



石油高等教育“十二五”规划教材

场与波

Field and Wave

编 著 邵长金 杨振清
周广刚 林春丹



 中国石油大学出版社
CHINA UNIVERSITY OF PETROLEUM PRESS



石油高等教育“十二五”规划教材

张焯(912)目錄請看封面

學大書各國中,頁卷一,著編者金列明,寫譯編

8. 2110, 凡選第

B-1171-2122-1-210 11021

除第一卷外,第一至第四卷,均由中國石油大學出版社出版

11021, 凡選第一卷者,請向中國石油大學出版社

張焯(912)目錄請看封面

场 与 波

邵长金 杨振清 周广刚 林春丹 编著

图书在版编目(CIP)数据

场与波/邵长金等编著. —东营:中国石油大学出版社,2015.5

ISBN 978-7-5636-4711-8

I. ①场… II. ①邵… III. ①场论—高等学校—教材
②波—高等学校—教材 IV. ①O4

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 115683 号

石油高等教育教材出版基金资助出版

书 名: 场与波

作 者: 邵长金 杨振清 周广刚 林春丹

责任编辑: 王金丽(电话 0532—86983567)

封面设计: 青岛友一广告传媒有限公司

出 版 者: 中国石油大学出版社(山东 东营 邮编 257061)

网 址: <http://www.uppbook.com.cn>

电子信箱: shiyoujiaoyu@126.com

印 刷 者: 青岛双星华信印刷有限公司

发 行 者: 中国石油大学出版社(电话 0532—86981531,86983437)

开 本: 185 mm×260 mm 印张:14 字数:347 千字

版 次: 2015 年 8 月第 1 版第 1 次印刷

定 价: 35.00 元

Preface 前言

在物理学中,场是一个以时空为变量的物理量。例如,在天气预报中,在空间的每个点都赋予一个矢量值来描述风速场。场可以分为标量场、矢量场和张量场等,通常依据场在时空中每个点的值是标量、矢量还是张量而定。例如,经典引力场是一个矢量场,标示引力场在时空中每个点的值需要三个量,此即引力场在每个点的引力场矢量分量。更进一步地,在每一范畴(标量、矢量、张量)之中,场还可以分为“经典场”和“量子场”两种,依据场的值是数值或量子算符而定。

场被认为是延伸至整个空间的,但实际上,每个已知的场在足够远的距离下,都会衰减至无法量测的程度。例如,在牛顿万有引力定律中,引力场的强度与距离的平方成反比,因此地球的引力场会随着距离的增加很快地变小,甚至难以测量(在宇宙的尺度之下)。

定义场是一个“空间里的数”,这不应该减损场在物理上所有的真实性。场占有空间,场含有能量,场的存在排除了真正的真空。真空中没有物质,但并不是没有场的。场形成了一个“空间的状态”,当向其中放入一个粒子时,该粒子能够受到力的作用。

在电场中,当一个电荷被加速时,另一个电荷并不会立刻感应到。但第一个电荷会感应到一个反作用力,并获得动量,而第二个电荷则没有感应,直到第一个电荷移动的影响以光速传递到第二个电荷那里,并给予其动量之后。在第二个电荷移动前,动量在哪里呢?依据动量守恒定律,动量必存在于某处。物理学家认为动量应该存在于场之中。如此的认定让物理学家们相信电磁场是真实存在的,使得场的概念成为整个现代物理学的范式。

经典场论是描述物理场和物质相互作用的物理理论。由于重力场、电磁场等物理场的概念在相对论之前就给出了,在相对论之下又作了相应的改动,因此,经典理论可以归类为非相对论性和相对论性的。在经典场论(例如麦克斯韦的电磁场论)中,场量满足对空间坐标和时间的偏微分方程,因此经典场是以连续性为其特征的。

量子场论是量子力学和经典场论相结合的物理理论,已被广泛地用于粒子物理学和凝聚态物理学中。量子场论为描述多粒子系统,尤其是包含粒子产生和湮灭过程的系统提供了有效的描述框架。非相对论性的量子场论主要被用于凝聚态物理学,而相对论性的量子场论则是粒子物理学不可或缺的组成部分。目前已知自然界有四种基本相互作用:强作用、电磁相互作用、弱作用、引力。除去引力,另三种相互作用都找到了合适满足特定对称性的量子场论来描述。强作用有量子色动力学;电磁相互作用有量子电动力学,理论框架建立于1920—1950年间;弱作用有费米点作用理论。后来弱作用和电磁相互作用实现了形式上的

统一,通过希格斯(Higgs)机制产生质量,建立了弱电统一的量子规范理论,量子场论成为现代理论物理学的主流方法和工具。

作为非物理专业的教材,本书主要讨论经典场论,更具体些是非相对论性的经典场论。

按照韦氏词典(Webster's Dictionary),波是某一物理量的扰动或振动在空间逐点传递时形成的运动。

波动是物质运动的重要形式,广泛存在于自然界中。被传递的物理量扰动或振动有多种形式,其中机械振动的传递构成机械波,电磁场振动的传递构成电磁波(包括光波),温度变化的传递构成热波,晶体点阵振动的传递构成点阵波,自旋磁矩的扰动在铁磁体内传播时形成自旋波。实际上任何一个宏观的或微观的物理量所受扰动在空间传递时都可形成波。最常见的机械波是构成介质的质点的机械运动(引起位移、密度、压强等物理量的变化)在空间的传播过程,例如弦线中的波、水面波、空气或固体中的声波等。产生这些波的前提是介质的相邻质点间存在弹性力或准弹性力的相互作用,正是借助于这种相互作用力才使得某一点的振动传递给邻近质点,故这些波亦称弹性波。电磁场的振动在空间传递时依靠的是电磁场本身的规律,无须任何介质的存在,故电磁波(包括光波)可在真空中传播。振动物理量可以是标量,相应的波称为标量波(如空气中的声波),也可以是矢量,相应的波称为矢量波(如电磁波)。振动方向与波的传播方向一致的称纵波,相垂直的称横波。

各种形式的波的共同特征是具有周期性。受扰动物理量变化时具有时间周期性,即同一点的物理量在经过一个周期后完全恢复为原来的值;在空间传递时又具有空间周期性,即沿波的传播方向经过某一空间距离后会出现同一振动状态(例如质点的位移和速度)。因此,受扰动物理量既是时间又是空间位置的周期函数,该函数称为波函数或波动表示式,是定量描述波动过程的数学表达式。广义地说,凡是具有时间周期性和空间周期性特征的描述运动状态的函数都可称为波,如引力波、微观粒子的概率波等。

各种波的共同特性还有:在不同介质的界面上能产生反射和折射,对各向同性介质的界面,遵守反射定律和折射定律;通常的线性波叠加时遵守波的叠加原理;两束或两束以上的波在一定条件下叠加时能产生干涉现象;波在传播路径上遇到障碍物时能产生衍射现象;横波能产生偏振现象。

有了场与波的基本概念后,不禁要问:场与波有什么联系呢?

一般认为,变化的场产生了波。例如,电磁波是由变化的电磁场产生的。在电动力学里,根据麦克斯韦方程组,随着时间变化的电场产生了磁场,反之亦然。因此,一个振荡中的电场会产生振荡的磁场,而一个振荡中的磁场又会产生振荡的电场,这样,这些连续不断同相振荡的电场和磁场共同地形成了电磁波。

同样的,引力场(重力场一词特指地球的引力场)的变化产生了引力波。关于万有引力的本质是什么,牛顿认为是一种即时超距作用,不需要传递的“信使”。爱因斯坦则认为是一种跟电磁波一样的波动,称为引力波。引力波是时空曲率的扰动以行进波的形式向外传递。引力辐射是另外一种称呼,指的是这些波从星体或星系中辐射出来的现象。电荷被加速时会发出电磁辐射,同样有质量的物体被加速时就会发出引力辐射,这是广义相对论的一项重要预言。

引力波是一种引力波动,以光速传播。引力场是种状态。说引力场光速传播,实际上是说引力波光速传播。如果能测量引力,更容易测的是引力波,而不是引力场。动物如果能感知物体的到来,涉及引力的话,应该是物体引发的引力波发生变化。加速移动的物体都会产

生引力波,且物体质量越大,加速度越快,产生的引力波越大。静止的或匀速移动的物体没有引力波,但有引力场。引力场强度可以用牛顿万有引力定律来描述,但引力波要用爱因斯坦广义相对论来描述。本来物体的质量一定,引力也应是一定的,但是物体加速移动时,移动物体前方的引力场被压缩,这样场强度就变大,形成了引力波,以光速向前传播。引力波和引力场都是一种能量。引力场是一种势能,其能量和物体的距离有关(和距离成反比)。引力波是一种动能,和加速度有关。打个比方,在一片湖水里,水相当于场。如果在水里能感知到水里压强,这就相当于场。但时间一长,就会感觉不到该压强了。此时如果有水的波动,会马上就能感受到变化,因为有波了。这个波有能量变化,导致水和刚才静止时的不同。这就是波和场的区别。

基于上述对场与波的认识,作者编写了这本教材。本教材是作者在中国石油大学(北京)为学生讲授此课程的基础上经多次修改完成的。

本教材在编写过程中,进行了多年试用,并征求了部分专家的意见。在内容上,参考了国内外许多优秀教材,借鉴了许多研究者的成果,并尽可能列于参考文献中,如有未尽,请谅解。

本教材的编写得到了中国石油大学(北京)教改项目的资助,并获得了中国石油大学出版社石油高等教育教材出版基金的支持,在此一并致谢。

限于作者水平,教材中的疏漏与错误之处敬请读者批评指正。

作者

2015年3月

Contents 目录

第1章 引力场	1
1.1 引力 引力场强度	1
1.2 引力场通量 高斯定理	4
1.3 引力场环路定理 引力势	6
1.4 泊松方程	7
1.5 引力场的边值问题	8
1.6 爱因斯坦引力场方程	13
第2章 引力波	15
2.1 引力波的传播	16
2.2 引力波的辐射	18
2.3 引力波的能量	18
第3章 弹性场	20
3.1 应力张量	20
3.2 应变张量	22
3.3 应力与应变之间的关系(广义虎克定律)	23
3.4 夹杂体的弹性场	23
第4章 流体介质中的声波	28
4.1 波动方程	28
4.2 平面声波的传播	32
4.3 球面波与柱面波	49
第5章 固体介质中的声波	57
5.1 固体弹性介质中的波动方程	57

5.2	各向同性介质中的纵波和横波	59
5.3	弹性介质中的平面波	60
5.4	平面弹性波在介质分界面上的反射和折射	61
第6章	多孔介质中的声波	79
6.1	Biot 波动理论	79
6.2	多孔介质中三种波动理论的比较	88
第7章	表面波 界面波 导波	95
7.1	瑞利(Rayleigh)波	95
7.2	Stoneley 波	103
7.3	声波在圆柱形波导管中的传播	105
7.4	Lamb 波	114
7.5	Love 波	117
第8章	弹性波的散射	124
8.1	波函数展开法	124
8.2	积分方程法	130
第9章	弹性波的吸收和衰减	137
9.1	黏性流体中的声传播	137
9.2	多孔介质中的声衰减	139
第10章	静态电磁场	148
10.1	静态电磁场的基本方程	148
10.2	静态电磁场的边界条件	150
10.3	静态电磁场的求解方法	154
第11章	电磁波	164
11.1	电磁场的波动方程	164
11.2	平面电磁波的传播特性	165
第12章	温度场	169
12.1	温度场的基本方程	169
12.2	温度场的求解方法	171
第13章	热 波	175
13.1	基于热质理论的热波方程	176

13.2 热波方程的解	178
第 14 章 耦合场与耦合波	183
14.1 弹性场与电磁场的耦合	183
14.2 弹性场与温度场的耦合	189
14.3 电磁场与温度场的耦合	200
14.4 多物理场的耦合	204
14.5 耦合波	206

第 1 章

引力场

在牛顿之前,有很多天文学家对宇宙中的行星进行观察。经过几位天文学家的观察记录、分析总结,得到开普勒三定律。为什么会有这样的规律呢?又是什么让它们做加速度不为零的运动呢?牛顿经过研究思考解决了这些问题,即物体之间存在万有引力。牛顿的理论需要定义引力可以瞬时传播,因此给出了古典自然时空观的假设,这样亦能使开普勒所观测到的角动量守恒成立。但是,这与爱因斯坦的狭义相对论理论有直接的冲突,因为狭义相对论定义了速度的极限(真空中的光速),只有在此速度下信号才可以被传送。牛顿的理论并不能完全地解释水星在沿其轨道运动到近日点时出现的进动现象。牛顿学说的预言(由其他行星的引力拖曳产生)与实际观察到的进动相比每世纪会出现 $43''$ 的误差。1916年,爱因斯坦发表广义相对论,用几何语言描述引力理论,它代表了现代物理学中引力理论研究的最高水平。在广义相对论中,引力被描述为时空的一种几何属性(曲率),而这种时空曲率与处于时空中的物质与辐射的能量-动量张量直接相联系,其联系方式即爱因斯坦场方程。

1.1 引力 引力场强度

1.1.1 引力和引力定律

引力(gravity)是指具有质量的物体之间加速靠近的趋势,也是自然界的四大基本相互作用力之一。另外三种相互作用力分别是电磁相互作用力、弱相互作用力及强相互作用力。万有引力是上述相互作用中作用力最微弱的,但是在超距上仍然具有吸引力的作用。在经典力学中,万有引力被认为来源于质量的力的作用。在广义相对论上,万有引力来源于存在质量对时空的扭曲,而不是一种力的作用。在量子引力中,引力微子被假定为引力的传送媒介。

在 1687 年,艾萨克·牛顿在他的《自然哲学的数学原理》一书中发表了万有引力定律,陈述如下:宇宙中每个质点都以一种力吸引其他各个质点。这种力与各质点的质量的乘积成正比,与它们之间距离的平方成反比。

如果两个质点的质量分别为 m_1, m_2 , 并且它们之间的距离为 r , 则它们之间的万有引力 F 为:

$$F = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} e_r \quad (1.1-1)$$

其中, G 被称为引力常数(或万有引力常数), 目前其公认值是 $G = 6.67 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$, e_r 为 r 方向的单位矢量。

万有引力定律只给出了两个质点间的引力, 而对于一般不能看成质点的物体间的万有引力, 需将物体分成许多小部分, 使每一部分都可视为质点, 求出物体 1 各小部分与物体 2 各小部分之间的引力, 每个物体所受的引力就等于其各部分所受引力的矢量和。

但是, 若物体为球体, 且密度均匀分布, 则它们之间的引力仍然可以用上式计算, 其中 r 表示两球球心的距离, 即引力沿两球球心的连线长度。下面来证明“对于质量分布均匀的球体, 在计算万有引力时, 可以把其看成质量都集中在球心的质点”, 并计算均匀球壳对其内部质点的引力。

(1) 质点与均匀球体间的万有引力。

若质点 P 的质量为 m , 与球心的距离为 R , 球的半径为 a , 密度为 ρ_V , 质量为 $M = \rho_V \cdot \frac{4}{3} \pi a^3$, 建立如图 1.1-1 所示的坐标系。

根据对称性可知, 球对质点的引力必沿 z 方向, x 和 y 方向上合力为 0。

球上取一微元, 坐标为 (r, θ, φ) , 其体积为 $dV = r^2 \sin \varphi dr d\theta d\varphi$ 。对质点的万有引力为:

$$dF = G \frac{m \rho_V r^2 \sin \varphi}{r^2 + R^2 - 2rR \cos \varphi} dr d\theta d\varphi \quad (R > a) \quad (1.1-2)$$

在 z 方向上的分力为:

$$dF_z = dF \cdot \cos \alpha = G \frac{m \rho_V r^2 (R - r \cos \varphi) \sin \varphi}{(r^2 + R^2 - 2rR \cos \varphi)^{\frac{3}{2}}} dr d\theta d\varphi \quad (1.1-3)$$

$$\begin{aligned} F_{\text{合}} = F_z &= \int_0^a \int_0^{2\pi} \int_0^\pi G \frac{m \rho_V r^2 (R - r \cos \varphi) \sin \varphi}{(r^2 + R^2 - 2rR \cos \varphi)^{\frac{3}{2}}} dr d\theta d\varphi \\ &= G m \rho_V \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a r^2 dr \int_0^\pi \frac{(R - r \cos \varphi) \sin \varphi}{(r^2 + R^2 - 2rR \cos \varphi)^{\frac{3}{2}}} d\varphi \\ &= G m \rho_V \cdot 2\pi \int_0^a r^2 dr \left[\frac{1}{2rR^2} \left(\sqrt{r^2 + R^2 - 2rR \cos \varphi} + \frac{r^2 - R^2}{\sqrt{r^2 + R^2 - 2rR \cos \varphi}} \right) \right]_0^\pi \\ &= G \frac{Mm}{R^2} \quad (1.1-4) \end{aligned}$$

均匀球体对球外一点的万有引力好像球体的质量全部集中在球心一样, 那么两个均匀球体间的万有引力就可以分别把质量全部集中至各自球心, 所以用公式计算时 r 就是球心间距离。

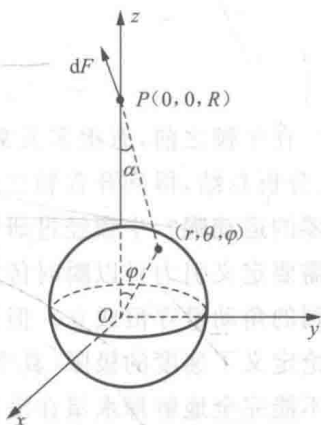


图 1.1-1 球对质点的引力

(2) 均匀球壳与球壳内质点间的万有引力。

若质点 P 的质量为 m , 与球心距离为 R , 球壳的内外半径分别为 R_1 和 R_2 , 球壳的密度为 ρ_V , 质量为 $M = \rho_V \cdot \frac{4}{3}\pi(R_2^3 - R_1^3)$, 建立如图 1.1-2 所示的坐标系。

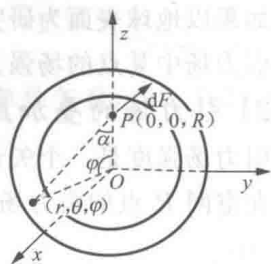


图 1.1-2 球壳对其内质点的引力

由对称性可知, 球对质点的引力必沿 z 方向, x 和 y 方向上合力为 0。

球壳上一微元对质点的万有引力为:

$$dF = G \frac{m\rho_V r^2 \sin \varphi}{r^2 + R^2 - 2rR \cos \varphi} dr d\theta d\varphi \quad (R < a) \quad (1.1-5)$$

在 z 方向上的分力:

$$dF_z = dF \cdot \cos \alpha = G \frac{m\rho_V r^2 (R - r \cos \varphi) \sin \varphi}{(r^2 + R^2 - 2rR \cos \varphi)^{\frac{3}{2}}} dr d\theta d\varphi \quad (1.1-6)$$

$$\begin{aligned} F_{\text{合}} = F_z &= \int_{R_1}^{R_2} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi G \frac{m\rho_V r^2 (R - r \cos \varphi) \sin \varphi}{(r^2 + R^2 - 2rR \cos \varphi)^{\frac{3}{2}}} d\varphi d\theta dr \\ &= Gm\rho_V \int_0^{2\pi} d\theta \int_{R_1}^{R_2} r^2 dr \int_0^\pi \frac{(R - r \cos \varphi) \sin \varphi}{(r^2 + R^2 - 2rR \cos \varphi)^{\frac{3}{2}}} d\varphi \\ &= Gm\rho_V \cdot 2\pi \int_{R_1}^{R_2} r^2 dr \left[\frac{1}{2rR^2} \left(\sqrt{r^2 + R^2 - 2rR \cos \varphi} + \frac{r^2 - R^2}{\sqrt{r^2 + R^2 - 2rR \cos \varphi}} \right) \right]_0^\pi \\ &= 0 \end{aligned} \quad (1.1-7)$$

这就说明均匀球壳对球壳内质点的万有引力等于零。

1.1.2 引力场强度

从近代物理学的观点看, 自然界物质的四种相互作用, 即引力相互作用、电磁相互作用、弱相互作用和强相互作用, 都是通过物体周围的空间中存在的场对对方作用的。物体与物体之间的万有引力也正是通过引力场来传递的。

万有引力 \Leftrightarrow 引力场 \Leftrightarrow 万有引力

1) 引力场强度

为了定量地讨论引力场在空间的分布和传播, 引入引力场强度的概念。引力场的基本性质是它对物体施加作用力, 为此与电场强度的定义类比来定义引力场强度。先引入一试探质点到引力场中以测量它所受到的引力场给它的作用力。按万有引力定律, 试探质点在引力场中任一点 P 所受的力 \mathbf{F} 与其质量 m 成正比, 但比值 \mathbf{F}/m 是一个与试探质点质量无关的矢量, 它反映着引力场本身的性质, 把它定义为该点的引力场强度, 用 \mathbf{g} 来表示:

$$\mathbf{g} = \frac{\mathbf{F}}{m} \quad (1.1-8)$$

引力场强度是描述引力场的性质的基本物理量, 是个矢量。引力场强度的单位是牛·千克⁻¹, 在国际单位制中, 符号为 $\text{N} \cdot \text{kg}^{-1}$ 。如果 1 kg 的质点在引力场中的某点受到的万有引力是 1 N, 则这点的引力场强度就是 $1 \text{ N} \cdot \text{kg}^{-1}$ 。

如果以地球表面为研究对象,则它的引力场强度为 g ,即大小等于重力加速度。

引力场中某点的场强方向与它所受万有引力方向相同。

2) 引力场的叠加原理

引力场强度是一个矢量,它也满足矢量叠加原理。合引力场强度等于各个质点单独存在时在空间 P 点的引力场强度的矢量和,即

$$\mathbf{g} = \mathbf{g}_1 + \mathbf{g}_2 + \mathbf{g}_3 + \cdots = \sum \mathbf{g}_i \quad (1.1-9)$$

点质量在其周围产生的引力场强度为:

$$\mathbf{g} = \frac{\mathbf{F}}{m} = -\frac{GM}{r^2} \mathbf{e}_r \quad (1.1-10)$$

对于不能看成质点的物体,必须将该物体分割成许多小质元,各个质元的引力场强度的矢量和即为该物体的总引力场强度,即

$$\mathbf{g} = \int d\mathbf{g} \quad (1.1-11)$$

1.2 引力场通量 高斯定理

1.2.1 引力线与引力场通量

从场的观点来看,任何物体在其周围的空间都激发了一个引力场,并对处于其中的任何物体有力的作用,即万有引力是通过引力场来传递的。为了形象地描绘引力场的分布,引入引力线的概念。引力线是许多带箭头的连续曲线。在场中任一处沿引力线并指向场源的方向为该处场强的方向。

引力线通常是这样描绘的:通过单位横截面面积的引力线数与该处的场强度成正比。因此, F 较大的地方,引力线就比较密。引力线这个概念是为了更直观地描述场而提出的,它本身并没有什么物理意义,仅起着辅助性的作用。

由式(1.1-10)知道,引力场强度的方向与场源到场点的矢径方向相反,故引力场强度的方向始终指向场源,如图 1.2-1 所示。

也可以定义引力场通量这一物理量,即引力场中一个闭合曲面 S 的场强通量为:

$$\Phi = \oint_S \mathbf{g} \cdot d\mathbf{S} \quad (1.2-1)$$

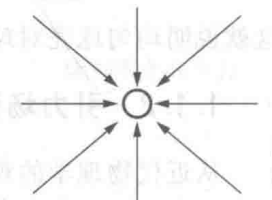


图 1.2-1 引力线示意图

1.2.2 高斯定理

质量分布已知时,虽然原则上可由万有引力定律和力的合成求得物体受到的引力,但计算往往比较复杂。高斯引力通量定律描述的是通过一个闭合曲面的引力通量与其中包含的质量之间的关系,本质上等价于牛顿万有引力定律。尽管它们具有等价性,但许多时候高斯引力定律提供了一种比牛顿万有引力定律更为简便的求解引力问题的方法。下面具体来推导。

1) 包围点质量 M 的闭合曲面 S 的质通量

点质量 M 在 S 面上 dS 面元处的引力场强度为:

$$\mathbf{g} = \frac{\mathbf{F}}{m} = -\frac{GM}{r^2} \mathbf{e}_r \quad (1.2-2)$$

其中, \mathbf{e}_r 为 r 方向的单位矢量。设 \mathbf{n} 为沿 dS 面的正法线方向的单位矢量(图 1.2-2), 可得闭合曲面 S 的质通量 Φ_m 为:

$$\begin{aligned} \Phi_m &= \oint_S \mathbf{g} \cdot d\mathbf{S} = \oint_S -\frac{GM}{r^2} \mathbf{e}_r \cdot \mathbf{n} dS \\ &= -\oint_S \frac{GM}{r^2} dS_{\perp} = -4\pi GM \end{aligned} \quad (1.2-3)$$

2) 不包围点质量 M 的闭合曲面 S 的质通量

$$\Phi_m = \oint_S \mathbf{g} \cdot d\mathbf{S} = \oint_S -\frac{GM}{r^2} \mathbf{e}_r \cdot \mathbf{n} dS \quad (1.2-4)$$

从图 1.2-3 中可以看出, 闭合曲面 S 上的每个面元 dS 对应一个面元 dS' , 它们相对于点质量 M 有相同的立体角, 不过 dS 的位矢的单位矢量 \mathbf{e}_r 与其外法线 \mathbf{n} 方向的夹角小于 $\pi/2$, 而 dS' 的位矢的单位矢量 \mathbf{e}'_r 与其外法线 \mathbf{n}' 方向的夹角大于 $\pi/2$, 故有:

$$\frac{1}{r^2} \mathbf{e}_r \cdot \mathbf{n} dS = \frac{-1}{r'^2} \mathbf{e}'_r \cdot \mathbf{n}' dS' \quad (1.2-5)$$

即

$$\frac{1}{r^2} \mathbf{e}_r \cdot \mathbf{n} dS + \frac{1}{r'^2} \mathbf{e}'_r \cdot \mathbf{n}' dS' = 0$$

所以有:

$$\begin{aligned} -GM \left(\frac{1}{r^2} \mathbf{e}_r \cdot \mathbf{n} dS + \frac{1}{r'^2} \mathbf{e}'_r \cdot \mathbf{n}' dS' \right) &= \mathbf{g} \cdot d\mathbf{S} + \mathbf{g}' \cdot d\mathbf{S}' = 0 \\ \Phi_m &= \oint_S \mathbf{g} \cdot d\mathbf{S} = 0 \end{aligned} \quad (1.2-6)$$

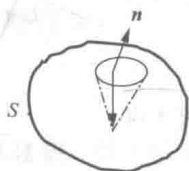


图 1.2-2 包围点质量 M 的闭合曲面

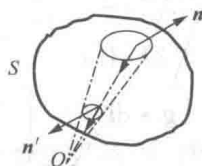


图 1.2-3 不包围点质量 M 的闭合曲面

综合式(1.2-3)和(1.2-6), 可以得出结论: 在万有引力场中, 任何一个包围该点质量的闭合曲面, 不管其形状、大小如何, 其质通量都等于所包围点质量 M 的 $-4\pi G$ 倍; 任何不包围该点质量的闭合曲面, 不管其形状、大小如何, 其质通量均等于零。由此也可以得到万有引力场中的“高斯定理”的数学表达式:

$$\Phi_m = \oint_S \mathbf{g} \cdot d\mathbf{S} = -4\pi G \sum_i M_i \quad (1.2-7)$$

其中, $\sum_i M_i$ 是任一闭合曲面内所有的点质量之和。

根据散度的概念, 引力的高斯定律也可以写成微分形式:

$$\nabla \cdot \mathbf{g} = -4\pi G \rho \quad (1.2-8)$$

其中, $\nabla \cdot \mathbf{g}$ 表示 \mathbf{g} 的散度; G 是万有引力常数; ρ 是质量密度。

1.3 引力场环路定理 引力势

物体在引力场中运动时,引力场要对物体做功,如图 1.3-1 所示。

由于引力场具有叠加性,因此,只要讨论点质量 M 的引力场即可。设质量为 m 的质点从场中一点 P 沿某一路径移到另一点 Q ,任取一元位移 $d\mathbf{l}$,场力 \mathbf{F} 在这一元位移上所做的元功为:

$$dA = F \cos \alpha dl \quad (1.3-1)$$

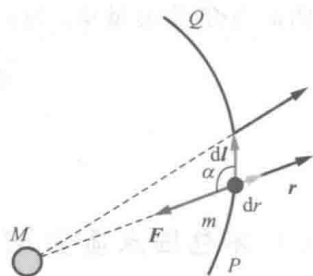


图 1.3-1 引力场对物体做功示意图

其中, α 是 \mathbf{F} 与 $d\mathbf{l}$ 的夹角,由图知 $\cos \alpha dl = dr$,由万有引力定律 $\mathbf{F} = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \mathbf{e}_r$,故

$$dA = -\frac{GMm}{r^2} dr \quad (1.3-2)$$

在把 m 从 P 点移到 Q 点的过程中万有引力所做的总功为:

$$A = \int_{r_P}^{r_Q} -\frac{GMm}{r^2} dr = -GMm \left(\frac{1}{r_P} - \frac{1}{r_Q} \right) \quad (1.3-3)$$

此式说明,当质点 m 在点质量 M 的场中运动时,引力所做的功只取决于运动质点的始末位置,而与路径无关。

1.3.1 引力场的环路定理

设单位点质量在引力场中沿某闭合曲线 L 移动一周,万有引力做功的数值应为 $\oint_L \mathbf{g} \cdot d\mathbf{l}$,在 L 上任取两点 A 和 B 把 L 分成两部分 L_1 和 L_2 (图 1.3-2),有:

$$\oint_L \mathbf{g} \cdot d\mathbf{l} = \int_{L_1(A \rightarrow B)} \mathbf{g} \cdot d\mathbf{l} + \int_{L_2(B \rightarrow A)} \mathbf{g} \cdot d\mathbf{l} = \int_{L_1(A \rightarrow B)} \mathbf{g} \cdot d\mathbf{l} - \int_{L_2(A \rightarrow B)} \mathbf{g} \cdot d\mathbf{l}$$

由以上证明可知:

$$\int_{L_1(A \rightarrow B)} \mathbf{g} \cdot d\mathbf{l} = \int_{L_2(A \rightarrow B)} \mathbf{g} \cdot d\mathbf{l} \quad (1.3-4)$$

故

$$\oint_L \mathbf{g} \cdot d\mathbf{l} = 0 \quad (L \text{ 为任意闭合曲线})$$

可见,引力场沿任一闭合曲线的环路积分为零,上式称为万有引力场中的环路定理。由矢量运算性质可知:

$$\nabla \times \mathbf{g} = 0 \quad (1.3-5)$$

由此可见,高斯定理和环路定理在万有引力场中仍然适用,万有引力场也是有源无旋场。

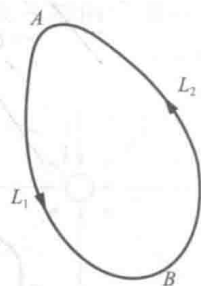


图 1.3-2 引力场环路

1.3.2 引力势 引力势能

根据引力场做功与路径无关这一基本定律引入引力场中的势这一概念。把单位质量的物体从 P 点移到参考点 Q 时所做的功称为 P 点的引力势, 记作 u :

$$u = \frac{A}{m} = \int_P^Q \mathbf{g} \cdot d\mathbf{l} \quad (1.3-6)$$

对于点质量:

$$u = - \int_P^Q \frac{GM}{r^2} dr \quad (1.3-7)$$

若把参考点选在无限远处, 则点质量 M 所激发的引力场中 P 点的引力势就是:

$$u = - \int_{r_P}^{\infty} \frac{GM}{r^2} dr = - \frac{GM}{r_P} \quad (1.3-8)$$

在经典力学中, 一个位置上的引力势 (gravitational potential) 是一个有质量的物体所产生的标量场, 等于将一物体从一个参考位置移向该位置时引力作用于每一单位质量上的功 (即能量转移)。设有一物体质量为 M , 在距其为 r 处的引力势可表示成 $u = -\frac{GM}{r}$, 其中 G 是引力常数。

由矢量分析知道, 引力势的梯度的负值即引力。

根据牛顿万有引力定律, 对于两质点 m_0 和 m , 质点 m 受到的万有引力为:

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -Gmm_0 \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_0}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^3} \quad (1.3-9)$$

其中, G 是万有引力常数; m_0, m 是两质点的质量; \mathbf{r}_0, \mathbf{r} 是两质点的位置矢量。

引力场中的物体会具有引力势能。对于两个质点, 定义无穷远处为势能零点, 则质点 m 在 \mathbf{r} 处的引力势能为:

$$E_G(\mathbf{r}) = -Gmm_0 \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} \quad (1.3-10)$$

在实际问题中, 对于已知引力势分布 $\varphi = \varphi(\mathbf{r})$, 质点 m 在 \mathbf{r} 处的引力势能可表示为:

$$E_G(\mathbf{r}) = m\varphi(\mathbf{r}) \quad (1.3-11)$$

1.4 泊松方程

前面给出了引力场中两个基本定律为:

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{g} = -4\pi G\rho \\ \nabla \times \mathbf{g} = 0 \end{cases} \quad (1.4-1)$$

注意到势与场强度的关系式为:

$$\mathbf{g} = \nabla u \quad (1.4-2)$$

当有引力源存在时, 将式(1.4-2)代入式(1.4-1)中第一式得:

$$\nabla^2 u = -4\pi G\rho \quad (1.4-3)$$

式(1.4-3)即为泊松方程, 在直角坐标系中:

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = -4\pi G\rho \quad (1.4-4)$$

当没有引力源时,对于场中没有质量分布的那些区域($\rho = 0$),泊松方程就变成拉普拉斯方程:

$$\nabla^2 u = 0 \quad (1.4-5)$$

在直角坐标系中:

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \quad (1.4-6)$$

下面讨论泊松方程与拉普拉斯方程的物理意义。根据散度和梯度的定义有:

$$\nabla^2 u = \nabla \cdot \nabla u = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\oint_S \frac{\partial u}{\partial n} dS}{\Delta V} = \begin{cases} -4\pi G\rho \\ 0 \end{cases} \quad (1.4-7)$$

由上式知,泊松方程和拉普拉斯方程的意义为:引力场中的势是这样分布的,若在场中任一 P 点周围取一无限小闭合面 S ,其体积为 ΔV ,引力势沿该面的法线方向导数 $\frac{\partial u}{\partial n}$ 的通量对 ΔV 之比的极限值,在质量分布区以内等于 $-4\pi G\rho$,而在质量分布区以外则等于零。

泊松方程和拉普拉斯方程是引力场的基本方程式,场论中的许多问题就是在不同条件下对它们求解而得到的。

1.5 引力场的边值问题

在总结出泊松方程和拉普拉斯方程以后,场论问题就变成下列两类问题:一是正演问题,即已知体密度 ρ 或面密度 σ ,依据边界条件,对泊松方程和拉普拉斯方程求解,得场的势(或场强度);二是反演问题,即已知场的势 u 及其梯度,依据泊松方程确定场中某点的体质量密度。

不论是正演问题还是反演问题,都可能存在解的多值性,这在物理现实中是不可能的。为了解决这一问题,需要利用到唯一性定理。

唯一性定理表述为:如果在空间中某一区域 Ω 内,各点的质量密度 ρ 和 σ 与这个区域的边界面 S 上各点的势或其梯度(场强度)已知,那么这个区域中由泊松方程解出的势(或场强度)是唯一的(或差一常数)。

唯一性定理对以后求解场论中的实际问题是十分重要的,因为它首先告诉我们唯一确定引力场的因素是什么(泊松方程和边界条件),因而指出解场论问题的方法;其次它还告诉我们不管采用什么方法,只要找到一组能够满足已给泊松方程及已知边界条件的解答,就是唯一正确的解答,不可能再存在另一个解满足这些要求。巧妙地利用这一点,可以使场论中一系列的繁杂数学演算大为简化。

例 1-1 半径为 a 的均匀质量球体的引力场

解 由于质量分布是球形对称,势只与离开球心的距离 r 有关,即 $u = u(r)$,引入球坐标系,则:

$$\nabla^2 u = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) \quad (1.5-1)$$