北京警察学院规划教材

GAILÜLUN YU SHULI TONGJI YINGYONG

概率论与数理统计应用

刘长文　主编

中国人民公安大学出版社
CPPSUP

北京警察学院规划教材

概率论与数理统计应用

刘长文　主编

中国人民公安大学出版社
·北　京·

图书在版编目（CIP）数据

概率论与数理统计应用 / 刘长文主编. —北京：中国人民公安大学出版社，2016.6

北京警察学院规划教材

ISBN 978 - 7 - 5653 - 2617 - 2

Ⅰ.①概…　Ⅱ.①刘…　Ⅲ.①概率论—高等学校—教材②数理统计—高等学校—教材　Ⅳ.①O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2016）第 113488 号

概率论与数理统计应用

刘长文　主编

出版发行：中国人民公安大学出版社
地　　址：北京市西城区木樨地南里
邮政编码：100038
印　　刷：北京兴华昌盛印刷有限公司

版　　次：2016 年 6 月第 1 版
印　　次：2016 年 6 月第 1 次
印　　张：9.25
开　　本：787 毫米 × 1092 毫米　1/16
字　　数：168 千字

书　　号：ISBN 978 - 7 - 5653 - 2617 - 2
定　　价：34.00 元

网　　址：www.cppsup.com.cn　　www.porclub.com.cn
电子邮箱：zbs@cppsup.com　　zbs@cppsu.edu.cn

营销中心电话：010 - 83903254
读者服务部电话（门市）：010 - 83903257
警官读者俱乐部电话（网购、邮购）：010 - 83903253
教材分社电话：010 - 83903259

概率论与数理统计应用

主　编　刘长文

撰稿人　（以姓氏笔画为序）

尤　慧　刘长文　杨　晨

赵国建　曾祥坤　穆日磊

前　　言

概率论与数理统计是研究随机现象规律性的一门学科，在自然科学、社会科学、工程技术、工农业生产等领域中有着广泛应用。它不但具有高度的抽象性、严密的逻辑性和广泛的应用性，而且要求更独特的思维方法。为了帮助学生学好概率论与数理统计，培养学生运用概率统计方法分析解决实际问题的能力和创造性思维能力，突出这一学科在公安工作中的应用，我们编写了本教材，定名为《概率论与数理统计应用》。

全书共分为六章，前两章为概率论部分，主要介绍随机事件及概率、一维和多维随机变量及其概率分布、随机变量的数字特征等内容。后四章为数理统计部分，主要介绍抽样分布与参数估计、假设检验、相关分析和一元线性回归分析等内容。在内容安排上力求做到重点突出、层次分明、逻辑清晰，有利于学生梳理和归纳总结所学知识。书中与公安工作相关的例题、习题为本教材区别于同类教材的一个显著特点。

本教材第一章由赵国建老师编写，第二章由杨晨老师编写，第三章由曾祥坤老师编写，第四章由刘长文老师编写，第五章由穆日磊老师编写，第六章由尤慧老师编写。本教材由刘长文老师统稿。

限于编者水平，书中难免会有疏漏之处，恳请读者批评指正。

2016 年 6 月

目录

CONTENTS

第一章 随机事件与随机事件的概率

概率论是研究随机现象、统计其规律性数量关系的数学学科。数理统计以概率论为基础，研究如何有效地收集整理和分析受随机影响的数据，并做出统计推测、预测或决策。概率论与数理统计从数量化的角度来研究现实世界的不确定现象及其规律性。本章介绍的随机事件的一些基本概念是本学科中最基本和最重要的概念。

第一节 随机试验和随机事件

一、随机试验

如果一个试验在相同条件下可以重复进行，而每次试验的可能结果不止一个，但在进行一次试验之前却不能断言它出现哪个结果，则称这种试验为随机试验。

二、随机事件

在一次试验中，有可能出现，也有可能不出现的事件，叫随机事件，习惯用 A、B、C 表示随机事件。例如，掷一枚硬币，出现正面及出现反面；掷一颗骰子，出现“2”点、“5”点和出现偶数点都是随机事件。没有特别说明，本课程我们只讨论随机事件，随机事件也简称事件。

掷两次硬币，其可能结果有：{上上、上下、下上、下下}，则两次面向相同的事件 A 与两次面向不同的事件 B 都可能出现，也可能不出现。掷一次骰子，其可能结果的点数有：$\{1,2,3,4,5,6\}$，则出现偶数点的事件 A，点数 $\leqslant 4$ 的事件 B 都可能出现，也可能不出现。

在一次试验中我们经常会遇到，一定会出现的事件（必然事件）或者一定不出现的事件（不可能事件），下面就介绍这两种事件。

必然事件：在一次试验中，一定出现的事件，称为必然事件，习惯用 Ω 表示必然事件。

例如，掷一次骰子，点数 $\leqslant 6$ 的事件一定出现，它是必然事件。

不可能事件：在一次试验中，一定不出现的事件称为不可能事件，而习惯用 Φ 表示不可能事件。

例如，掷一次骰子，点数 > 6 的事件一定不出现，它是不可能事件。

三、基本（随机）事件

随机试验的每一个可能出现的结果，称为基本随机事件，简称基本事件，也叫样本点，习惯用 ω 表示基本事件。

例如，掷一次骰子，点数 1、2、3、4、5、6 分别是基本事件，或叫样本点。

全部基本事件叫基本事件组或叫样本空间，记作 Ω，当然 Ω 是必然事件。

四、随机事件的关系及运算

（一）事件的包含

若事件 A 发生则必然导致事件 B 发生，就说事件 B 包含事件 A，记作：$B \supset A$ 或 $A \subset B$。例如，掷一次骰子，A 表示掷出的点数 $\leqslant 2$，B 表示掷出的点数 $\leqslant 3$。所以 $A = \{1,2\}$，$B = \{1,2,3\}$。

所以，A 发生则必然导致 B 发生，$B \supset A$。显然有 $\Phi \subset A \subset \Omega$。

（二）事件的等价

如果同时有 $A \subset B$，$B \subset A$，则称事件 A 与事件 B 等价，或称 A 等于 B，记作：$A = B$。

（三）事件的和

事件 A 与事件 B 中至少有一个发生的事件，称为事件 A 与事件 B 的和事件，记作：$A \cup B$，或者 $A + B$。

例如，掷一次骰子，$A = \{1,3,5\}$；$B = \{1,2,3\}$，则和事件 $A + B = \{1,2,3,5\}$。

显然有性质：

1. $A \subset (A + B)$，$B \subset (A + B)$。
2. 若 $A \subset B$，则有 $A + B = B$。
3. $A + A = A$。

（四）事件的积

事件 A 与事件 B 都发生的事件，称为事件 A 与事件 B 的积事件，记作：AB 或 $A \cap B$。

例如，掷一次骰子，$A = \{1,3,5\}$；$B = \{1,2,3\}$，则 $AB = \{1,3\}$。

显然有性质：

1. $AB \subset A$，$AB \subset B$。

2. 若 $A \subset B$，则有 $AB = A$。

3. $AA = A$。

（五）事件的差

“事件 A 发生而事件 B 不发生”也是一个事件，称为 A 与 B 的差，记为：$A - B$。

例如，掷一次骰子，$A = \{1,3,5\}$；$B = \{1,2,3\}$，则 $A - B = \{5\}$。

显然有性质：

1. $A - B \subset A$。

2. 若 $A \subset B$，则有 $A - B = \Phi$。

3. $A - B = A - AB$。

（六）互不相容事件

若事件 A 与事件 B 不能都发生，就说事件 A 与事件 B 互不相容（或互斥）即 $AB = \Phi$。

例如，掷一次骰子，$A = \{1,3,5\}$，$B = \{2,4\}$，则 $AB = \Phi$。

（七）对立事件

事件 A 不发生的事件称为事件 A 的对立事件。记作：$\overline{A}$。

例如，掷一次骰子，$A = \{1,3,5\}$，则 $\overline{A} = \{2,4,6\}$。

显然，对立事件有下列性质：

1. $A + \overline{A} = \Omega$。

2. $A\overline{A} = \Phi$。

3. $A - B = A\overline{B}$。

注意：A 与 B 对立，则 A 与 B 互不相容，反之不一定成立。

例如，在射击测试中 A 表示成绩优秀，B 表示不合格。A 与 B 互不相容，但 A 与 B 并不对立。

事件的运算有下面的规律：

1. $A + B = B + A$，$AB = BA$，叫交换律。

2. $(A + B) + C = A + (B + C)$，$(AB)C = A(BC)$，叫结合律。

3. $A(B + C) = AB + AC$，叫分配律。

4. $\overline{A + B} = \overline{A}\,\overline{B}$，$\overline{AB} = \overline{A} + \overline{B}$，叫对偶律。

例 1　某选手投篮三次：A_1 表示第 1 次投中，A_2 表示第 2 次投中，A_3 表示第 3 次投中。B_0 表示三次中投中 0 次，B_1 表示三次中投中 1 次，B_2 表示三次中投中 2 次，B_3 表示三次中投中 3 次。请用 A_1、A_2、A_3 的运算来表示 B_0、B_1、B_2、B_3。

解

(1) $B_0 = \overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3$

(2) $B_1 = A_1\overline{A}_2\overline{A}_3 + \overline{A}_1A_2\overline{A}_3 + \overline{A}_1\overline{A}_2A_3$

(3) $B_2 = A_1A_2\overline{A}_3 + A_1\overline{A}_2A_3 + \overline{A}_1A_2A_3$

(4) $B_3 = A_1A_2A_3$

习题 1－1

1. 用集合的形式写出下列随机试验的样本空间与随机事件 A：

(1) 抛一枚硬币两次，观察出现的面，事件 A = {两次出现的面相同}；

(2) 记录某路段一天内接到的报堵次数，事件 A = {一天内报堵次数不超过 5 次}；

(3) 从一批灯泡中随机抽取一只，测试其寿命，事件 A = {寿命在 2000 ~ 2500 小时}。

2. 袋中有 10 个球，分别编有号码 1 ~ 10，从中任取 1 球，设 A = {取得球的号码是偶数}，B = {取得球的号码是奇数}，C = {取得球的号码小于 5}，问下列运算表示什么事件：

(1) $A \cup B$；

(2) AB；

(3) AC；

(4) $\overline{AC}$；

(5) $\overline{A}\,\overline{C}$；

(6) $\overline{B \cup C}$；

(7) $A - C$。

3. 在区间 [0, 2] 上任取一数，设 $A = \left\{x \middle| \frac{1}{2} < x \leqslant 1\right\}$，$B = \left\{x \middle| \frac{1}{4} \leqslant x \leqslant \frac{3}{2}\right\}$，求下列事件的表达式：

(1) $A \cup B$；

(2) $\overline{A}B$；

(3) $A\overline{B}$；

(4) $A \cup \overline{B}$。

4. 用事件 A、B、C 的运算关系式表示下列事件：

(1) A 出现，B、C 都不出现（记为 E_1）；

（2）A、B 都出现，C 不出现（记为 E_2）；

（3）所有三个事件都出现（记为 E_3）；

（4）三个事件中至少有一个出现（记为 E_4）；

（5）三个事件都不出现（记为 E_5）；

（6）不多于一个事件出现（记为 E_6）；

（7）不多于两个事件出现（记为 E_7）；

（8）三个事件中至少有两个出现（记为 E_8）。

5. 一批产品中有合格品和废品，从中有放回地抽取三次，每次取一件，设 A_i 表示事件“第 i 次抽到废品”，$i = 1,2,3$，试用 A_i 表示下列事件：

（1）第一次、第二次中至少有一次抽到废品；

（2）只有第一次抽到废品；

（3）三次都抽到废品；

（4）至少有一次抽到合格品；

（5）只有两次抽到废品。

6. 接连进行三次射击，设 $A_i = \{$第 i 次射击命中$\}$，$i = 1,2,3$，$B = \{$三次射击恰好命中两次$\}$，$C = \{$三次射击至少命中两次$\}$；试用 A_i 表示 B 和 C。

7. 设 A、B 为两个事件，化简下列事件：

（1）$(\overline{A} \cup B)(A \cup B)$；（2）$(\overline{A} \cup \overline{B})(A \cup \overline{B})$。

8. （1）设 A、B、C 为三个事件，则 A、B、C 事件至多两个事件发生如何表示：

（2）设 A、B、C 为三个事件，试用 A、B、C 的运算表示事件 A、B、C 中至少有两个事件发生。

第二节 随机事件的概率

一、频率

1. 在相同条件下，进行了 n 次试验，在这 n 次试验中，事件 A 发生了 n_A 次，则事件 A 发生的次数 n_A 称为事件 A 发生的频数。

2. 比值 $\frac{n_A}{n}$ 称为事件 A 发生的频率，记作 $f_{(n)}(A)$，即 $f_{(n)}(A) = \frac{n_A}{n}$。

历史上有很多人做过抛硬币试验，其结果见下表，用 A 表示出现正面的事件：

试验人	n	n_A	$f_n(A)$
摩根	2048	1061	0.5181
蒲丰	4040	2048	0.5069
皮尔逊	12000	6019	0.5016

从上表可见，当试验次数 n 大量增加时，事件 A 发生的频率 $f_{(n)}(A)$ 会稳定于某一常数，我们称这一常数为频率的稳定值。如上表的抛硬币试验，正面出现的事件 A 的频率 $f_{(n)}(A)$ 的稳定值大约是0.5。

二、概率

事件 A 出现的频率的稳定值称为事件 A 发生的概率，记作 $P(A)$ 。

实际上，用上述定义去求事件 A 发生的概率是很困难的，因为要求 A 发生的频率 $f_{(n)}(A)$ 的稳定值需做大量试验。它的优点是经过多次的试验后，给人们提供猜想事件 A 发生的概率的近似值。

粗略地说，我们可以认为事件 A 发生的概率 $P(A)$ 就是事件 A 发生的可能性的大小，虽然这种说法不准确，但人们容易理解和接受，也便于应用。

事件 A 的概率 $P(A)$ 有下列性质：

1. $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$ 。
2. $P(\Omega) = 1$, $P(\Phi) = 0$ 。
3. 若 A 与 B 互斥，即 $AB = \Phi$ ，则有：

$P(A + B) = P(A) + P(B)$ ；

若 A_1 , A_2 , …, A_n 互斥，则有：

$P(A_1 + A_2 + \cdots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n)$ 。

三、古典概型

若我们所进行的随机试验有以下两个特点：一是试验只有有限个不同的结果，二是每一个结果出现的可能性相等，则这种试验模型称作古典概型。

例如，掷一次骰子，它的可能结果只有6个，假设骰子是均匀的，则每一种结果出现的可能性都是 $\frac{1}{6}$ ，所以相等，这种试验是古典概型。

下面介绍古典概型事件概率的计算公式：

设 Ω 是古典概型的样本空间，其中样本点总数为 n , A 为随机事件，其中所含的样本点数为 r ，则有公式：

$$P(A) = \frac{r}{n}\frac{(A\text{中包含的样本点数})}{(\Omega\text{中样本点总数})} \text{或} P(A) = \frac{r}{n}\frac{(A\text{中包含的基本事件数})}{(\text{基本事件总数})}$$

例1 掷一次骰子，求点数为奇数点的事件 A 的概率。

解 $\because$ 样本空间为 $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$；$A = \{1,3,5\}$

$\therefore n = 6, r = 3 \quad P(A) = \frac{r}{n} = \frac{1}{2}$

由于在古典概型中，事件 A 的概率 $P(A)$ 的计算公式只需知道样本空间中的样本点的总数 n 和事件 A 包含的样本点的个数 r 就足够，而不必一一列举样本空间的样本点，因此，当样本空间的样本点总数比较多或难于一一列举的时候，也可以用分析的方法求出 n 与 r 的数值。

例2 袋中有5个白球，3个红球，从中任取2个球，求：

(1) 所取2个球的颜色不同的事件 A 的概率；

(2) 所取2个球都是白球的事件 B 的概率；

(3) 所取2个球都是红球的事件 C 的概率；

(4) 所取2个球是颜色相同的事件 D 的概率。

解 袋中共有8个球，从中任取2个球，结果与顺序无关，所以取法共有 C_8^2 种，每一种取法的结果是一个基本事件，所以基本事件总数为 $n = C_8^2 = \frac{8 \times 7}{1 \times 2} = 4 \times 7 = 28$。

(1) 分两步取：

第一步，在5个白球中任取一个，方法数为5。

第二步，在3个红球中取一个，方法数为3。根据乘法原则，共有 5×3 种方法，即有 5×3 种结果。

$\therefore r_1 = 5 \times 3$

$\therefore P(A) = \frac{r_1}{n} = \frac{5 \times 3}{28} = \frac{15}{28}$

(2) 从5个白球中任取2个，结果与顺序无关。

$\therefore$ 取法共有 $C_5^2 = \frac{5 \times 4}{1 \times 2} = 10$（种）

$\therefore$ B 包含的基本事件共有 $r_2 = 10$

$\therefore P(B) = \frac{r_2}{n} = \frac{10}{28} = \frac{5}{14}$

(3) 从3个红球中任取2个的方法为 $C_3^2 = \frac{3 \times 2}{1 \times 2} = 3$（种）。

$\therefore$ C 包含的基本事件数 $r_3 = 3$

$\therefore P(C) = \frac{r_3}{n} = \frac{3}{28}$

(4) 所取 2 个球颜色相同的事件有两类：

第一类：2 个球都是白球的方法有 $C_5^2 = 10$（种）。

第二类：2 个球都是红球的方法有 $C_3^2 = 3$（种）。

根据加法原则，所取 2 个球是颜色相同的方法共有 $10+3=13$ 种。

$\therefore$ 2 个球颜色相同的事件 D 包含 $r_4 = 13$ 个基本事件。

$\therefore P(D) = \dfrac{r_4}{n} = \dfrac{13}{28}$

例 3 将两封信投入 4 个信箱中，求两封信在同一信箱的事件 A 的概率。

解

(1) 先将第一封信投入信箱，有 4 种方法，再将第二封信投入信箱，也有 4 种方法。

$\therefore$ 根据乘法原则共有 4×4 种方法

$\therefore$ 基本事件总数 $n = 4\times4$

(2) 将两封信同时投入一个信箱，方法有 4 种。

$\therefore$ A 包含的基本事件数 $r = 4$，所以 $P(A) = \dfrac{1}{4}$

四、概率的加法公式

引例 掷一次骰子，$A = \{1,3,5\}$，$B = \{1,2,3\}$ 求：

(1) $P(A)$；(2) $P(B)$；(3) $P(A+B)$；(4) $P(AB)$。

解

(1) $P(A) = \dfrac{3}{6}$

(2) $P(B) = \dfrac{3}{6}$

(3) $\because A+B = \{1,2,3,5\}$

$\therefore P(A+B) = \dfrac{4}{6}$

(4) $\because AB = \{1,3\}$

$\therefore P(AB) = \dfrac{2}{6}$

由本例看出 $P(A+B) = P(A)+P(B)-P(AB)$，本例的结果具有普遍性，可以得到下面公式：

$P(A+B) = P(A)+P(B)-P(AB)$

特别情形：

(1) 如果 A 与 B 互斥，即 $AB = \Phi$，则 $P(AB) = 0$，这时 $P(A+B) =$

$P(A)+P(B)$

(2) 因为 A 与 $\overline{A}$ 有性质 $A+\overline{A}=\Omega$, $A\overline{A}=\Phi$,

所以: $P(A+\overline{A})=P(A)+P(\overline{A})-P(A\overline{A})$

$\therefore 1=P(A)+P(\overline{A})$

$\therefore P(A)=1-P(\overline{A})$

当上面等式中左边的概率 $P(A)$ 不易求得，而 A 的对立事件 $\overline{A}$ 的概率 $P(\overline{A})$ 较易计算时，便可以通过上式计算概率 $P(A)$。

例 4　袋中有 10 件产品，其中有 6 件正品，4 件次品，从中任取 3 件，求所取 3 件中有次品的事件 A 的概率。

解　A 表示有次品，它包含有 1 件次品，有 2 件次品，有 3 件次品三类事件，计算比较复杂。而对立事件则表示没有次品，即都是正品的事件，比较简单。

因为基本事件总数 $n=C_{10}^{3}=\dfrac{10\times9\times8}{1\times2\times3}=3\times4\times10$

事件 $\overline{A}$ 包含的基本事件 $r=C_{6}^{3}=\dfrac{6\times5\times4}{1\times2\times3}=5\times4$

$\therefore P(\overline{A})=\dfrac{r}{n}=\dfrac{5\times4}{3\times4\times10}=\dfrac{1}{6}$

$\therefore P(A)=1-P(\overline{A})=\dfrac{5}{6}$

加法公式可推广如下:

$P(A+B+C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)$

五、概率的减法公式

因为 $B-A=B\overline{A}$，而 $B\overline{A}+BA=B$，而 BA 与 $B\overline{A}$ 明显不相容。

$\therefore P(B)=P(B\overline{A}+BA)=P(B\overline{A})+P(BA)$

$\therefore P(B-A)=P(B\overline{A})=P(B)-P(BA)$

特别地，若 $B\supset A$，则有 $AB=A$；所以当 $B\supset A$ 时，

$P(B-A)=P(B)-P(A)$

例 5　已知 $P(B)=0.8$, $P(AB)=0.5$，求 $P(\overline{A}B)$。

解　$P(\overline{A}B)=P(B-A)=P(B)-P(AB)=0.8-0.5=0.3$

例 6　若 A 与 B 互不相容, $P(A)=0.5$, $P(B)=0.3$，求 $P(\overline{A}\,\overline{B})$。

解　$P(A+B)=P(A)+P(B)=0.8$

根据对偶公式 $\overline{A}\,\overline{B}=\overline{A+B}$，所以

$P(\overline{A}\,\overline{B})=P(\overline{A+B})=1-P(A+B)=1-0.8=0.2$

习题 1－2

1. 从一批由 45 件正品、5 件次品组成的产品中任取 3 件产品，求其中恰有 1 件次品的概率。

2. 一口袋中有 5 个红球及 2 个白球，从这个口袋中任取一球，看过它的颜色后放回袋中，然后，再从这个口袋中任取一球，设每次取球时袋中各个球被取到的可能性相同。求：

（1）第一次、第二次都取到红球的概率；

（2）第一次取到红球，第二次取到白球的概率；

（3）第二次取到的球为红球、白球各一的概率；

（4）第二次取到红球的概率。

3. 一个口袋中装有 6 只球，分别编上号码 1 至 6，随机从这个口袋中取 2 只球，试求：

（1）最小号码是 3 的概率；

（2）最大号码是 3 的概率。

4. 一个盒子中装有 6 只灯泡，其中有 2 只是不合格品，现在作不放回抽样，接连取 2 次，每次取 1 只，试求下列事件的概率：

（1）2 只都合格；

（2）1 只合格，1 只不合格；

（3）至少有 1 只合格。

5. 掷两颗骰子，求下列事件的概率：

（1）点数之和为 7；

（2）点数之和不超过 5；

（3）点数之和为偶数。

6. 把甲、乙、丙三个篮球随机分配到 5 个空置的盒子中去，假设每个盒子最多可放 8 个，试求这三个篮球在不同盒子中的概率。

7. 五位学生中有两位学生学过驾驶技术，今偶遇其中的三位学生，求下列事件的概率：

（1）事件 A：“其中恰有一位学生学过”；

（2）事件 B：“其中恰有二位学生学过”；

（3）事件 C：“其中有学生学过”。

8. 设 A、B 为二事件，设 $P(A)=0.8, P(AB)=0.32$，求 $P(A\overline{B})$。

9. 电话号码由 8 个数字组成，每个数字可能是从 0 到 9 这 10 个数字中的