



自主创新  
方法先行

# 线性代数及其应用

(第二版)

李乃华 安建业 罗蕴玲 赵俊英 编著

高等教育出版社



自主创新  
方法先行

# 线性代数及其应用

(第二版)

李乃华 安建业 罗蕴玲 赵俊英 编著

XIANXING DAISHU JIQI YINGYONG

高等教育出版社·北京

## 内容提要

本书基本内容是依据最新的“经济和管理类本科数学基础课程教学基本要求”确定的。全书分为五章,内容包括行列式、矩阵、向量、线性方程组、矩阵的对角化、二次型。

本书在保持内容系统性和完整性的基础上,融入了数学软件 Mathematica 的有关内容,并以 Mathematica 软件为基础介绍线性代数的实际应用,使得学习者在学习相关理论的基础上,可以轻松完成复杂计算和分析,实现理论与实践的结合;同时本书还为学习者配置了数字化资源,包括重点难点讲解、相关定理证明、教学演示实验、数学家小传、上机实验讲解、习题答案与提示等开放资源,便于学习者自主学习,提升学习效果。学习者可通过扫描相应二维码或登录易课程平台,方便地获取相应的资源。

本书可作为高等学校经济和管理类本科专业教材,也可作为其他非数学类本科专业教材或参考书。

## 图书在版编目(CIP)数据

线性代数及其应用 / 李乃华等编著. --2 版. --北京:高等教育出版社,2016.9

ISBN 978-7-04-045741-4

I. ①线… II. ①李… III. ①线性代数-高等学校-教材 IV. ①O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2016)第 139709 号

|      |     |      |     |      |    |      |    |
|------|-----|------|-----|------|----|------|----|
| 策划编辑 | 贾翠萍 | 责任编辑 | 贾翠萍 | 封面设计 | 张楠 | 版式设计 | 张楠 |
| 插图绘制 | 黄建英 | 责任校对 | 李大鹏 | 责任印制 | 韩刚 |      |    |

|      |                  |      |                                                                   |
|------|------------------|------|-------------------------------------------------------------------|
| 出版发行 | 高等教育出版社          | 网 址  | <a href="http://www.hep.edu.cn">http://www.hep.edu.cn</a>         |
| 社 址  | 北京市西城区德外大街 4 号   |      | <a href="http://www.hep.com.cn">http://www.hep.com.cn</a>         |
| 邮政编码 | 100120           | 网上订购 | <a href="http://www.hepmall.com.cn">http://www.hepmall.com.cn</a> |
| 印 刷  | 保定市中国美凯印刷有限公司    |      | <a href="http://www.hepmall.com">http://www.hepmall.com</a>       |
| 开 本  | 787mm×960mm 1/16 |      | <a href="http://www.hepmall.cn">http://www.hepmall.cn</a>         |
| 印 张  | 19.5             | 版 次  | 2010 年 8 月第 1 版                                                   |
| 字 数  | 300 千字           |      | 2016 年 9 月第 2 版                                                   |
| 购书热线 | 010-58581118     | 印 次  | 2016 年 9 月第 1 次印刷                                                 |
| 咨询电话 | 400-810-0598     | 定 价  | 29.60 元                                                           |

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换

版权所有 侵权必究

物 料 号 45741-00

高等学校大学数学教学研究与发展中心  
项目研究成果

# 致 读 者

古语道：“授人以鱼，不如授人以渔”，说的是与其传授知识，不如传授获取知识的方法与能力。这正是我们编写本教材的初衷。那么，本教材何以能“授人以渔”？

## 一、“从实际中来，到实际中去”，授人以“用数学的意识”

如果把数学形象地比作一条鱼，那么本教材一改通常教材“掐头去尾、只烧中段”的做法，努力让读者能品尝“全鱼”之美味，了解数学的源头与去向，领略数学的威力，培养用数学的意识。

在概念的引入上，从实际问题出发，力求通过创设现实情境，使读者感受到数学就在自己身边，体会到数学的应用价值，树立用数学的信念；在公式推导或定理证明上，做到适可而止，避免将鲜活的思维淹没在复杂的推导与证明过程中；在计算的方法上，淡化繁难的技巧，尽可能通过简单的题目讲授一般的解题思路与方法；在理论讲授结束后，又回到实际应用中去，选择贴近生活的相关实例，运用数学符号、数学式子以及数量关系建立相应的数学模型，对其本质特性进行分析，将用数学的意识落到实处。

每一章的开篇之语，将内隐于概念、定理、公式等数学知识中的数学思想，进行了精心提炼，便于读者更好地领悟这些思想的精髓，增强用数学的意识。

## 二、挖掘信息技术的潜力，授人以“用数学的能力”

伴随着信息技术的发展，数学插上了腾飞的翅膀，无论从应用的深度还是在拓展的广度上，都有了质的飞跃。为此，本教材将信息技术与大学数学知识相融合，借助于信息技术，增强用数学的能力。

为了准确理解抽象的数学概念、定理或公式，并应用其解决实际问题，我们研制了教学演示实验，读者可以方便地通过改变这些演示实验中各种控制参数的数值，直观、形象地领会其中的数学思想，这是用好数学的基础。

为了更好地借助计算机解决繁难的计算问题和应用问题，每章都设置了 Mathematica 软件的内容，一方面介绍如何运用数学软件求解该章涵盖

的符号演算、科学计算、绘制图形等问题,另一方面选取具有代表性的应用实例,读者通过自主探究与实验,可强化其数学软件的应用技能,提高用数学的能力。

### 三、围绕“发现问题、分析问题、解决问题”这条主线,授人以“学数学的能力”

较强的学习能力是成功人士必备的素质。为此,我们围绕“发现问题、分析问题、解决问题”这条主线,精心设计教材的每一个环节,并编写了配套的辅助教材《伴你学数学——线性代数及其应用导学(第二版)》及数字化资源,为提高读者自主学习数学的能力而不懈努力。

例如,导学教材中的“问题搜索”栏目,不仅让读者带着问题去预习,而且希望读者在学习的过程中提出问题,力求培养读者发现问题的能力;教材中的“停下来想一想”板块,旨在让读者在学习过程中主动思考,养成善于分析的良好习惯,力求培养分析问题的能力;教材中有关“应用”的章节内容和导学教材中的“探究与应用”栏目,或者为读者提供了解决问题的范例,或者需读者对精选的典型问题自主探究,目的都是培养其解决问题的能力。

为便于读者学习,本教材配备了丰富的数字化资源,包括重点难点讲解、相关定理证明、教学演示实验、数学家小传、上机实验讲解、习题答案与提示等,学习者通过扫描相应二维码或登录易课程平台,即可获取这些资源。

同时,本书还配有电子教案,可与作者联系获取,电子邮箱是:lxylnh@tjcu.edu.cn.

总之,授人以鱼,三餐之需;授人以渔,终生之用。希望您细细品味其中的道理。

## 第二版前言

本教材自 2010 年出版至今已经 6 年,结合 6 年的教学改革实践及同行和使用者的意见和建议,我们对第一版教材进行了修订。

本次教材修订遵循了下面四条原则:

1. 依照《大学数学课程教学基本要求(2014 年版)》,更加突出本教材面向经济和管理类本科各专业学生的定位;

2. 按照精品教材的要求,在保持本书第一版的优点和特色的基础上,从结构的编排和内容的选材上,更加注重“学数学的能力”、“用数学的意识”和“用数学的能力”的培养;

3. 充分考虑当今教学改革中分层教学的需要,采用“纸质教材+纸质导学教材+数字化资源”形式,学习者可以通过扫描相应的二维码或登录易课程平台,方便地获取相应的资源;

4. 在习题配置方面,充分吸收国内外一些优秀教材的优点,增加概念题、图形题、匹配题、分析题的题量,同时在每章最后增设了复习题。

为便于学习者全面了解本教材的特色和有效地使用本教材,增设了寄语学习者专栏——致读者。

本版教材的修订工作由李乃华、安建业、罗蕴玲、赵俊英完成。在此,对提出宝贵意见和建议的同行和使用者表示真诚的谢意!欢迎广大同行和使用者继续提出宝贵意见。

编著者

2016 年 3 月

# 第一版前言

随着科学技术的迅猛发展,数量分析已渗透到人文科学、社会科学和自然科学等各个领域,数学的重要性为社会所公认,数学的普及也越来越广泛;与此同时,由于计算机技术的普及与提高,繁难的数学计算、庞大的数据分析和抽象的数学推理已不再是高不可攀,数学的应用也越来越深入。伴随着社会对人的素质要求的不断提高,数学素质教育已成为公民教育的必修课。

为适应新形势下社会发展的需要,作为天津市优秀教学团队的天津商业大学“大学数学基础课程教学团队”,近年来一直致力于“信息技术与数学课程整合”这一教育教学改革问题的研究与实践,并取得了一些可喜的成果。为了深化教育教学改革的成果,团队教师编著了这套经济管理类本科专业数学基础课程教材,这套教材包括《高等数学及其应用》《线性代数及其应用》和《概率统计及其应用》。

本套教材是科技部项目“科学思维、科学方法在高等学校教学创新中的应用与实践”和高等学校大学数学教学研究中心项目“基于创新人才培养的大学数学课程教学体系的统筹设计与实践”的研究成果。教材内容涵盖了教育部数学基础课程教学指导分委员会对经济管理类各本科专业三门数学基础课程教学内容的全部要求,并力求体现以下特点:

## 1. 传统与现代融合

数学基础知识、多媒体技术、计算机应用软件三者有机融合。以数学为本,辅之多媒体技术使抽象概念可视化、静态图形动态化,辅之计算机应用软件使复杂计算窗口化,使过去靠手工难以完成的绘图、数据分析和模拟逼近等,可以轻松自如地实现。多媒体技术、计算机应用软件融入数学基础知识学习中,调动了学生学习数学的兴趣,促进学生数学素质的提高。

## 2. 知识与能力并重

适时插入“停下来想一想”注释,通过设疑、提醒、警示、猜想、归纳、推广(条件与结论变更)、理清关系、总结思路等方法,或引出新的思考,或提出更深层次、更广范围的问题,把对内容的理解引向深入,让学生回味和联

想,帮助学生掌握知识重点、领会问题本质,引导学生自觉思考,开拓学生的思路和视野,启迪学生发现、分析和解决问题,激发学生的求知欲,培养学生的创新意识和自主学习能力。

### 3. 理论与应用兼备

理论的准确理解是实际正确应用的基础,实际应用又是对理论理解的深化。教材以实际问题为背景,将数学建模思想融入其中,在概念阐述上,做到通俗易懂,举例贴近生活;在理论阐述上,做到讲清楚数学思想和原理,讲明白应用的条件、方法和结果(解释);在应用案例上,做到生活化、大众化、科学化,力求使学生消除对数学的陌生感、抽象感、恐惧感,树立学生学好数学、用好数学的信心。

### 4. 基础与提高共存

例题选择做到少而精,重在有代表性,重在对概念的理解掌握和思维方法的培养。教材习题配置做到数量适宜、难度合理、循序渐进,每节后习题均分为A、B两组。A组是基本题,是对课程的基本要求,要求学生必须完成;B组是提高题,大部分题目是历届全国硕士研究生入学统一考试试题,是为学有余力的学生准备的,重在综合性,力求通过这些习题加深和拓展教材内容,帮助学生提高综合运用所学知识的能力。此外,习题中有意识地增加了图形题和实际应用题(部分题目需要用计算机来完成),使学生感到数学这门课学了有用、学了会用。

本套教材融入软件,突出技能,实用性强。内容可视化——让读者不再因抽象而烦恼,计算机软件化——让读者不再被繁难所困扰,方法现实化——让读者不再因不知其用而厌学。

本套教材在“做中学、学中悟、悟中醒、醒中行”方面做了有益的尝试。教材中涉及的教学演示实验可在“天津市大学数学精品资源网”下载,也可与作者联系获取,电子邮箱是:lxylnh@tjcu.edu.cn。

天津市教育委员会高教处的领导对本项目的研究给予了热心的指导和资助,在他们的关心和支持下,教学改革得以深化、教学资源得以共研、共建、共享、共赢。高等教育出版社的同志对本书的出版给予了热情的支持。在此,我们一并致以最诚挚的感谢。

天津商业大学理学院长期从事经济管理类专业线性代数课程教学建设的老师们在项目的教学研讨和实践中付出了辛勤劳动,正是由于他们的积极支持和鼓励才使我们以充沛的精力高标准地完成了本书的编著工作。

在此,我们也致以最诚挚的谢意。

我们期盼本套教材能为广大读者带来学数学的轻松、做数学的快乐和用数学的效益。同时,热情欢迎广大读者提出批评与建议,让我们共同为持续提高数学课程的教学质量、发挥数学课程在人才培养中的作用而不懈努力。

编著者

2010.03.18

# 目 录

|                                |     |
|--------------------------------|-----|
| 第 1 章 行列式 .....                | 001 |
| 第 1.1 节 $n$ 阶行列式 .....         | 001 |
| 1. 二阶与三阶行列式 .....              | 001 |
| 2. 排列及其逆序数 .....               | 005 |
| 3. $n$ 阶行列式定义 .....            | 006 |
| 习题 1.1(A) .....                | 009 |
| 习题 1.1(B) .....                | 011 |
| 第 1.2 节 行列式的性质 .....           | 011 |
| 习题 1.2(A) .....                | 017 |
| 习题 1.2(B) .....                | 019 |
| 第 1.3 节 行列式按行(列)展开 .....       | 020 |
| 1. 行列式按一行(列)展开 .....           | 020 |
| * 2. 拉普拉斯定理 .....              | 027 |
| 习题 1.3(A) .....                | 030 |
| 习题 1.3(B) .....                | 032 |
| 第 1.4 节 克拉默法则 .....            | 033 |
| 习题 1.4(A) .....                | 038 |
| 习题 1.4(B) .....                | 039 |
| 第 1.5 节 Mathematica 软件应用 ..... | 040 |
| 1. 相关命令 .....                  | 040 |
| 2. 应用示例 .....                  | 040 |
| 3. 技能训练 .....                  | 042 |
| 复习题 1 .....                    | 043 |
| 第 2 章 矩阵 .....                 | 047 |
| 第 2.1 节 矩阵的概念 .....            | 047 |

|                                   |     |
|-----------------------------------|-----|
| 1. 矩阵的概念 .....                    | 047 |
| 2. 几种特殊的矩阵 .....                  | 050 |
| 习题 2.1(A) .....                   | 053 |
| 习题 2.1(B) .....                   | 053 |
| <b>第 2.2 节 矩阵的基本运算</b> .....      | 054 |
| 1. 矩阵的线性运算 .....                  | 054 |
| 2. 矩阵的乘法 .....                    | 058 |
| 3. 矩阵的转置 .....                    | 062 |
| 4. 方阵的幂 .....                     | 064 |
| 5. 方阵的行列式 .....                   | 068 |
| 6. 方阵的迹 .....                     | 070 |
| 习题 2.2(A) .....                   | 070 |
| 习题 2.2(B) .....                   | 073 |
| <b>第 2.3 节 矩阵的初等变换与初等矩阵</b> ..... | 074 |
| 1. 矩阵的初等变换 .....                  | 074 |
| 2. 初等矩阵 .....                     | 077 |
| 习题 2.3(A) .....                   | 079 |
| 习题 2.3(B) .....                   | 080 |
| <b>第 2.4 节 逆矩阵</b> .....          | 081 |
| 1. 逆矩阵的概念与性质 .....                | 081 |
| 2. 矩阵可逆的条件及求法 .....               | 083 |
| 习题 2.4(A) .....                   | 092 |
| 习题 2.4(B) .....                   | 094 |
| <b>第 2.5 节 矩阵的秩</b> .....         | 096 |
| 1. 矩阵秩的概念 .....                   | 096 |
| 2. 初等变换求矩阵的秩 .....                | 098 |
| 习题 2.5(A) .....                   | 100 |
| 习题 2.5(B) .....                   | 101 |
| <b>第 2.6 节 矩阵的分块</b> .....        | 102 |
| 1. 分块矩阵的概念 .....                  | 102 |
| 2. 分块矩阵的运算 .....                  | 103 |
| 3. 分块对角矩阵 .....                   | 107 |

|                          |     |
|--------------------------|-----|
| 习题 2.6(A)                | 111 |
| 习题 2.6(B)                | 112 |
| 第 2.7 节 Mathematica 软件应用 | 113 |
| 1. 相关命令                  | 113 |
| 2. 应用示例                  | 113 |
| 3. 技能训练                  | 117 |
| 复习题 2                    | 118 |
| 第 3 章 向量 线性方程组           | 122 |
| 第 3.1 节 高斯消元法            | 122 |
| 1. 线性方程组的概念              | 122 |
| 2. 高斯消元法                 | 125 |
| 3. 线性方程组解的判定             | 128 |
| 习题 3.1(A)                | 137 |
| 习题 3.1(B)                | 140 |
| 第 3.2 节 向量组的线性相关性        | 141 |
| 1. $n$ 维向量的概念            | 142 |
| 2. 线性组合与线性表示             | 144 |
| 3. 线性相关与线性无关             | 148 |
| 4. 判定线性相关性的几个定理          | 150 |
| 习题 3.2(A)                | 155 |
| 习题 3.2(B)                | 157 |
| 第 3.3 节 向量组的秩            | 157 |
| 1. 向量组的极大无关组             | 157 |
| 2. 向量组的秩                 | 160 |
| 3. 向量组的秩与矩阵的秩的关系         | 161 |
| 习题 3.3(A)                | 167 |
| 习题 3.3(B)                | 169 |
| * 第 3.4 节 向量空间           | 169 |
| 1. 向量空间的概念               | 169 |
| 2. 基 维数与坐标               | 172 |
| 3. 基变换与坐标变换              | 174 |

|                          |     |
|--------------------------|-----|
| 习题 3.4(A)                | 176 |
| 习题 3.4(B)                | 177 |
| 第 3.5 节 线性方程组解的结构        | 178 |
| 1. 齐次线性方程组解的结构           | 178 |
| 2. 非齐次线性方程组解的结构          | 184 |
| 习题 3.5(A)                | 188 |
| 习题 3.5(B)                | 190 |
| 第 3.6 节 Mathematica 软件应用 | 191 |
| 1. 相关命令                  | 191 |
| 2. 应用示例                  | 191 |
| 3. 技能训练                  | 196 |
| 复习题 3                    | 199 |
| 第 4 章 矩阵的对角化             | 204 |
| 第 4.1 节 向量的内积 长度与正交      | 204 |
| 1. 向量的内积                 | 205 |
| 2. 向量的长度                 | 205 |
| 3. 正交向量组                 | 206 |
| 4. 施密特正交化方法              | 207 |
| 5. 正交矩阵                  | 211 |
| 习题 4.1(A)                | 212 |
| 习题 4.1(B)                | 214 |
| 第 4.2 节 方阵的特征值与特征向量      | 215 |
| 1. 特征值、特征向量的概念和计算方法      | 215 |
| 2. 特征值、特征向量的性质           | 220 |
| 习题 4.2(A)                | 224 |
| 习题 4.2(B)                | 225 |
| 第 4.3 节 相似矩阵             | 226 |
| 1. 相似矩阵                  | 226 |
| 2. 矩阵的对角化                | 227 |
| 习题 4.3(A)                | 234 |
| 习题 4.3(B)                | 235 |

|                                       |     |
|---------------------------------------|-----|
| <b>第 4.4 节 实对称矩阵的对角化</b> .....        | 237 |
| 1. 实对称矩阵的特征值与特征向量的性质 .....            | 237 |
| 2. 实对称矩阵对角化方法 .....                   | 238 |
| 习题 4.4(A) .....                       | 242 |
| 习题 4.4(B) .....                       | 243 |
| <b>第 4.5 节 Mathematica 软件应用</b> ..... | 244 |
| 1. 相关命令 .....                         | 244 |
| 2. 应用示例 .....                         | 245 |
| 3. 技能训练 .....                         | 248 |
| <b>复习题 4</b> .....                    | 250 |
| <b>第 5 章 二次型</b> .....                | 253 |
| <b>第 5.1 节 二次型与对称矩阵</b> .....         | 254 |
| 1. 二次型的定义 .....                       | 254 |
| 2. 二次型的矩阵表示 .....                     | 254 |
| 习题 5.1(A) .....                       | 256 |
| 习题 5.1(B) .....                       | 257 |
| <b>第 5.2 节 二次型的标准化</b> .....          | 258 |
| 1. 正交变换法 .....                        | 259 |
| 2. 配方法 .....                          | 263 |
| 3. 初等变换法 .....                        | 265 |
| 习题 5.2(A) .....                       | 268 |
| 习题 5.2(B) .....                       | 269 |
| <b>第 5.3 节 惯性定理 二次型的规范形</b> .....     | 270 |
| 1. 惯性定理 .....                         | 270 |
| 2. 二次型的规范形 .....                      | 271 |
| 习题 5.3(A) .....                       | 273 |
| 习题 5.3(B) .....                       | 274 |
| <b>第 5.4 节 正定二次型</b> .....            | 275 |
| 1. 二次型的有定性 .....                      | 275 |
| 2. 正定二次型的判别法 .....                    | 276 |
| * 3. 二次型有定性在求函数极值中的应用 .....           | 278 |

|                                       |     |
|---------------------------------------|-----|
| 习题 5.4(A) .....                       | 281 |
| 习题 5.4(B) .....                       | 282 |
| <b>第 5.5 节 Mathematica 软件应用</b> ..... | 283 |
| 1. 相关命令 .....                         | 283 |
| 2. 应用示例 .....                         | 283 |
| 3. 技能训练 .....                         | 285 |
| <b>复习题 5</b> .....                    | 285 |
| <b>习题答案与提示</b> .....                  | 289 |
| <b>参考文献</b> .....                     | 290 |

# 第 1 章 行列式

共性寓于个性之中.通过对特殊的具体现象透视剖析,认识发现事物内在的属性规律,往往是获得一般抽象问题解决方案的有效途径.这种从特殊到一般,由外而内,由表及里的思维方法有效地渗透于数学问题的研究中.从  $n$  阶行列式的构建,到克拉默法则的形成,无不闪现着这种思维的火花.

行列式是线性代数的一个重要组成部分.它不仅是研究矩阵理论、线性方程组求解等问题的重要工具,而且在数学的许多分支及经济、管理、工程技术等领域有着极其广泛的应用.本章以三阶行列式为基础,建立了  $n$  阶行列式的概念,讨论了  $n$  阶行列式的性质,给出了利用行列式求解  $n$  元线性方程组的克拉默法则.学习本章后,应该理解  $n$  阶行列式的定义,掌握行列式的性质及计算方法.

## 第 1.1 节 $n$ 阶行列式

### 1. 二阶与三阶行列式

考虑含有两个未知量  $x_1, x_2$  的线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2. \end{cases}$$

为求得上述方程组的解,利用加减消元法,得

$$\begin{cases} (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = b_1a_{22} - b_2a_{12}, \\ (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = b_2a_{11} - b_1a_{21}. \end{cases}$$

当  $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$  时,方程组有唯一解

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - b_2a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \quad x_2 = \frac{b_2a_{11} - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}.$$

注意:上式中的分子、分母都是 4 个数分两对相乘再相减而得.为便于记忆,引进如下记号