孰劣罢了.

欧氏几何内容繁复，其对偶几何自然也不简单，何况还有对偶的对偶呢？关注该原理的读者，值得对它潜心研究.

蜀道虽难，罗马固大，假以时日，自有水滴石穿，铁杵成针之时.

与前两册一样，本册也有不少优美的命题和优美的图形，例如：

* * **命题 500** 设 A，B 是椭圆 α 上两点，过 B 且与 α 相切的直线记为 l，在 α 上另取六点 C_1，C_2，D_1，D_2，E_1，E_2，使得 $\angle C_1AC_2$，$\angle D_1AD_2$，$\angle E_1AE_2$ 均被 AB 所平分，如图 500 所示，求证：

①C_1C_2，D_1D_2，E_1E_2 三线共点，此点记为 S；

② S 在 l 上.

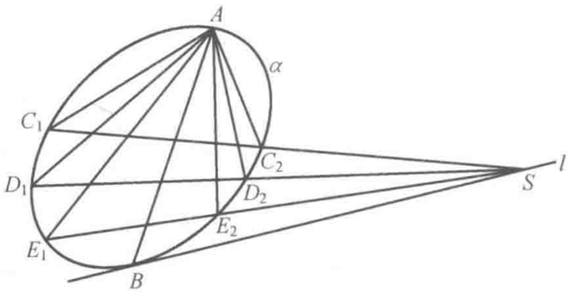

图 500

＊＊ **命题 995**　设三个椭圆 α,β,γ 两两外离，它们的中心分别是 O_1,O_2,O_3，由 O_1,O_2,O_3 所确定的圆（该圆圆心记为 O）分别交 α,β,γ 于 A,B,E,F,C,D，如图 995 所示，三直线 AD,BE,CF 两两相交，构成 $\triangle PQR$，求证：PO_1,QO_2,RO_3 三线共点（此点记为 S）.

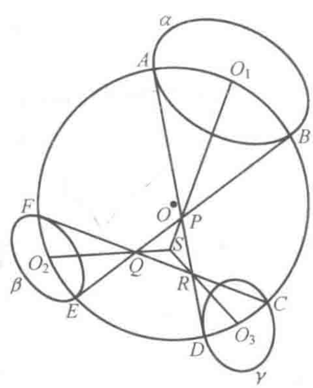

图 995

＊＊ **命题 965**　设三个圆 A,B,C 两两外切，切点分别为 A',B',C'，椭圆 α 与这三个圆均外切，切点分别为 A'',B'',C''，如图 965 所示，求证：$A'A'',B'B'',C'C''$ 三线共点（此点记为 S）.

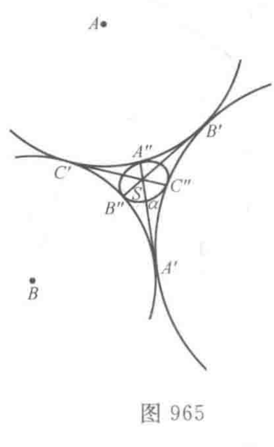

图 965

＊＊ **命题946**　设$\triangle ABC$外切于椭圆α，BC,CA,AB上的切点分别为D，E,F，设BC,CA,AB上的旁切圆圆心分别为A',B',C'，如图946所示，求证：$A'D,B'E,C'F$三线共点(此点记为S).

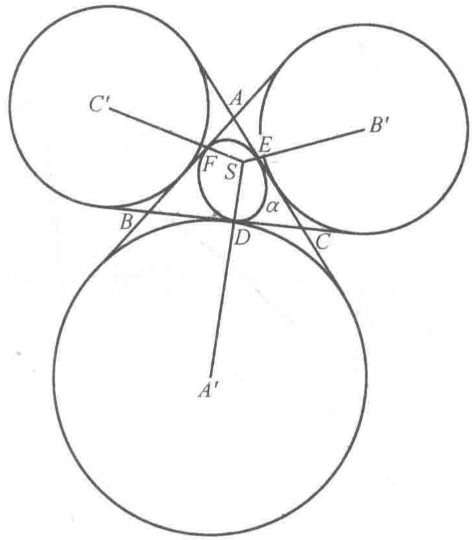

图946

＊＊ **命题945**　设$\triangle ABC$内接于椭圆α，圆D,E,F均与α外切，切点分别为A',B',C'，圆D与AB,AC均相切，圆E与BC,BA均相切，圆F与CA,CB均相切，如图945所示，求证：

①AA',BB',CC'三线共点(此点记为S)；

② DA',EB',FC'三线共点(此点记为T).

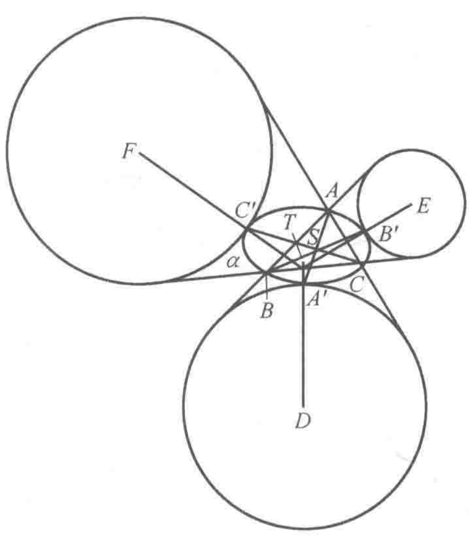

图945

＊＊ **命题947** 设$\triangle ABC$内接于椭圆α，圆A'与α外切，且与AB，AC都相切；圆B'与α外切，且与BC，BA都相切；圆C'与α外切，且与CA，CB都相切，如图947所示，求证：AA'，BB'，CC'三线共点，此点记为S.

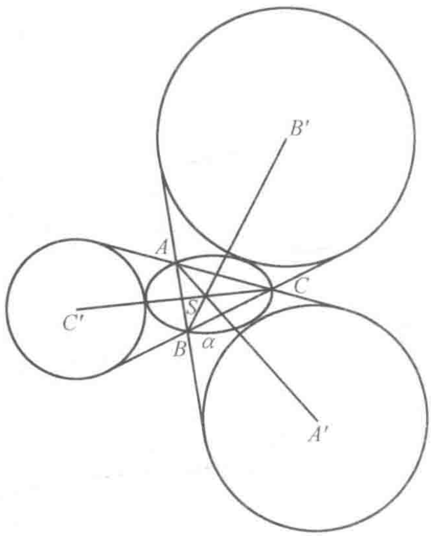

图947

＊＊ **命题967** 设$\triangle ABC$内接于椭圆α，圆O_1与AB，AC均相切，且与α相切于D；圆O_2与BA，BC均相切，且与α相切于E；圆O_3与CA，CB均相切，且与α相切于F，如图967所示，求证：AD，BE，CF三线共点（此点记为S）.

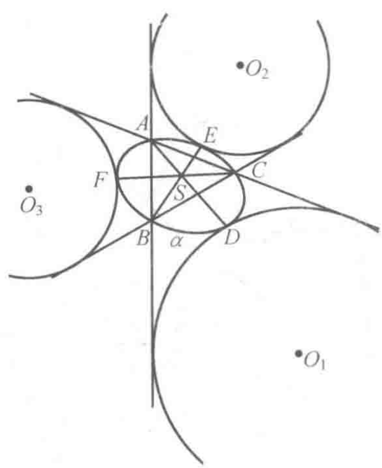

图967

＊＊ **命题948** 设$\triangle ABC$内接于椭圆α，圆A'与α外切，且与AB，AC分别相切于D，E；圆B'与α外切，且与BC，BA分别相切于F，G；圆C'与α外切，且与CA，CB分别相切于H，K. 设DE，FG，HK两两相交构成$\triangle PQR$，如图948

所示,求证:AP,BQ,CR 三线共点(此点记为 S).

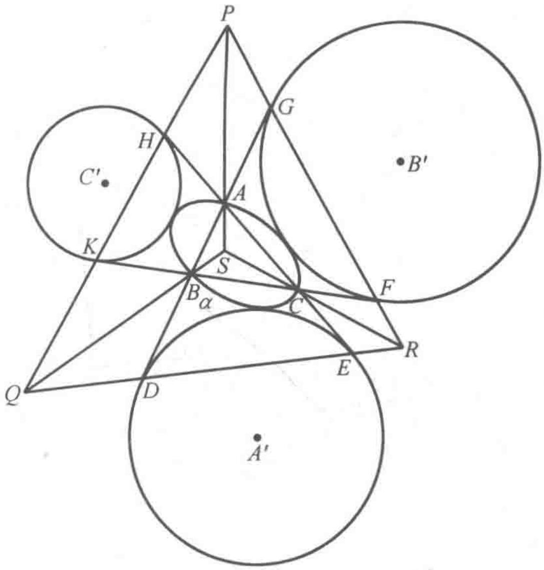

图 948

* * **命题 949**　设 $\triangle ABC$ 内接于椭圆 α,圆 A' 与 α 外切于 A'',且与 AB,AC 分别相切于 D,E;圆 B' 与 α 外切于 B'',且与 BC,BA 分别相切于 F,G;圆 C' 与 α 外切于 C'',且与 CA,CB 分别相切于 H,K.设 DE,FG,HK 两两相交构成 $\triangle PQR$,如图 949 所示,求证:PA',QB',RC' 三线共点,此点记为 T.

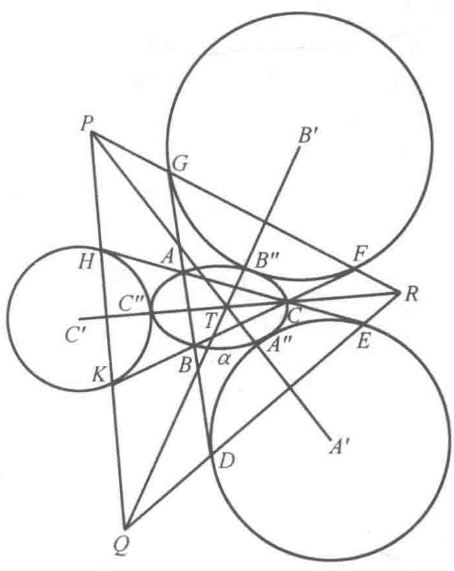

图 949

* * **命题 968**　设 $\triangle ABC$ 内接于椭圆 α,圆 A' 与 α 外切于 P',且与 AB,

AC 分别相切于 D,E；圆 B' 与 α 外切于 Q'，且与 BC,BA 分别相切于 F,G；圆 C' 与 α 外切于 R'，且与 CA,CB 分别相切于 H,K. 设 DE,FG,HK 两两相交构成 $\triangle PQR$，如图 968 所示，求证：PP',QQ',RR' 三线共点，此点记为 S.

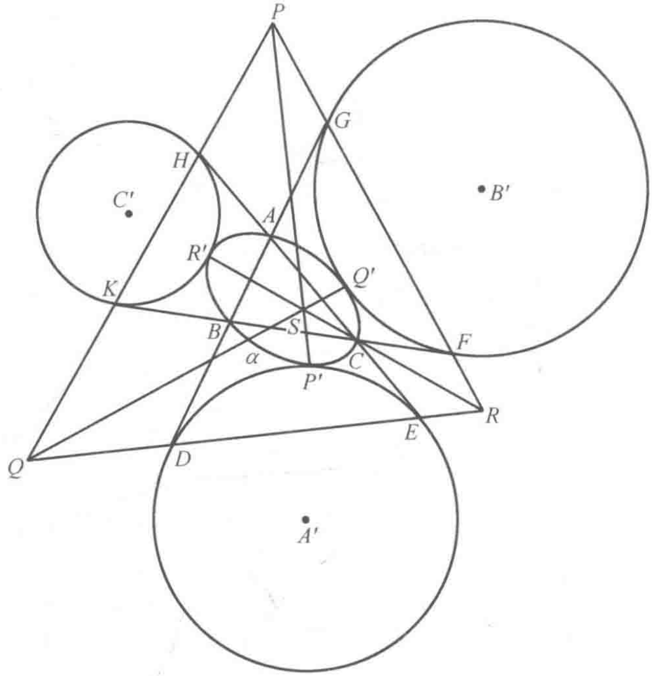

图 968

* * **命题 962** 设三个圆 A,B,C 两两外切，切点分别为 A',B',C'，这三个圆均内切于椭圆 α，切点分别为 A'',B'',C''，如图 962 所示，求证：$A'A'',B'B'',C'C''$ 三线共点(此点记为 S).

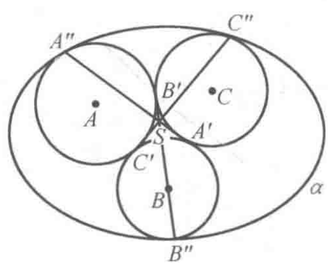

图 962

* * **命题 963** 设三圆 A,B,C 均在椭圆 α 内，它们都与 α 相切，且两两外切，切点分别为 D,E,F，过 D 作圆 B,C 的公切线，且交 α 于 A'；过 E 作圆 C,A 的公切线，且交 α 于 B'；过 F 作圆 A,B 的公切线，且交 α 于 C'，如图 963 所示，求证：AA',BB',CC' 三线共点(此点记为 S).