Analytical Dynamics of Aerospace Systems

航天分析动力学

梁立孚　宋海燕　李海波　著

科学出版社

国家自然科学基金和博士点基金资助课题

航天分析动力学

Analytical Dynamics of Aerospace Systems

梁立孚　宋海燕　李海波　著

科学出版社

北京

内 容 简 介

航天动力学是耦合动力学，涉及流固耦合及大型柔性结构等复杂问题。本书第1～5章分别研究刚-弹耦合动力学的Hamilton原理及其应用、非线性刚-弹耦合动力学的Hamilton原理及其应用、非保守刚-弹耦合动力学的拟Hamilton原理及其应用、刚-热-弹耦合动力学的功能型和功率型拟变分原理及其应用、刚-弹-液耦合动力学的功能型拟变分原理和功率型变分原理及其应用。第6章将Lagrange方程应用于线性、非线性和非保守刚-弹耦合动力学。

本书不仅可作为航天及相关专业教师、研究生和高年级本科生的参考书，同时也可作为从事航天器设计和航天动力学研究的科技工作者的参考书。

图书在版编目(CIP)数据

航天分析动力学/梁立孚，宋海燕，李海波著．—北京：科学出版社，2016.5
ISBN 978-7-03-048287-7

Ⅰ.①航… Ⅱ.①梁…②宋…③李… Ⅲ.①航天器-分析动力学 Ⅳ.①V41

中国版本图书馆CIP数据核字(2016)第103542号

责任编辑：钱 俊 周 涵／责任校对：彭 涛
责任印制：肖 兴／封面设计：耕者设计工作室

科学出版社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

北京彩虹伟业印刷有限公司 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2016年6月第 一 版 开本：720×1000 1/16
2016年6月第一次印刷 印张：25 1/2
字数：502 000

定价：148.00元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

序 言

作为一个航天大国，近年来我国的航天事业得到了飞速发展，取得的巨大成就已为世人瞩目。航天事业的发展促进了航天基础理论研究的深入，反之，航天基础理论的新成果又将助推航天技术和工程向更高层次迈进。梁立孚教授等的专著《航天分析动力学》，主要研究柔性航天器的分析动力学，尚未见有同类专著出版，本专著的问世正适应了航天技术发展的需要。

航天动力学涉及流固耦合及大型柔性结构等复杂问题，建立这类动力学的控制方程和数值计算模型相当困难。该书合理地应用功能转化原理和能量守恒定律，建立航天动力学各类耦合运动的 Hamilton 方程。一方面，通过对 Hamilton 方程求驻值，得到航天动力学的控制方程，求解控制方程得到各类耦合动力学问题的解析解；另一方面，从各类耦合动力学的 Hamilton 原理出发，应用变分直接方法——Ritz 法或者有限元素法，求得各类耦合运动动力学问题的近似解。这样，便同时解决了建立控制方程和数值计算模型的两个难题。这是该书的一个特点。

该书的另一个特点是，将 Lagrange 方程与 Hamilton 原理有机结合起来，建立了 Lagrange-Hamilton 体系，明确了 Lagrange 方程是 Hamilton 原理的驻值条件。该书前 5 章应用 Hamilton 原理研究刚-弹耦合动力学、非线性刚-弹耦合动力学、非保守刚-弹耦合动力学、刚-热-弹耦合动力学和刚-弹-液耦合动力学问题；第 6 章以将 Lagrange 方程应用于线性、非线性和非保守刚-弹耦合动力学为例，说明前 5 章应用 Hamilton 原理研究的问题原则上都可以应用 Lagrange 方程来研究，并且可得到相同的结论，从而完善了该书的 Lagrange-Hamilton 体系。

该书给出若干算例，表明应用相关理论可以解决一些关于航天技术和工程的问题。例如，应用 Hamilton 原理和/或 Lagrange 方程，对空间自由梁的振动问题、动力刚化问题、气动弹性问题和高速飞行器的热效应问题等进行了解析分析，这与有些学者应用计算机软件进行数值分析构成明显的互补关系。

我由衷地认为，该书不仅可作为航天及相关专业研究生的参考书，同时也可作为从事航天器设计和航天动力学研究的科技工作者的参考书。

中国工程院院士

杜善义

2016 年 2 月

目　录

绪　论

从 18 世纪开始，在力学发展史上又出现了与矢量力学并驾齐驱的另一力学体系，即分析力学。这个体系的特点是对能量与功的分析代替对力与力矩的分析。为了避免未知理想约束力的出现，分析力学的一种方法是在理想约束力与约束方程间建立起一种直接的关系，导出了比矢量力学一般方法程式化更为明显的动力学方程——Lagrange 第一类方程。分析力学的另一种方法是从独立坐标出发，利用纯数学分析方法，将用独立坐标描述的动力学方程用统一的原理与公式进行表达，克服了在矢量动力学中建立这种方程依赖技巧的缺点。这种统一的方程即 Lagrange 第二类方程。以 Lagrange 方程为基础的分析力学，称为 Lagrange 力学。1834 年 Hamilton 将 Lagrange 第二类方程变换成一种正则形式，将动力学基本原理归纳为变分形式的 Hamilton 原理，从而建立了 Hamilton 力学。

1788 年 Lagrange 出版的不朽名著 *Mécanique Analytique* 是世界上最早的一本分析力学的著作[1]。分析力学是建立在虚功原理和达朗贝尔原理的基础上。1760～1761 年，Lagrange 用这两个原理和理想约束结合，得到了动力学的普遍方程，几乎所有的分析力学的动力学方程都是从这个方程直接或间接导出的。

1834 年和 1843 年 Hamilton 分别建立了 Hamilton 原理和正则方程，把分析力学推进一步[2]。Hamilton 体系在多维空间中，可用代表一个系统的点的路径积分的变分原理研究各类力学问题。它的优点是可以推广到新领域（如电动力学）和应用变分学中的近似法来解题。

从 1861 年有的学者推导出球在水平面上作无滑动的滚动方程开始，到 1894 年 Hertz 开始非完整系统分析力学的研究[3]，再到 1896 年 Appell 在《理性力学》中提出 Appell 方程为止[4]，线性非完整约束的理论已基本完成。

作为对以上开创性工作的继续，20 世纪分析力学对非线性、非完整、非定常、变质量等力学系统作了进一步研究，对于运动的稳定性问题作了广泛的研究，相应地也出现了多部分析力学专著[5-18]。文献[19]、[20] 总结了我国学者对分析力学研究的贡献，不赘述。

20 世纪分析力学的研究工作，除了如上的特点之外，还逐步出现了部分和全部研究应用分析力学的专著。文献[21]作为我国第一部分析力学专著，将分析力学从质点刚体力学扩展到连续介质力学，从离散系统扩展到连续系统。文献[10]除了重视应用分析力学的研究之外，专门列出一章研究飞行器动力学问题。文献[22]作为我国第一部《应用分析动力学》，中肯地指出，用分析力学的方法可以较严

格地阐明有限自由度体系振动的普遍规律和计算方法，而且所得规律可推广于无限自由度体系。

我们高兴地看到，进入21世纪的不长的历史时期内，分析力学的著作喷薄欲出，理论分析力学和应用分析力学并驾齐驱，出现一派欣欣向荣的景象[23-29]。在应用分析力学方面，国外已经出现了类似 *Analytical Mechanics of Aerospace Systems* 这样的专著[24]。

本书命名为《航天分析动力学》(*Analytical Dynamics of Aerospace Systems*)，以下说明采用这个书名的原因。

航天器动力学是研究航天器轨迹运动、姿态运动、部件相对运动、变形运动以及它们之间的各类耦合运动规律的学科[30]。我们注意到，变形运动既包括固体的弹塑性变形运动，也包括热弹塑性变形运动，还包括流体力学的运动。

研究航天器轨迹运动规律的学科为轨道动力学；研究航天器姿态运动规律的学科为姿态动力学；轨道动力学及姿态动力学正好是质点刚体动力学的研究内容。我们知道，刚体的一般运动可以处理为随质心的平动和绕质心的转动。前者将刚体视为一个质点(即以质心代表整个刚体的平动)来研究，形成轨道动力学，研究兵器的学者形象地称之为弹道学，研究内容相当丰富。而后者的内容就是研究刚体相对质心的转动。由于作用力矩可以是复杂的干扰力矩和控制力矩，关于定点转动的经典理论在这里获得很大的丰富与发展，直到现在，仍有许多新的研究课题。经典质点刚体动力学是以牛顿(Newton)三定律为基础，建立一组动力学基本微分方程，通过求解微分方程求得动力学问题的合理解。本书的特点是根据问题的物理背景，建立质点刚体动力学的 Hamilton 原理，应用变分原理来研究问题。

研究物体变形运动规律的学科为变形体动力学(和变形体静力学)。谈到变形体动力学，人们首先想到的是固体力学中的弹性动力学。经典弹性动力学是以本构关系——正反形式的胡克(Hooke)定律、动态平衡方程、几何方程为基础，建立一组弹性动力学基本微分方程，通过求解微分方程求得动力学问题的合理解。本书的特点是建立弹性动力学的 Hamilton 原理，通过变分方法研究弹性动力学问题。

不可压缩黏性流体动力学是以 Navier-Stokes 方程、连续性方程和本构关系，及其相应的边界条件和初始条件构成不可压缩黏性流体动力学基本微分方程，通过求解微分方程求得动力学问题的合理解。本书的特点是建立不可压缩黏性流体动力学的 Hamilton 型变分原理，通过变分方法研究流体动力学问题。

随着飞行器飞行速度的不断提高，不仅在飞行动力学中出现了所谓热障问题，飞行器结构的热应力和热效应问题也越来越受到学术界的关注[31]。以航天器为例，飞行器在其飞行过程中要经受极为恶劣的热环境，其温度可以从零下二百多摄氏度变至数千摄氏度以上。虽然热控技术的发展可以大大减轻热环境对飞行器结构强度的影响，但是这仍然是一个不可忽视的问题。本书建立热弹性动力学的

Hamilton 原理和功率型变分原理，通过变分方法研究热弹性动力学问题。

以上论题是本书的研究内容，这些内容出现在各章的预备知识中。更重要的，本书研究它们之间的各类耦合运动规律。

在本书作者看来，航天动力学是耦合动力学。由于航天器是由充液弹性体构成的空间自由体，航天器在空间自由飞行的同时，内部结构产生弹性变形运动，内部流体（液体）产生流动和晃动。这便决定了航天器完成在空间正常飞行的同时，将产生刚体动力学与弹性体动力学的耦合、刚体动力学与流体动力学的耦合、刚体动力学和弹性体动力学及流体动力学的耦合。还有热-弹耦合动力学和刚-热-弹耦合动力学等。这类耦合动力学，尚无现成的基本方程供我们利用，而且仅通过力的分析和位移分析来建立其基本方程相当困难。分析力学的特点是对能量与功的分析代替对力（及其相应的位移）与力矩（及其相应的角位移）的分析，根据问题的物理背景，应用功能转换原理和能量守恒定律，建立它们之间的各类耦合运动的变分原理的泛函，应用变分原理来研究问题是一条可行的途径。应用变分方法来研究它们之间的各类耦合运动的动力学可以从两个方面着手：一方面是对耦合动力学的变分原理求驻值，得到耦合动力学的基本微分方程，通过求解微分方程求得各类耦合运动动力学问题的合理解；另一方面，从各类耦合运动动力学的变分原理出发，应用变分直接方法——Ritz 方法或者有限元素法，直接求得各类耦合运动动力学问题的近似解。这种方法能够方便地应用电子计算机进行计算。这就是将本书命名为航天分析动力学的原因。

文献[32]指出，经典分析力学是力学最根本的体系。分析动力学是以 Lagrange 方程和 Hamilton 原理为基础，研究表明，Lagrange 方程是 Hamilton 原理的驻值条件。本书采用 Lagrange-Hamilton 体系：第 1～5 章应用各种类型的 Hamilton 原理研究航天分析动力学中的一些问题，第 6 章应用 Lagrange 方程来研究这些问题，研究将表明，应用 Lagrange 方程研究这些问题与应用 Hamilton 原理研究这些问题得到相同的控制方程。

本书第 1 章研究刚-弹耦合动力学的 Hamilton 原理及其应用。在将刚体动力学与弹性体动力学杂交的前提下，建立了刚-弹耦合动力学的 Hamilton 原理。推导了刚-弹耦合动力学 Hamilton 原理的驻值条件，说明了刚-弹耦合动力学 Hamilton 原理的驻值条件的物理意义。应用刚-弹耦合动力学的 Hamilton 原理，研究了自由体的横向振动问题，合理地处理了弹性变形与大范围刚体运动之间的耦合问题。最后给出两类由刚-弹耦合动力学向弹性动力学和刚体动力学退化的方式。

如前所述，航天分析动力学是耦合动力学，多篇文献都反映出耦合动力学的研究已经进入非线性阶段，因此，第 2 章研究非线性刚-弹耦合动力学中的 Hamilton 原理。研究非线性刚-弹耦合动力学，需要杂交质点刚体动力学与非线性弹性动力学，这是一个难度较大的理论研究课题。为了便于研究非线性刚-弹耦合动力学，

首先研究非线性弹性动力学的 Hamilton 原理，然后研究刚体动力学的 Hamilton 原理，在此基础上，实现二者的杂交，建立非线性刚-弹耦合动力学中的 Hamilton 原理。最后研究非线性刚-弹耦合动力学中的 Hamilton 原理在航天动力学中的应用。

非保守系统的变分原理和广义变分原理的研究涵盖了许多学科，是一个相当重要的研究领域。第 3 章研究非保守刚-弹耦合动力学及其应用。该章内容分为三个部分：①研究线性非保守系统刚-弹耦合动力学的拟 Hamilton 原理。内容包括，经典分析动力学拟 Hamilton 原理，刚体动力学的拟 Hamilton 原理，弹性动力学的拟 Hamilton 原理，弹性动力学的拟余 Hamilton 原理，刚-弹耦合动力学的拟 Hamilton 原理。②研究非线性非保守系统的拟 Hamilton 原理。内容包括，一类变量的非线性刚-弹耦合动力学的拟 Hamilton 原理，两类变量的非线性刚-弹耦合动力学的拟 Hamilton 原理，将非保守系统刚体动力学和弹性动力学发展为非保守系统非线性刚-弹耦合动力学。③研究非保守系统的典型算例，包括气动弹性问题和稳定性问题。

第 4 章研究在温度场中综合考虑材料的性能参数随温度变化和热变形效应时的热弹和刚-热-弹耦合动力学问题。研究在温度场中综合考虑非线性弹性和热变形效应的问题，即热非线性弹性和刚-热非线性弹性耦合动力学问题。分别研究热传导问题的拟变分原理、刚体动力学的功率型拟变分原理和弹性动力学的功率型拟变分原理。研究热-弹耦合动力学的功率型拟变分原理。最后研究刚-热-弹耦合动力学的功率型拟变分原理。

第 5 章研究航天充液系统分析动力学。充液系统动力学是航天动力学的重要组成部分，研究对象是流体和固体相互影响的分布参数大系统。它是一门耦合动力学，也是一个非线性和非定常的无限多自由度耦合的复杂系统。在这一研究领域，国内外学者进行了深入系统的研究，取得一系列重要的研究成果。本章研究充液系统不可压缩黏性流体力学的 Hamilton 型拟变分原理，充液系统中刚-液耦合的 Hamilton 型拟变分原理和充液系统中刚-弹-液耦合的 Hamilton 型拟变分原理。研究充液系统不可压缩黏性流体力学的功率型变分原理，充液系统中刚-液耦合的功率型变分原理和充液系统中刚-弹-液耦合的功率型变分原理。研究刚-弹-液耦合动力学的有限元素法模型。

第 6 章是 Lagrange 方程在航天动力学中的应用。要实现这一宗旨，首先要解决 Lagrange 方程应用于连续介质力学的理论与应用难题，然后再将 Lagrange 方程应用于航天分析动力学中。本章应用变导的概念和运算法则，通过研究 Lagrange 方程中的求导的性质，逐步地将 Lagrange 方程应用于线性和非线性弹性动力学，进而应用于线性和非线性刚-弹耦合动力学，并且提供了航天分析动力学的算例。一般说来，由于 Lagrange 方程是 Hamilton 原理的驻值条件，前面几章应

用 Hamilton 原理解决的问题都可以应用 Lagrange 方程来解决，考虑到篇幅的限制，本书没有这样做，其余内容可以留给有兴趣的读者去发挥。

国外已经出现的类似 *Analytical Mechanics of Aerospace Systems* 这样的专著，这里说明这类专著与本书的关系。专著 *Analytical Mechanics of Aerospace Systems* 的内容分两个部分：第一部分为基础力学，包括牛顿力学、欧拉力学、Lagrange 和 Hamilton 经典分析力学，空间飞行器的非线性稳定性和控制等内容。第二部分为天体力学，包括两体问题、三体问题、引力势场模型、摄动方法、转移轨道和相对轨道控制方法。可见，这里研究刚性航天器的轨迹运动、姿态运动的动力学问题。如前所述，本书研究变形运动以及它们之间的各类耦合运动的动力学问题。对应着专著 *Analytical Mechanics of Aerospace Systems* 主要研究刚性航天器动力学，可以说本书主要研究柔性（或者挠性）航天器动力学。可见，二者是互补的。

尽管作者努力将本书写好，但是，由于作者水平限制，书中定有不妥之处，诚恳希望广大读者给予指导和帮助。

本书为国家自然科学基金（项目编号：10272034，11172046）和博士点基金（项目编号：20060217020）资助的课题，同时得到中央高校基本科研业务费（项目编号：HEUCF130205）的资助。

参考文献

[1] Lagrange J L. Mécanique Analytique. Paris: Ve Courcier, 1811(Originally published in 1788)

[2] Hamilton W R. On a General Method in Dynamics. Philosophical Transaction of the Royal Society Part I, 1834: 247-308; Part II, 1835: 95-144

[3] Hertz H. Die prizipien der mechanik in neoen zusammhage dargestellt. Ges Werke, Bd3, Leipzip, 1894: 18-163

[4] Appell P. Traite de Mecanique Rationnelle. Paris: Bensoussan, 1896

[5] Whittaker E T. A Treatise on the Analytical Dynamics of Parti cles and Rigid Bodies with an Introduction to the Problem of Three Bodies. Cambridge: Cambridge University Press, 1937 (Originally published in 1906)

[6] Hamel G. Theoretische Mechanik. New York: Springer-Verlag, 1967(Originally published, Hamel G. Theoretische Mechanik. Berlin: Springer Verlag, 1949)

[7] Lurie A I. Analytical Mechanics. New York: Springer-Verlag, 1967(Originally published Аналитическая Механика in 1961)

[8] Pars L A. A Treatise on Analytical Dynamics. London: William Heinemann, 1965

[9] Neimark J I, Fufaev N A. Dynamics of Nonholonomic Systems. Providence: American Mathematical Society, 1972

[10] Meirovitch L. Methods of Analytical Dynamics. New York: McGraw-Hill Book Company,

1970(Dover:Dover Publications,2004)
[11] Goldstein H. Classical Mechanics. 2nd ed. Mass:Addison-Wesley Publishing Co. ,1980
[12] Lanczos C. The Variational Principles of Mechanics(Reprint of 4th Edition of 1970 ed.) Dover:Dover Publications Inc. ,1986
[13] Rosenberg R M. Analytical Dynamics of Discrett Systems. New York:Plenum Press,1977
[14] Nielsen J. Vorlesungen Über Elementare Mechanik. Berlin:Springer-Verlag,1980
[15] Greenwood D T. Classical Dynamics. New York: Prentice-Hall,Inc. ,1977
[16] Arnold V I. Mathematical Methods of Classical Mechanics. Berlin:Springer-Verlag,1978
[17] Baruh H. Analytical Dynamics:Engineering Mechanics Series. New York:McGraw-Hill,1999
[18] Lindenbaum S D,Quimby S L. Analytical Dynamics:Course Notes. Singapore:World Scientific,1994
[19] 梅凤翔,罗绍凯,赵跃宇. 中国分析力学四十年. 北京理工大学学报,1996,16(S1):1-7
[20] 陈滨,梅凤翔. 中国非完整力学三十年. 开封:河南大学出版社,1994
[21] 汪家訸. 分析动力学. 北京:高等教育出版社,1958
[22] 王光远. 应用分析动力学. 北京:人民教育出版社,1981
[23] Fowles G R,Cassiday G L. Analytical Mechanics. California:Brooks Cole Publishing Company,2004
[24] Schaub H. Analytical Mechanics of Aerospace Systems. Reston,Virginia:American Institute of Aeronautics and Astronautics Inc. ,2002
[25] Finn J M. Classical Mechanics. London:Jones and Batlett Publishers,2008
[26] Nicholas W. Introduction to Analytical Dynamics//Springer Undergraduate Mathematics Series. New York:Springer-Verlag,2009(First published in 1987)
[27] Udwadia F E,Kalaba R E. Analytical Dynamics:A New Approach. Cambridge:Cambridge University Press,2007
[28] Ardema M D. Analytical Dynamics:Theory and Applications. New York :Springer,2004
[29] Valasi G. Hamiltonian Dynamics. Singapore:World Scientific,2001
[30] 马兴瑞,王本利,苟性宇. 航天器动力学——若干问题进展及应用. 北京:科学出版社,2001
[31] Thornton E A. Thermal Structures for Aerospace Applications. Reston:American Institute of Aeronautics & Astronautics,1996
[32] 钟万勰. 应用力学对偶体系. 北京:科学出版社,2000

第 1 章　刚-弹耦合动力学的 Hamilton 原理及其应用

多柔体动力学的研究大约起源于 20 世纪 70 年代。在这方面早期有 Likins 在 20 世纪 70 年代初的研究工作，他首先研究的是带有弹性附件的卫星的动力学问题，这就是所谓的多柔体簇系统[1]。Likins 的最大贡献在于他采用了由 Meirwitch 和 Nelson 所提出的混合坐标法，将刚体位移和附件的弹性振动在不同的空间中度量。利用这种方法可以极大地缩减系统的自由度，使方程的求解成为可能。正因为如此，这一概念后来被广泛地应用于多柔体系统动力学中。还有 Kane 等[2]、Bodley[3]、Shabana[4]、Edmund[5]以及其他一些学者也在这一领域做了大量的工作。随着我国航天事业的发展，我国学者黄文虎等[6]、马兴瑞等[7]、刘延柱[8]、陆佑方[9]等[10-20]，也为该学科的发展做出重要贡献。

文献[7]指出："由于多柔体构形的复杂性，目前解决多柔体动力学问题主要是依赖于数值的、定量的分析方法，几乎没有人进行解析的分析讨论，这对于深刻把握系统的非线性力学实质、预测系统的全局动力学现象是十分不利的。因此，极有必要开展多柔体系统的理论分析，当然，这是一个十分复杂的问题，解决它可能需要很长的时间。"本书有关的研究工作[21-30]就是在这一论述的启发下展开的。

从文献[1]～[20]的研究中发现，国内外学者在研究多柔体动力学的过程中，多数是将多柔体动力学处理为刚-弹耦合动力学。本书作者认为，从力学的角度看问题，如刚-弹耦合动力学、刚-热-弹耦合动力学和刚-弹-液耦合动力学的提法概念清楚、论述准确。这便是本书采取这种称谓的原因。但是，在作文献综述、文献引用和摘录其他学者的论述时，为了尊重原著，仍然沿用多柔体动力学、刚柔耦合动力学和挠性航天器动力学等提法。

本章研究刚-弹耦合动力学的 Hamilton 原理及其应用，在将刚体动力学与变形体动力学耦合的前提下，建立了刚-弹耦合动力学的 Hamilton 原理。推导了刚-弹耦合动力学 Hamilton 原理的驻值条件，并且进行了进一步的讨论。以拦截器为例，说明了刚-弹耦合动力学 Hamilton 原理的驻值条件的物理意义。以拦截器的机动飞行段为背景，应用刚-弹耦合动力学的 Hamilton 原理，研究了自由体的横向振动问题，合理地处理了弹性变形与大范围刚体运动之间的耦合问题。讨论了使用计算技巧时应当注意的问题。说明了刚-弹耦合动力学的耦合机理。最后，给出两类由刚-弹耦合动力学向弹性动力学和刚体动力学退化的方式。

1.1　刚-弹耦合动力学的 Hamilton 原理

因为这类问题的变量多、公式复杂，以下采用实体张量符号书写[31,32]。

假设有如图 1.1 所示的任意形状物体，我们可以将之简化为刚体，用来研究大范围的刚体运动；我们也可以将之简化为弹性体，用来研究物体的弹性变形；当然，更为重要的是，我们还可以将之简化为刚-弹耦合体，用来研究大范围的刚体运动和弹性变形的耦合运动，研究刚-弹耦合动力学。图中，e 坐标系为总体坐标系，一般设为惯性坐标系；b 坐标系为局部（连体）坐标系，坐标原点位于质心，一般设为非惯性坐标系。

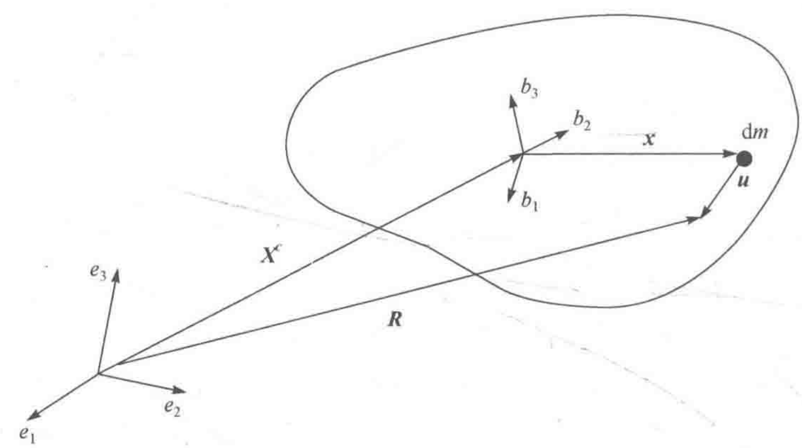

图 1.1　e 坐标系和 b 坐标系

由图 1.1 可见，物体内任意一点总矢径为 $\boldsymbol{R}=\boldsymbol{X}^c+\boldsymbol{x}+\boldsymbol{u}$，其中，$\boldsymbol{X}^c$ 为质心矢径，$\boldsymbol{x}$ 是把物体视为刚体时由质心到刚体中任意一点的矢径，$\boldsymbol{u}$ 为把物体视为变形体时该点的弹性位移，而 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{X}^c+\boldsymbol{x}$。将物体视为刚体时的转角为 $\boldsymbol{\theta}$，可以认为是伪坐标。可见，该物体为刚-弹耦合体（或者称为刚-弹耦合系统），对于刚-弹耦合体而言，除了刚体速度 $\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{X}}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{X}^c}{\mathrm{d}t}+\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t}$ 外，还有变形体速度 $\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial t}+\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{\theta}}{\mathrm{d}t}\times\boldsymbol{u}$（其中，$\times$ 是矢量的叉乘符号），这里应当注意到变形体速度与刚体转动的交联。应用 Coriolis 转动坐标定理，注意到我们的力学模型中，矢量 $\boldsymbol{x}$ 的模为刚体中质心到任意点的距离，而刚体中任意两点间的距离都是常量，因此 $\dfrac{\partial\boldsymbol{x}}{\partial t}=0$，故有

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial\boldsymbol{x}}{\partial t}+\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\theta}}{\mathrm{d}t}\times\boldsymbol{x}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\theta}}{\mathrm{d}t}\times\boldsymbol{x}$$

总之