

小学生数学开窍

小学
数学

一题多解
例析

徐国钧 编著

希望出版社

小学数



33/35



希望出版社

希望出版社
XUEHUA PRESS

小学数学一题多解例析

徐国钧 编著

*

希望出版社出版 (太原并州北路69号)

山西省新华书店发行 山西新华印刷厂印刷

开本: $850 \times 1168 \frac{1}{32}$ 印张: 7 字数: 171 千字

1998 年 1 月第 1 版 1998 年 1 月太原第 1 次印刷

印数: 1—8000 册

*

ISBN 7-5379-2101-6
G·1729 定价: 8.20 元

山西出版集团

出版者的话

数学是锻炼思维的体操，兴趣是学好数学的动力。

为了适应义务教育由应试教育向素质教育的转变，让小学生在数学学习中，学会思维，学会方法，学会创造，生动活泼地学好数学这门基础课，我们组织省内外有丰富教学经验和从事教育科研的特级教师、高级教师编写了这套“小学生数学开窍丛书”，目的是让孩子们从沉重的课业负担中解放出来，让他们从有兴趣的学习中获得愉快的享受，相信这套书会对孩子们开启心智，激发兴趣，锻炼思维，提高素质有所裨益，也会对有志于数学教学改革的教师和教研工作者有所启迪。

由于编写时间仓促，错误和疏漏之处在所难免，请不吝指正。

望广大读者和教师、教研工作者给我们提出宝贵意见和建议，以便我们继续出好这套“小学生数学开窍丛书”。

1997年12月

写在前面

亲爱的小读者，当你做完一道数学题的时候，总要仔细检查一遍吧？验算的同时，你是否想到过，这道题还有哪些解答方法？其实，许多式题、应用题和几何形体求积题的解法都不止一种，而是一题有多解。只要你肯开动脑筋，想想每道题的多种解法，对开阔思路、活跃思想、启迪思维、沟通所学知识的内在联系很有好处，对提高分析问题和解决问题的能力很有帮助，同时还可以从小培养勇于探索和善于探索的精神。

那么，小学数学题为什么会有一题多解呢？

第一，因为思考角度不同，解答途径就不一样。学习了整数、小数和分数四则运算以后，它的概念、法则、定律和公式都是解题的重要依据，灵活运用这些知识，就能够从不同角度来思考每一道题的解答方法，出现了一题多解。下面以一道非常简单的应用题为例来说明。

新华书店一个门市部运到 250 包《小学数学一题多解例析》，每包 40 本，第一天卖出 85 包，第二天卖出 90 包，现书店还剩多少本？

【解法一】先求出书店内还剩多少包书，再求剩下多少本书。

$$40 \times (250 - 85 - 90) = 3000 \text{ (本)}$$

【解法二】先求出共运来多少本书，再分别求出第一、第二天卖出的本数。运来的总数减去两天卖出的书的本数，就是剩

下书的本数。

$$40 \times 250 - 40 \times 85 - 40 \times 90 = 3000 \text{ (本)}$$

【解法三】先求出一共运来多少本书，再求第一、第二天共卖出书的本数。把运来书的总数减去第一、第二天卖出书的数量之和，就是书店内还剩的本数。

$$40 \times 250 - (40 \times 85 + 40 \times 90) = 3000 \text{ (本)}$$

【解法四】先求出第一、第二天共卖出多少包书，再求出书店内还剩多少包书，最后求出书店内还剩多少本书。

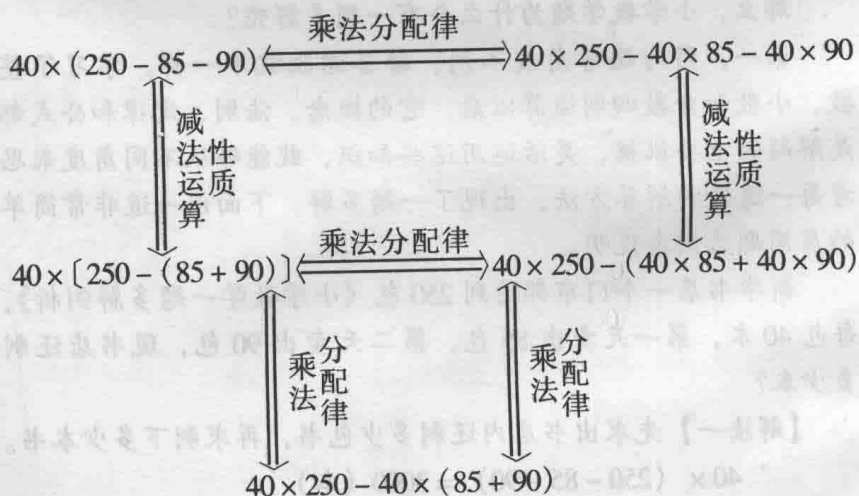
$$40 \times [250 - (85 + 90)] = 3000 \text{ (本)}$$

【解法五】先求出共运来多少本书，再求第一、第二天共卖出多少包书，然后求出第一、第二天共卖出多少本书，把运来的书的总数减去两天共卖出书的本数，就是剩下的书。

$$40 \times 250 - 40 \times (85 + 90) = 3000 \text{ (本)}$$

答：书店内还剩 3000 本。

以上五种解法的内在联系，可列成下表：



从上表可以清楚地看出，根据乘法分配律和减法运算性质，把解法一作恒等变形，便可得到解法二和解法三。根据乘法分配

律和减法的运算性质，把解法一和解法二作恒等变形，可得解法四。根据乘法分配律，把解法三和解法四作恒等变形，可得到解法五。

第二，因为应用不同的数学知识来剖析数量关系，就可以得到多种解答方法。随着年级升高，学到的数学知识就越来越多。比如应用题，逐步掌握了归一问题、平均问题、行程问题、倍比问题、比和比例问题、分数和百分数应用题的解答方法，掌握了分析法、综合法、假设法、转化法等思考方法，不但学会了算术解法，还学会了代数法（列方程解）。于是思路广阔，解题得心应手，为一题多解创造了有利条件。例如另一道简单的应用题：

一个榨油厂，用 50 千克花生仁可以榨出花生油 21 千克。照这样计算，榨油厂运进花生 25000 千克，可以榨出多少千克花生油？

学习了归一法和倍比法以后，可以运用这些方法来解：

【解法一】用直进归一法解。

$$21 \div 50 \times 25000 = 10500 \text{ (千克)}$$

【解法二】用反归一法解。

$$25000 \div (50 \div 21) = 10500 \text{ (千克)}$$

【解法三】用倍比法来解。因为 25000 千克是 50 千克的 $(25000 \div 50 =)$ 500 倍，所以榨出的油也应是 21 千克的 500 倍。

$$21 \times (25000 \div 50) = 10500 \text{ (千克)}$$

学习了分数应用题之后，可按“已知一个数，求这个数的几分之几用乘法”解答。

【解法四】花生油占花生仁重量的 $21 \div 50 = \frac{21}{50}$ ，25000 千克的 $\frac{21}{50}$ 是多少，就是 25000 千克花生仁能榨出花生油的重量。

$$25000 \times \frac{21}{50} = 105000 \text{ (千克)}$$

学习了百分数应用题之后，可按“求一个数的百分之几是多少用乘法”计算。

【解法五】50 千克花生仁可榨出 21 千克花生油，可见出油率是： $21 \div 50 = 42\%$ ，然后求 25000 千克的 42% 是多少。

$$\begin{aligned} & 25000 \times (21 \div 50) \\ &= 25000 \times 42\% \\ &= 10500 \text{ (千克)} \end{aligned}$$

学习了比以后，我们可以按求缺项的方法求出能榨多少千克花生油。

【解法六】

$$\text{花生油} : \text{花生仁} = \frac{21}{50}$$

$$? : 25000 = \frac{21}{50}$$

因为：比的前项 = 比的后项 $\times$ 比值

$$\begin{aligned} \text{所以：} ? &= 25000 \times \frac{21}{50} \\ &= 10500 \text{ (千克)} \end{aligned}$$

学习了比例应用题以后，还可以按正比例方法来解。

【解法七】因为 $\frac{\text{花生油}}{\text{花生仁}} = \text{比值 (一定)}$ ，所以花生油与花生仁成正比例。

设 25000 千克花生仁可榨油 x 千克。

$$\frac{x}{25000} = \frac{21}{50}$$

$$x = 10500$$

学习了列方程解应用题之后，这道题还可以用方程来解。

$$x \div 25000 = \frac{21}{50}$$

$$x = 10500$$

答：25000 千克花生仁可榨油 10500 千克。

一题多解的基础，在于全面、系统、透彻地理解和掌握数学基础知识和基本技能，否则“一解”也有困难，哪里谈得上多解呢？另外，我们也不可单纯地追求多解，而要善于对各种解法进行分析和比较，寻找出思路简明清晰、解答合理灵活、简捷的最佳解法，总结出解题经验和规律，达到既长知识又长才干的目的。

同学们，你们不是对解答应用题常常感到困难，千方百计想找到一把解题的“钥匙”吗？本书以解答应用题为重点，精选了各地近年毕业（升学）试题和数学竞赛题中比较典型的题目作为例题，详细介绍多种解法，并且比较各种解法，指出思路简明、计算简捷的最佳解法。编者相信，这就是一把解题的“钥匙”，一定能够帮助小读者释疑解难，举一反三，提高解题能力。

本书的每一道例题，没有列举所有解法，一般只介绍四五种。小读者若有兴趣和时间，不妨自己再思考一二种其他解法。“多想出智慧”，动动脑筋总是有益处的。另外，每类例题后面都安排了一组习题，书末附录全部习题的参考答案，供小读者选做和核对之用。

陈汝凤、徐晓明、徐莉明、蔡伟贤、周小莺同志参加了本书的编写工作。

欢迎读者对本书提出宝贵意见，如想出有比书中更简捷、更巧妙的解题方法，请来信告诉我们，使本书不断修订，日趋完善。

编著者

1997 年 12 月

四则混合运算式题

目 录

一	四则混合运算式题 (例 1 ~ 例 14)	(1)
二	一般应用题 (例 15 ~ 例 19)	(18)
三	平均数问题 (例 20 ~ 例 22)	(31)
四	归一问题 (例 23 ~ 例 24)	(36)
五	行程问题 (例 25 ~ 例 31)	(41)
六	连续数问题 (例 32 ~ 例 35)	(56)
七	植树问题 (例 36 ~ 例 38)	(63)
八	和差问题 (例 39 ~ 例 42)	(69)
九	倍数问题 (例 43 ~ 例 45)	(78)
十	消去问题 (例 46 ~ 例 47)	(86)
十一	假设法问题 (例 48 ~ 例 49)	(92)
十二	分数、百分数应用题 (例 50 ~ 例 70)	(97)
十三	比和比例应用题 (例 71 ~ 例 79)	(131)
十四	平面和立体图形计算题 (例 80 ~ 例 99)	(146)
附录	参考答案	(171)

一 四则混合运算式题

计算四则混合运算式题要做到：

1. 认真、全面审题，确定运算顺序。

在一个没有括号的算式里，如果只有第一级运算，或只有第二级运算，可从左往右依次计算；如果既有第一级运算又有第二级运算，应该先算第二级运算，再算第一级运算。

在有括号的算式里，要先算括号里面的，如果有小括号又有中括号，要先算小括号里面的，再算中括号里面的。

2. 选择正确、灵活、合理的计算方法。
要全面观察题目的结构特征，灵活运用四则运算定律和性质，尽量选择简便方法，要求算得正确、迅速，选择的计算方法必须合理、灵活。

3. 随时验算，以确保计算正确。

要熟练掌握整数、小数、分数四则运算法则，正确地按照法则计算，计算完每一步都要进行验算，以确保计算正确。

例1 $32 + 64 + 128 + 256$

【解法一】按从左往右依次计算的顺序算。

$$\begin{aligned} 32 + 64 + 128 + 256 &= 96 + 128 + 256 \\ &= 224 + 256 \\ &= 480 \end{aligned}$$

【解法二】运用加法交换律和结合律： 32 和 128 结合， 64 和 256 结合，可以使计算简便。

$$32 + 64 + 128 + 256 = (32 + 128) + (64 + 256) = 160 + 320 = 480$$

$$= (32 + 128) + (64 + 256)$$

$$= 160 + 320$$

$$= 480$$

【解法三】这四个数分别是 32 的 1 倍、2 倍、4 倍、8 倍，所以这四个数的和是 32 的 $(1 + 2 + 4 + 8 =)$ 15 倍。一个数乘以 15 可用“乘 10 加半”巧算。

$$32 + 64 + 128 + 256$$

$$= 32 \times (1 + 2 + 4 + 8)$$

$$= 32 \times 15 \cdots \cdots \text{用乘 10 加半巧算}$$

$$\begin{array}{c} \downarrow \\ = 480 \quad 32 \times 10 + \frac{320}{2} \end{array}$$

解法一是按运算顺序进行计算的。解法二运用了加法交换律和结合律，使每两个数的和凑成整十数，计算比较简便。解法三抓住了四个数分别是 32 的 1 倍、2 倍、4 倍、8 倍这一特征，四个数的和是 32 的 15 倍，32 乘以 15 用“乘 10 加半”巧算，计算最简便，是本题的是佳解法。

$$\text{例 2 } 851 + 852 + 853 + 854 + 855 + 856 + 857 + 858$$

【解法一】本题是求八个连续自然数的和，可按“(首项 + 末项) $\div 2$ ”求出八个自然数的平均数，然后把平均数乘以自然数的个数。

$$851 + 852 + 853 + 854 + 855 + 856 + 857 + 858$$

$$= (851 + 858) \div 2 \times 8$$

$$= 854.5 \times 8$$

$$= 6836$$

【解法二】运用加法交换律和结合律，把 851 与 858 结合，852 与 857 结合，853 与 856 结合，854 与 855 结合，每两个数的和相等，只要求出其中两个数的和，然后乘以组数 4。

$$851 + 852 + 853 + 854 + 855 + 856 + 857 + 858$$

$$= (851 + 858) \times (8 \div 2)$$

$$= 1709 \times 4$$

$$= 6836$$

【解法三】每个数的零头数暂时不计，把每一个数都看作 850，先求出 8 个 850 的和，再加上少算的零头数。

$$851 + 852 + 853 + 854 + 855 + 856 + 857 + 858$$

$$= 850 \times 8 + (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8)$$

$$= 6800 + 36$$

$$= 6836$$

上面三种解法，与把八个连续自然数逐个相加的方法相比，要简便得多，可以说这些解法都既合理，又灵活。这些解法中，解法三最简捷，是本题的最佳解法。

例 3 25×12

【解法一】把 12 分解为 $4 + 4 + 4$ ，然后用乘法分配律进行计算。

$$25 \times 12$$

$$= 25 \times (4 + 4 + 4)$$

$$= 100 + 100 + 100$$

$$= 300$$

【解法二】把 12 看作 10 与 2 的和，然后用乘法分配律进行计算。

$$25 \times 12$$

$$= 25 \times (10 + 2)$$

$$= 25 \times 10 + 25 \times 2$$

$$= 250 + 50$$

$$= 300$$

【解法三】把 12 分解为 4×3 ，再利用乘法结合律进行计算。

$$25 \times 12$$

$$\begin{aligned}
 &= 25 \times (4 \times 3) \\
 &= (25 \times 4) \times 3 \\
 &= 100 \times 3 \\
 &= 300
 \end{aligned}$$

【解法四】根据“一个因数扩大几倍，另一个因数缩小相同的倍数，它们的积不变”的道理进行计算。

$$\begin{aligned}
 &25 \times 12 \\
 &= (25 \times 4) \times (12 \div 4) \\
 &= 100 \times 3 \\
 &= 300
 \end{aligned}$$

上面四种解法，解法三最简便，是本题的最佳解法。

例 4 85×99

【解法一】把 99 看作是 100 与 1 的差，然后用乘法分配律进行计算。

$$\begin{aligned}
 &85 \times 99 \\
 &= 85 \times (100 - 1) \\
 &= 85 \times 100 - 85 \times 1 \\
 &= 8500 - 85 \\
 &= 8415
 \end{aligned}$$

【解法二】两位数乘以 99 可以用“去 1 添补法”进行巧算。所谓“去 1”就是把被乘数减去 1（被乘数 85 减去 1 差为 84），“添补”就是在上面差 84 的后面添写被乘数的补数（85 的补数为 15）。

$$\begin{aligned}
 &= 85 \times 99 \\
 &= \underline{8415}
 \end{aligned}$$

$\swarrow$ 后面添写被乘数 85 的补数 15(添补)
 $\searrow$ 被乘数 85 减去 1 的差为 84(去 1)

“去1添补法”是计算一个两位数乘以99的巧妙方法，也是本题的最佳解法。

$$\text{例 5 } 8000 \times \left(\frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} \right)$$

【解法一】应用乘法分配律进行计算。

$$\begin{aligned} & 8000 \times \left(\frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} \right) \\ &= 8000 \times \frac{1}{10} + 8000 \times \frac{1}{100} + 8000 \times \frac{1}{1000} \\ &= 800 + 80 + 8 \\ &= 888 \end{aligned}$$

【解法二】把 $\frac{1}{10}$ 、 $\frac{1}{100}$ 、 $\frac{1}{1000}$ 分别化成小数，然后按运算顺序进行计算。

$$\begin{aligned} & 8000 \times \left(\frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} \right) \\ &= 8000 \times (0.1 + 0.01 + 0.001) \\ &= 8000 \times 0.111 \\ &= 888 \end{aligned}$$

【解法三】先把小括号内三个分数通分，求出它们的和，然后和8000相乘。

$$\begin{aligned} & 8000 \times \left(\frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} \right) \\ &= 8000 \times \frac{111}{1000} \\ &= 888 \end{aligned}$$

上面三种解法，解法一比较简便，是本题的最佳解法。

$$\text{例 6 } \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5} \right)$$

【解法一】按运算顺序计算：先算小括号（通分计算），然后从左往右依次计算。

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) \\
&= \left(\frac{3}{6} - \frac{2}{6}\right) + \left(\frac{4}{12} - \frac{3}{12}\right) + \left(\frac{5}{20} - \frac{4}{20}\right) \\
&= \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} \\
&= \frac{3}{10}
\end{aligned}$$

【解法二】按运算顺序计算，先算小括号里的（三个小括号里每两个分数都有这样一个特点：分母是互质数，分子都是1，它们的差是一个分数，分母等于两个分母的乘积，分子等于两个分母的差），然后从左往右依次计算。

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) \\
&= \frac{3-2}{2 \times 3} + \frac{4-3}{3 \times 4} + \frac{5-4}{4 \times 5} \\
&= \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} \\
&= \frac{3}{10}
\end{aligned}$$

【解法三】可以把算式中的小括号去掉，由于小括号前面是“+”号，去掉小括号后，括号里原计算符号不变，这样， $+\frac{1}{3}$ 与 $-\frac{1}{3}$ 相消， $+\frac{1}{4}$ 与 $-\frac{1}{4}$ 相消，结果等于首项 $\frac{1}{2}$ 与末项 $\frac{1}{5}$ 的差。

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) \\
&= \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} \\
&= \frac{1}{2} - \frac{1}{5} \\
&= \frac{3}{10}
\end{aligned}$$

解法一先用通分的方法算出三个小括号里的差，然后求和，

计算最复杂。解法二是用巧算方法分别算出三个小括号里的差，然后求和，比解法一简便了。解法三根据题目的特点，巧妙地运用了去括号的方法，使整个算式中的中间四个数，正好相消，计算最简便，是本题的最佳解法。

例 7 $1990 \times 198.9 - 1989 \times 198.8$

【解法一】按运算顺序计算：先分别算出两个积，然后求两积之差。

$$\begin{aligned} & 1990 \times 198.9 - 1989 \times 198.8 \\ &= 395811 - 395413.2 \\ &= 397.8 \end{aligned}$$

【解法二】用“扩缩法”计算。把 1989×198.8 中的一个因数 1989 缩小 10 倍，另一个因数 198.8 扩大 10 倍，积不变，经过这样恒等变形以后，两个积中都有相同的因数 198.9，运用乘法分配律把它提取出来，然后进行计算。

$$\begin{aligned} & 1990 \times 198.9 - 1989 \times 198.8 \\ &= 1990 \times 198.9 - 198.9 \times 1988 \\ &= 198.9 \times (1990 - 1988) \\ &= 198.9 \times 2 \\ &= 397.8 \end{aligned}$$

解法一是按运算顺序计算的，计算相当麻烦。解法二是运用了“扩缩法”，把 1989×198.8 进行恒等变形，然后用乘法分配律计算，解法巧妙、简便，是本题的最佳解法。

例 8 $40\frac{5}{12} \div 5$

【解法一】按带分数除法的方法进行计算：一化（把带分数化成假分数），二改（把除号改为乘号），三倒（除数分子分母颠倒位置），四约（能约分的要约分），五算（把结果算出来）。

$$40\frac{5}{12} \div 5 = 40\frac{5}{12} \times \frac{1}{5} = 40 \times \frac{1}{5} + \frac{5}{12} \times \frac{1}{5} = 8 + \frac{1}{12} = 8\frac{1}{12}$$