概率论与数理统计

主　编　吴月柱　李上钊
副主编　姜　伟　王志伟　崔召磊

科学出版社

概率论与数理统计

主　编　吴月柱　李上钊
副主编　姜　伟　王志伟　崔召磊

科学出版社
北　京

内 容 简 介

本书主要内容包括随机事件与概率、一维随机变量及其分布、多维随机变量及其分布、随机变量的数字特征、大数定律及中心极限定理、数理统计的基本概念、参数估计、假设检验、方差分析和一元回归分析等. 全书注重理论与应用相结合，强调直观性、准确性和应用性.

本书可作为高等学校对理论证明要求不高的理科、工科和经管等专业的教材.

图书在版编目（CIP）数据

概率论与数理统计 / 吴月柱　李上钊主编. —北京：科学出版社，2017.1
ISBN 978-7-03-050629-0

Ⅰ. ①概…　Ⅱ. ①吴…　②李…　Ⅲ. ①概率论　②数理统计　Ⅳ. ①O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2016）第 272961 号

责任编辑：李淑丽　李香叶 / 责任校对：桂伟利
责任印制：赵　博 / 封面设计：华路天然工作室

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com
保定市中画美凯印刷有限公司印刷
科学出版社发行　各地新华书店经销
*
2017 年 2 月第　一　版　开本：720 × 1000　1/16
2017 年 2 月第一次印刷　印张：14 1/2
字数：300 000

定价：32.00 元

（如有印装质量问题，我社负责调换）

前　言

概率论与数理统计是研究和揭示随机现象统计规律性的数学学科. 随机现象的普遍性使得概率论与数理统计在自然科学、社会科学、工程技术、工农业生产等领域中得到了广泛的应用. 因此, “概率论与数理统计”成为高等学校绝大多数本科专业中的一门重要的基础理论课.

目前, 我国高等教育已进入大众化阶段, 为适应普通本科院校应用型人才培养需求, 结合教育部高等学校数学与统计学教学指导委员会制定的工科类和经管类本科数学基础课程教学基本要求, 我们编写了本书.

结合多年的教学实践并参考国内众多教材, 在保持传统教材的基础上, 本书对知识体系进行了适当的调整和优化. 其重点介绍概率论与数理统计的基本概念、基本理论和基本方法, 注重理论与应用相结合, 强调直观性、准确性和应用性. 在内容上删除了一些过于繁琐的推理和计算, 在表述上大多从具体问题入手. 习题按章节配置, 部分习题有一定的难度, 可满足不同层次读者的需求. 本书可作为高等学校对理论证明要求不高的理科、工科和经管等专业的教材.

本书编写工作分工如下: 李上钊(第 1, 4 章)、姜伟(第 2, 3 章)、吴月柱(第 5, 6 章)、王志伟(第 7, 8 章)、崔召磊(第 9, 10 章). 本书在编写过程中得到了校内许多同事的帮助和支持, 在此一并表示衷心感谢.

由于编者水平有限, 书中错误及疏漏之处在所难免, 恳请读者批评指正.

编　者

2016 年 9 月

目　　录

第 1 章　随机事件与概率

本章介绍概率论的一些基本概念: 随机事件、概率、条件概率及独立性等, 这些概念将在后面学习中反复使用.

1.1　随机事件及其运算

自然界和人类社会存在两类现象: 一类是在一定条件下必然发生的现象, 称为**确定性现象**. 比如“太阳不会从西边升起”“水从高处流向低处”, 这类现象的特征是条件完全决定结果. 另一类是在一定条件下可能出现也可能不出现的现象, 称为**随机现象**. 比如“在相同条件下掷一枚均匀的硬币, 观察正反两面出现的情况”“明天的天气可能是晴, 也可能是多云或雨”. 这类现象的特征是条件不能完全决定结果. 随机现象在一次观察或测量中是否发生呈现偶然性, 但在多次重复观察或测量中则表现为一定的统计规律性. 随机现象的这种统计规律性是通过随机试验来研究的.

1.1.1　随机试验

在概率论中, 试验是指对随机现象的观察或测量. 一个试验若满足条件:

(1) 可在相同条件下重复进行;

(2) 试验的全部可能结果(不止一个), 在试验前就明确;

(3) 一次试验结束之前, 不能准确预知哪一个结果会出现, 称这样的试验为**随机试验**, 记为 E.

以下是一些随机试验的例子:

E_1: 抛一枚硬币, 观察哪一面朝上;

E_2: 将一枚硬币连续抛两次, 观察正面出现的次数;

E_3: 在一批灯泡中任意抽取一只, 测试它的寿命;

E_4: 在某一批产品中依次选取两件, 观察正品的件数;

E_5: 在某一批产品中依次选取两件, 观察正品、次品出现的情况.

但“观察某地明天的气温”不是随机试验, 因为它不能在相同条件下重复. 无特殊说明, 本书以后所提到的试验都是指随机试验.

1.1.2 样本空间与随机事件

随机试验 E 的所有可能结果组成的集合，称为 E 的**样本空间**，记为 Ω．试验 E 的每个结果，即样本空间的每一个元素称为 E 的一个**样本点**，用 ω 表示．

例 1.1.1 写出上面所列举的随机试验 $E_i\,(i=1,2,\cdots,5)$ 的样本空间．

(1) 试验 E_1 的样本空间为 $\Omega_1=\{正面, 反面\}$．

(2) 试验 E_2 的样本空间为 $\Omega_2=\{0, 1, 2\}$．

(3) 试验 E_3 的样本空间为 $\Omega_3=\{\omega\,|\,\omega\geqslant 0\}$，这是一个无限区间．

(4) 试验 E_4 的样本空间为 $\Omega_4=\{0, 1, 2\}$．

(5) 试验 E_5 的样本空间为

$$\Omega_5=\{(正品,正品),(正品,次品),(次品,正品),(次品,次品)\}.$$ □

随机试验的若干个结果组成的集合称为**随机事件**，简称事件．一般用大写字母 A, B, C 等表示．只含一个试验结果的事件称为**基本事件**．也就是说，事件是样本空间 Ω 的子集，基本事件只包含一个样本点．

在每次试验中，当且仅当事件 A 所包含的某个样本点出现时，称**事件 A 发生**．

样本空间 Ω 有两个特殊的子集：一个是 Ω 本身，每次试验它总是发生，称为**必然事件**；另一个子集是 $\varnothing$，每次试验它都不发生，称为**不可能事件**．

例 1.1.2 E：抛掷一枚骰子，观察出现的点数，则样本空间为 $\Omega=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$；

$A=$ "出现 2 点"，即 $A=\{2\}$，是一个基本事件；

$B=$ "出现偶数点" 即 $B=\{2, 4, 6\}$，是一个事件；

$C=$ "出现奇数点" 即 $C=\{1, 3, 5\}$，是一个事件；

$D=$ "点数不大于 6"，即 $D=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$，是必然事件；

$F=$ "点数大于 6"，是不可能事件 $\varnothing$．

如果在抛掷一枚骰子后，出现点数 2，则事件 A, B, D 都发生；如果出现点数 5，则事件 C, D 发生，但 A, B 都不发生．

1.1.3 随机事件之间的关系及运算

对于一个随机试验来说，有很多随机事件．我们希望通过对较简单事件规律的研究去掌握更复杂事件的规律．为此，需要研究事件之间的关系和运算．事件是一个集合，因此我们可利用集合论的知识来研究事件之间的关系及其运算．

设试验 E 的样本空间为 Ω，$A, B, C, A_k\,(k=1,2,\cdots)$ 都是事件．

1. 事件的包含

如果事件 A 发生必然导致事件 B 发生，则称事件 B **包含**事件 A，或称事件 A **包含于**事件 B (图 1-1)，记为 $A\subset B$．在例 1.1.2 中，显然有 $A\subset B$．

对任一事件 A，必有 $\varnothing\subset A\subset\Omega$．

2. 事件的相等

若 $A\subset B$ 且 $B\subset A$，则称事件 A 与事件 B **相等**，记为 $A=B$．

3. 事件的和(并)

事件 A 与事件 B 至少有一个发生的事件，称为事件 A 与 B 的**和(并)**，记为 $A\cup B$ (图 1-2)．在例 1.1.2 中，$B\cup C=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$．

n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 中至少有一个发生的事件，称为 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的和(并)，记作 $\bigcup\limits_{k=1}^{n}A_k$；

可列无限个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 中至少有一个发生的事件，称为 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 的和(并)，记作 $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}A_k$．

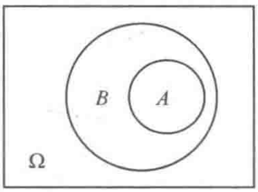

图 1-1

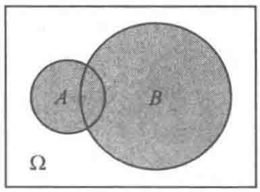

图 1-2

4. 事件 A 与 B 的积(交)

事件 A 与 B 同时发生的事件，称为事件 A 与 B 的**积(交)**(图 1-3)，记作 $A\cap B$ 或 AB．在例 1.1.2 中，$AB=\{2\}$．

n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 中每一个事件都发生的事件，称为 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的积(交)，记作 $\bigcap\limits_{k=1}^{n}A_k$；

可列无限个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 中每一个事件都发生的事件，称为 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 的积(交)，记作 $\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}A_k$．

5. 事件 A 与 B 的差

事件 A 发生而 B 不发生这一事件，称为事件 A 与 B 的**差**(图 1-4)，记作 $A-B$. 在例 1.1.2 中，$D-C=\{2,4,6\}$.

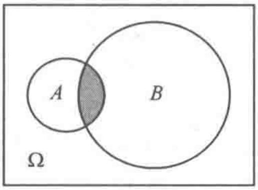

图 1-3

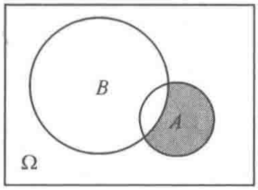

图 1-4

6. 事件的互不相容(互斥)

事件 A 与事件 B 不能同时发生这一事件，即 $AB=\varnothing$ (图 1-5)，称 A 与 B **互不相容(互斥)**. 在例 1.1.2 中，事件 A 与 C，B 与 C 都是互不相容的.

显然，基本事件是两两互不相容的.

7. 事件的对立

事件 A 不发生这一事件，称为事件 A 的**对立事件**或**逆事件**(图 1-6)，记作 $\overline{A}$. 在例 1.1.2 中，事件 B 是 C 的对立事件，但事件 A 不是 C 的对立事件.

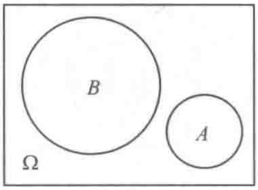

图 1-5

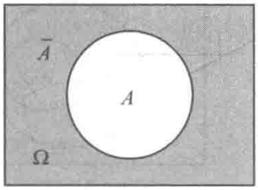

图 1-6

由于 A 也是 $\overline{A}$ 的对立事件，所以称事件 A 与 $\overline{A}$ 为互逆事件. 又 $A\cap\overline{A}=\varnothing$，$A\cup\overline{A}=\Omega$，因此每次试验中，事件 A, $\overline{A}$ 中有且仅有一个发生. 显然有

(1) $\overline{\overline{A}}=A$，$\overline{\Omega}=\varnothing$，$\overline{\varnothing}=\Omega$；

(2) A 与 B 对立事件的充分必要条件是 $A\cup B=\Omega$ 且 $AB=\varnothing$.

例 1.1.3 设 A, B, C 是某个随机现象的三个事件，则

(1) 事件“A 发生”可表示为：A.

(2) 事件“只有 A 发生”可表示为：$A\overline{B}\,\overline{C}$.

(3) 事件“三个事件都发生”可表示为：ABC.

(4) 事件“三个事件中至少有两个发生”可表示为: $AB\cup AC\cup BC$.

(5) 事件“三个事件中恰好有两个发生”可表示为: $AB\overline{C}\cup AC\overline{B}\cup BC\overline{A}$.

(6) 事件“三个事件都不发生”可表示为: $\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$.

(7) 事件“三个事件中不多于两个发生”可表示为: $\overline{A}\cup\overline{B}\cup\overline{C}$.

(8) 事件“三个事件中不多于一个发生”可表示为: $\overline{A}\,\overline{B}\cup\overline{A}\,\overline{C}\cup\overline{B}\,\overline{C}$. □

事件运算满足下述规律, 证明从略.

(1) **交换律**　$A\cup B=B\cup A$, $AB=BA$.

(2) **结合律**　$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$, $(AB)C=A(BC)$.

(3) **分配律**　$(A\cup B)\cap C=AC\cup BC$, $(A\cap B)\cup C=(A\cup C)(B\cup C)$.

(4) **对偶律(德·摩根律)**　$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$, $\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$.

德·摩根律可推广至 n 个及可列个事件的情形:

$$\overline{\bigcup_{i=1}^{n}A_i}=\bigcap_{i=1}^{n}\overline{A_i},\quad \overline{\bigcap_{i=1}^{n}A_i}=\bigcup_{i=1}^{n}\overline{A_i},$$

$$\overline{\bigcup_{i=1}^{+\infty}A_i}=\bigcap_{i=1}^{+\infty}\overline{A_i},\quad \overline{\bigcap_{i=1}^{+\infty}A_i}=\bigcup_{i=1}^{+\infty}\overline{A_i}.$$

习题 1-1

1. 写出下列随机试验的样本空间:

(1) 同时抛掷两颗骰子, 记录两颗骰子点数之和;

(2) 50 人的班级举行一次数学考试, 已知最高分 100 分, 最低分 60 分, 记录该班的平均成绩;

(3) 某人对靶标射击, 直到有 5 次击中为止, 记录射击的总次数;

(4) 将长为 1 米的绳剪成两段, 记录两段的长度;

(5) 平面直角坐标系中, 在以原点为圆心的单位圆内任意取一点, 记录它的坐标;

(6) 对一批产品进行检验, 合格的记为 1, 不合格的记为 0. 如果连续查出 2 个次品就停止检查, 如果检查了 4 个产品也停止检查, 记录检查的结果.

2. 袋中有 10 个分别编有号码 1 至 10 的球, 从中任取 1 球, 设 $A=\{$取得球的号码是偶数$\}$, $B=\{$取得球的号码是奇数$\}$, $C=\{$取得球的号码小于 5$\}$, 问下列运算表示什么事件:

(1) $A\cup B$; (2) AB; (3) AC; (4) $\overline{AC}$; (5) $\overline{A}\,\overline{C}$; (6) $\overline{B\cup C}$; (7) $A-C$.

3. 在数学系的学生中任选一名学生, 令事件 A 表示被选学生是男生, 事件 B 表示被选学生是三年级学生, 事件 C 表示该生是运动员.

(1) 叙述 $AB\overline{C}$ 的意义.

(2) 在什么条件下 $ABC=C$ 成立?

(3) 什么条件下关系式 $C\subset B$ 成立?

(4) 什么条件下 $\overline{A}=B$ 成立?

4. 连续进行三次射击，设 $A_i=\{$第 i 次射击命中$\}$，$i=1,2,3$，$B=\{$三次射击恰好命中两次$\}$，$C=\{$三次射击至少命中两次$\}$，试用 A_i 表示 B 和 C.

5. 指出下列命题中哪些成立，哪些不成立，并说明理由.

(1) $A\cup B=A\overline{B}\cup B$；　　(2) $A\cup B=\overline{A}B$；

(3) $(\overline{A\cup B})C=\overline{A}\overline{B}C$；　　(4) $(AB)(A\overline{B})=\varnothing$；

(5) $A-AB=A-B$；　　(6) 若 $C\subset A$，则 $A\cup(B-C)=A\cup B$；

(7) $A(B-C)=AB-AC$；　　(8) $A\cup(B-C)=A\cup B-A\cup C$.

6. 若事件 A,B,C 满足 $A\cup B=A\cup C$，试问 $B=C$ 是否成立？举例说明.

1.2　随机事件的概率

随机试验中的随机事件，可能发生，也可能不发生，人们不能事先知道，但它们发生的可能性大小却是客观存在的. 例如，购买彩票中头奖的可能性远远小于中尾奖的可能性. 概率正是描述随机事件发生可能性大小的量.

1.2.1　概率的统计定义

定义 1.2.1　在相同的条件下进行 n 次试验，事件 A 发生的次数 n_A 称为事件 A 发生的**频数**，比值 $\frac{n_A}{n}$ 称为事件 A 发生的**频率**，记作 $f_n(A)$.

由定义，易知频率 $f_n(A)$ 具有以下性质：

(1) $0\leqslant f_n(A)\leqslant 1$;

(2) $f(\Omega)=1, f(\varnothing)=0$;

(3) 设 $A_1, A_2, \cdots, A_k$ 是两两互不相容的事件，则

$$f(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_k)=f_n(A_1)+f_n(A_2)+\cdots+f_n(A_k).$$

由定义可知，频率反映了一个随机事件在大量重复试验中发生的频繁程度. 频率越大，事件 A 发生就越频繁，在一次试验中 A 发生的可能性就越大，也就是说，事件 A 发生的概率就越大.

历史上曾经有一些著名统计学家做过抛掷硬币的试验，以观察出现正面的次数，其结果如表 1-1 所示.

表 1-1　历史上抛硬币试验

实验者	棣莫弗	蒲丰	费勒	皮尔逊	皮尔逊
抛掷次数 n	2048	4040	10000	12000	24000
正面向上的次数 n_A	1061	2048	4979	6079	12012
正面向上的频率 f_n	0. 518	0. 5069	0. 4979	0. 5016	0. 5005

试验表明：抛掷一枚均匀硬币时，在一次试验中虽然不能确定是出现正面还是反面，但大量重复试验时，发现出现正面和反面的次数大致相等，即出现正面的频率大致为 0.5，并且随着试验次数的增加，频率稳定于 0.5.

人们经过长期的实践发现，随着试验次数 n 的增大，频率 $f_n(A)$ 总在某一常数的附近摆动，并且出现较大偏差的可能性很小，即稳定在该常数附近，我们称频率的这一性质为**频率的稳定性**. 频率的这种稳定性可以用来刻画随机事件的概率.

定义 1.2.2 (概率的统计定义)　在相同条件下重复进行 n 次试验，若事件 A 发生的频率 $f_n(A)=\dfrac{n_A}{n}$ 随着试验次数 n 的增大而稳定在某个常数 p ($0\leqslant p\leqslant 1$)附近，则称 p 为事件 A 的**概率**，记为 $P(A)$.

根据概率的统计定义，当重复试验的次数充分大时，频率可以近似地表示事件发生的概率. 但是实际生活中有些试验不可重复进行，即使可重复地进行试验，也不可能对每一个事件进行大量的试验. 因此概率的统计定义有局限性，不是一个严格的数学定义. 1933 年，苏联数学家柯尔莫哥洛夫提出了概率论的公理化定义，给出了概率的严格定义，使概率论有了迅速的发展.

1.2.2　概率的公理化定义

定义 1.2.3　设 Ω 为随机试验 E 的一个样本空间，对于 Ω 中每个事件 A 都对应一个实数值 $P(A)$，若 $P(A)$ 满足：

(1) **非负性**　$P(A)\geqslant 0$；

(2) **规范性**　$P(\Omega)=1$；

(3) **可列可加性**　若 $A_1,A_2,\cdots$ 两两互不相容，有

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\right)=\bigcup_{i=1}^{\infty}P(A_i),$$

则称 $P(A)$ 为事件 A 的**概率**.

由概率的公理化定义可以导出下列性质.

性质 1.2.1　$P(\varnothing)=0$.

证　设 $A_n=\varnothing\ (n=1,2,\cdots)$，则 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n=\varnothing$ 且 $A_iA_j=\varnothing,\ i\neq j$. 由概率的可列可加性得

$$P(\varnothing)=P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right)=\sum_{n=1}^{\infty}P(A_n)=\sum_{n=1}^{\infty}P(\varnothing),$$

由于 $P(\varnothing)\geqslant 0$，故 $P(\varnothing)=0$.　□

性质 1.2.2 (有限可加性)　设 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是两两互不相容的事件，则

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n).$$

证 令 $A_{n+1} = A_{n+2} = \cdots = \varnothing$，则 $A_i A_j = \varnothing,\ i \neq j,\ i, j = 1, 2, \cdots$.

由概率的可列可加性得

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = P\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} P(A_k)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} P(A_k) + 0 = P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n).$$ □

性质 1.2.3 设 A, B 为两事件，且 $A \subset B$，则

$$P(A) \leqslant P(B), \quad P(B - A) = P(B) - P(A).$$

证 因为 $A \subset B$，所以 $B = A \cup (B - A)$ 且 $(B - A) \cap A = \varnothing$. 由概率的有限可加性得 $P(B) = P(A) + P(B - A)$，于是

$$P(B - A) = P(B) - P(A).$$

又因 $P(B - A) \geqslant 0$，故 $P(A) \leqslant P(B)$. □

因为 $A - B = A - AB$，由性质 1.2.3 得如下推论.

推论 1.2.1 (减法公式) $P(A - B) = P(A) - P(AB)$.

性质 1.2.4 设 $\overline{A}$ 是 A 的对立事件，则 $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.

证 因为 $A \cup \overline{A} = \Omega,\ A \cap \overline{A} = \varnothing,\ P(\Omega) = 1$，由概率的有限可加性得

$$1 = P(\Omega) = P(A \cup \overline{A}) = P(A) + P(\overline{A}),$$

于是

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A).$$ □

性质 1.2.5 (加法公式) 对于任意两事件 A, B，有

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB).$$

证 因为 $A \cup B = A \cup (B - AB)$，且 $A \cap (B - AB) = \varnothing$，$AB \subset B$，由概率的有限可加性及减法公式得

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B - AB) = P(A) + P(B) - P(AB).$$ □

可将加法公式推广为三个及 n 个事件和的情形：

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) - P(A_1 A_2) - P(A_2 A_3) - P(A_1 A_3) + P(A_1 A_2 A_3). \tag{1.2.1}$$

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} P(A_i A_j) + \sum_{1 \leqslant i < j < k \leqslant n} P(A_i A_j A_k) + \cdots + (-1)^{n-1} P(A_1 A_2 \cdots A_n). \tag{1.2.2}$$

例 1.2.1　设事件 A,B 的概率分别为 $\frac{1}{3}$ 和 $\frac{1}{2}$，求在下列三种情况下 $P(B\overline{A})$ 的值：

(1) A 与 B 互斥；(2) $A\subset B$；(3) $P(AB)=\frac{1}{8}$.

解　(1) 因为 A 与 B 互斥，故 $B\overline{A}=B(\Omega-A)=B-BA=B$，从而

$$P(B\overline{A})=P(B)=\frac{1}{2}.$$

(2) 因为 $A\subset B$，故 $P(B\overline{A})=P(B)-P(A)=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$.

(3) 因为 $B\overline{A}=B-BA$，$BA\subset B$，所以

$$P(B\overline{A})=P(B)-P(AB)=\frac{1}{2}-\frac{1}{8}=\frac{3}{8}.$$ □

例 1.2.2　已知 $P(A)=P(B)=P(C)=\frac{1}{3}$，$P(AB)=P(BC)=\frac{1}{8}$，$P(AC)=0$，则 A,B,C 中至少有一个发生的概率是多少？A,B,C 都不发生的概率是多少？

解　因为 $P(AC)=0$，而 $ABC\subset AC$，所以由概率的性质 1.2.3 知，$P(ABC)=0$. 再由式(1.2.1)得 A,B,C 中至少有一个发生的概率为

$$\begin{aligned}P(A\cup B\cup C)&=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)\\&=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{8}-0-\frac{1}{8}+0\\&=1-\frac{2}{8}=\frac{3}{4},\end{aligned}$$

从而 A, B, C 都不发生的概率为 $1-P(A\cup B\cup C)=\frac{1}{4}$. □

习题 1-2

1. 设事件 A,B 互不相容，$P(A)=p,P(B)=q$，试求

$$P(A\cup B),P(AB),P(A\cup\overline{B}),P(A\cap\overline{B})\text{ 及 }P(\overline{A}\cap\overline{B}).$$

2. 某人外出旅游两天，据天气预报，第一天下雨的概率是 0.6，第二天下雨的概率为 0.3，两天都下雨的概率为 0.1，试求

(1) 第一天下雨而第二天不下雨的概率；

(2) 第一天不下雨而第二天下雨的概率；

(3) 至少有一天下雨的概率；

(4) 两天都不下雨的概率；

(5) 至少有一天不下雨的概率.

3. 设 A,B,C 是三个随机事件，已知

$$P(A)=P(B)=P(C)=\frac{1}{3},\quad (AB)=P(BC)=P(AC)=\frac{1}{9},\quad P(ABC)=\frac{1}{27}.$$

(1) 计算 A,B,C 中至少有一个发生的事件的概率;

(2) 计算 A,B,C 中至少有两个发生的事件的概率;

(3) 计算 A,B,C 中只有一个发生的事件的概率.

4. 已知 $A\subset B$，$P(A)=0.4$，$P(B)=0.6$，求

(1) $P(\overline{A})$，$P(\overline{B})$； (2) $P(A\cup B)$； (3) $P(AB)$； (4) $P(\overline{B}A)$，$P(\overline{A}\ \overline{B})$； (5) $P(\overline{A}B)$.

5. 设 A,B 是两个事件，已知 $P(A)=0.5$，$P(B)=0.7$，$P(A\cup B)=0.8$，试求 $P(A-B)$ 及 $P(B-A)$.

6. 设 A,B 是两事件且 $P(A)=0.6$，$P(B)=0.7$. 问:

(1) 在什么条件下 $P(AB)$ 取到最大值, 最大值是多少?

(2) 在什么条件下 $P(AB)$ 取到最小值, 最小值是多少?

1.3　古典概型与几何概型

随机试验的形式多种多样, 本节讨论两类比较简单的随机试验, 它们在实际生活中具有广泛的应用.

1.3.1　古典概型

前面所讨论的随机试验的例子中, 如抛均匀硬币、掷均匀骰子, 它们具有两个共同特点:

(1) **有限性**　试验的样本空间只包含有限个元素.

(2) **等可能性**　在每次试验中, 每个基本事件发生的可能性相同.

具有以上两个特点的随机试验称为**等可能概型**. 它在概率论发展的初期曾是主要的研究对象, 所以也称为**古典概型**.

设古典概型的样本空间为 $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n\}$，因为每个基本事件发生的概率相同, 所以

$$P(\{\omega_1\})=P(\{\omega_2\})=\cdots=P(\{\omega_n\}).$$

又因为基本事件两两不相容, 由概率的公理化定义和性质得

$$\begin{aligned}1=P(\Omega)&=P(\{\omega_1\}\cup\{\omega_2\}\cup\cdots\cup\{\omega_n\})\\&=P(\{\omega_1\})+P(\{\omega_2\})+\cdots+P(\{\omega_n\})=nP(\{\omega_i\}),\end{aligned}$$

于是

$$P(\{\omega_i\})=\frac{1}{n},\quad i=1,2,\cdots,n.$$