

“十三五”国家重点出版物出版规划项目 世界名校名家基础教育系列

国家级精品课程教材

国家级资源共享课程教材

工程振动测试技术

◎ 刘习军 张素侠 主编

ENGINEERING VIBRATION TESTING TECHNOLOGY



机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

“十三五”国家重点出版物出版规划项目 世界名校名家基础教育系列

国家级精品课程教材

国家级资源共享课程教材

工程振动测试技术

主编 刘习军 张素侠

参编 徐家福 刘 鹏 商开然 相林杰

机械工业出版社

本书采用模块式结构,介绍了有关工程振动测试技术的基本理论及现代工程测试技术在工程中的应用。本书内容丰富,通俗易懂,由浅入深,以务实为根本,主要包括:传感器、测试系统和激振设备的工作原理,基本参数的测量,数字信号分析,虚拟仪器,实验模态分析简介,参数识别,小波变换简介,表面振动波的测试,激光测振仪的工作原理和工程振动测试技术在工程应用中的实例。

为方便广大读者对振动测试技术的概念理解,天津大学的国家资源共享课“工程振动与测试”(http://www.icourses.cn/coursestatic/course_2244.html)上发布了教学全程录像,供读者免费观看学习。

本书既可作为高等工科院校本科生或研究生的工程振动测试技术课程的教材或教学参考书,也适合于从事机械、航空、航天、船舶、车辆、建筑和水利等行业的工程技术人员在进行实验研究工作中参考。

图书在版编目(CIP)数据

工程振动测试技术/刘习军,张素侠主编. —北京:机械工业出版社,2016.7

“十三五”国家重点出版物出版规划项目·世界名校名家基础教育系列 国家级精品课程教材

ISBN 978-7-111-54240-7

I. ①工… II. ①刘… ②张… III. ①工程振动学—振动测量—高等学校—教材 IV. ①TB123

中国版本图书馆CIP数据核字(2016)第156985号

机械工业出版社(北京市百万庄大街22号 邮政编码100037)

策划编辑:姜凤 责任编辑:姜凤 李乐

责任校对:杜雨霏 封面设计:张静

责任印制:李洋

保定市中华美凯印刷有限公司印刷

2016年8月第1版第1次印刷

184mm×260mm·16印张·384千字

标准书号:ISBN 978-7-111-54240-7

定价:36.00元

凡购本书,如有缺页、倒页、脱页,由本社发行部调换

电话服务

网络服务

服务咨询热线:010-88379833

机工官网:www.cmpbook.com

读者购书热线:010-88379649

机工官博:weibo.com/cmp1952

教育服务网:www.cmpedu.com

封面无防伪标均为盗版

金书网:www.golden-book.com

前 言

随着生产技术的发展,动力结构有向大型化、高速化、复杂化和轻量化发展的趋势,由此而带来的振动问题更为突出。解决振动问题主要有两种方法——理论方法和实验方法,两种方法具有相辅相成的作用,它们的结合运用是解决工程振动的有效方法。

用实验的方法解决振动问题经历了半个世纪的发展过程,直到20世纪70年代以后,振动测试技术才进入了一个重要的发展时期。在这一时期,由于计算机的快速发展以及快速傅里叶变换的普遍应用,各种基于数字信号处理原理的频率分析仪以及以计算机为核心的多功能信号分析软件大量涌现,从而大大加强了对工程振动信号时域及频域的分析功能。由于有关软件功能的不断完善,在测试过程中只要掌握振动理论,并熟悉有关仪器、设备的工作原理以及操作步骤和要求,根据激励和响应的关系,就能很容易地通过计算机软件进行模态分析而得到各阶振动模态特性。此外,为环境模拟实验需要而发展起来的振动控制原理与技术,为机器设备故障诊断而发展起来的各种振动状态监测与分析系统,都是振动测试应用的重要方面。振动测试是一种解决工程振动问题的好方法,随着科学技术的发展,它已成为一门综合性学科,并深入到各科技、生产领域,是解决结构设计、设备运行、产品试制中有关振动问题的必不可少的手段。因此,为解决现代科学技术和工程实际问题中的振动问题,掌握工程振动测试技术是十分必要的。

由此,许多学校在力学、机械、航空、航天、船舶、车辆、建筑、土木和水利等各专业开设了相关的振动测试技术课程,为适应工程建设的需要,天津大学的国家资源共享课“工程振动与测试”在网上(http://www.icourses.cn/coursestatic/course_2244.html)发布了教学全程录像,以及几个典型教学实验(如中华文物龙洗和编钟实验)的全程录像,解决了此课程的实验问题,以方便大家以网络形式学习,为全程教育提供了平台。为满足教学和工程建设的需求,本书在编写中本着由浅入深、通俗易懂的原则,以务实为根本,着重介绍了有关的基本概念和原理,从而避免了烦琐的数学推导。

本书对振动测试系统着重介绍其工作原理和应用:如对有些仪器,着重用框图说明电路各环节的作用,而不涉及具体的线路图;对传感器,主要用示意图说明其工作原理,而不涉及其实际结构。上述处理可为工程技术人员的初学和应用创造有利条件。

考虑到部分读者可能对振动基本理论不甚熟悉,这将影响对测试技术的理解和应用。为此,本书在第1章中用通俗易懂的方式对有关振动的基本理论和概念进行了简单介绍,以建立振动理论与测试技术的相互联系。

随着现代科学技术的迅猛发展,先进的测试与传感技术不断涌现,测试仪器和设备不断更新换代,所以本书在编写方法上:一是为读者自学、深造和拓宽知识打下坚实的基础;二是大胆地推陈出新,注意引进新方法、新技术和新科技成果,根据工程振动测试技术的特点精选内容,结合工程实际,反映现代分析方法和工程测试技术的发展等。

本书共分11章:第1章介绍了机械振动的基本理论,它是工程振动测试技术的理论基础。第2章介绍了振动测试中的基本方法,包括工程振动测试的基本原理、测试系统的组成和技术性能等。第3章介绍了传感器的机械接收原理和机电变换原理,包括机械式、压电

式、电阻应变式、电感式、电容式、电动式等传感器的工程应用。第4章介绍了振动测试仪器及设备的工作原理,其中包括微分、积分放大器,滤波器,激振器、振动台、力锤等激振设备,并重点讨论了不同激励形式的激振器和振动台的工作原理和适用范围,以及振动测试系统的校准。第5章介绍了数据采集与信号的傅里叶分析原理;阐述了模数、数模转换,频率混淆与采样定理,泄漏与窗函数,傅里叶变换,快速傅里叶变换等基本概念;讨论了工程实际中对采样频率的要求和窗函数的选择。第6章介绍了虚拟仪器技术,并以虚拟仪器开发平台为研究对象,讲述了有关软件的使用方法,重点讲解了数据分析模块的基本功能。第7章介绍了实验模态分析,阐述了单自由度系统传递函数和多自由度系统传递函数矩阵的物理意义,介绍了模态参数识别的基本方法和在环境模态下的模态分析方法。第8章介绍了小波分析及其在基本参数识别和结构损伤识别方面的应用。第9章介绍了基本振动参数的实验方法等实例。第10章介绍了表面振动波的非接触测试方法。第11章介绍了激光测振原理及应用,其中重力波测试技术和激光测振技术是近年来在振动测试领域发展起来的新技术,并得到迅速的普及和应用。各章之中还包含部分工程应用实例。为便于学习,本书还配有相应的习题等。欲观看有关讲课视频录像和实验视频录像,可登录(http://www.icourses.cn/coursestatic/course_2244.html)网站,选择国家资源共享课“工程振动与测试”课程的第2部分。

本书的主要内容是对多年振动测试技术课程讲授经验的总结,是在编者较早编写的《工程振动与测试技术》和《工程振动理论与测试技术》基础上改编而成的,增加了小波变换、虚拟仪器、表面振动波的非接触测试方法和激光测振仪等在工程上应用的新内容,并对其他章节进行了大幅度修改,有关专家经过详细审阅,提出了非常宝贵的意见,在此谨向他们表示衷心的感谢。

本书进行了两方面改进。首先,为方便学习以及快速掌握全书重点,本书采取了双色印刷技术,使重点更加突出。其次,在每一页引入了二维码,扫描二维码,可得到本页的相关资源,如要点提示、有关实验设备、图片、动画、思考题答案、实验设备应用微视频、实验录像以及学术讲座等内容。在使用本书相关资源的过程中,若读者有任何建议或意见,请联系我们(lxijun@tju.edu.cn或ajiang2001@sina.com),在此深表感谢。

本书第1、2、4、5、7、9、11章由刘习军执笔,第3章由徐家福执笔,第6章由刘鹏执笔,第8章由商开然、相林杰执笔,第10章由张素侠执笔,最后由刘习军、张素侠统稿。

本书可作为高等工科院校本科生和研究生的工程振动测试技术课程的教材或教学参考书,也可供从事机械、航空、航天、船舶、车辆、建筑和水利等行业的从事振动测试工作的工程技术人员参考。

限于水平,错误与不妥之处在所难免,恳请广大同行及读者指正。

编者

引 言

工程振动测试技术是一门综合性技术，它集振动理论、动态测试技术、数字信号分析和系统参数识别技术等学科于一身，通过理论分析与试验研究相结合以达到工程测试的目的。

振动理论是以物理系统为研究对象，通过物理参数建立运动微分方程，利用矩阵理论求出固有频率和主振型，再利用主振型进行坐标变换，求得主振型坐标下的响应，通过反变换回到物理坐标，即可求得物理坐标下的响应结果。而工程振动测试技术是振动理论的逆向思维，它是由测得的响应求出固有频率和主振型等物理系统的物理参数，所以振动理论在测试过程中起着指导作用，对于工程技术人员来说，只有掌握了振动理论的基本概念，才能深入地开展试验研究。

现代的测试技术中，动态测试的地位越来越重要，动态测试技术是人们认识客观事物的手段，测试技术包含测量技术与试验技术，在动态测试过程中，需要借助专门设备，通过合适的试验和必要的数据处理，求得所研究对象的有关的振动信号。即首先要解决传感器的信号接收问题，然后利用一定的专门设备将其信号进行转换、传输、放大、滤波和采样，使其转换为能进一步进行数字信号分析的数字信号。在此过程中测试设备和测试技术起着关键作用。

数字信号分析是将由测试设备获得的复杂数字信号分解为若干简单信号的叠加，其分析手段是采用傅里叶分析和小波分析等分析方法，通过数字信号分析，抓住信号的主要成分进行处理和传输，使复杂问题简单化。所以数字信号分析方法是解决所有复杂问题最基本、最常用的方法。

系统参数识别的主要任务是从测试所得到的数字信号中，确定振动系统的动态参数，如固有频率、振型、阻尼比、质量及刚度等。因为无论是对简单结构，还是复杂结构或其中的某个部件，确定振动系统的动态参数是非常重要的。例如，一座桥梁或者一台机器，当受到外力激励后，所发生的位移-时间历程就包含了描述该系统的固有频率和阻尼比的信息。因此，对所测得的位移-时间信号进行实验模态分析或小波分析，就可以获得该系统的动态参数。

总之，在解决实际工程问题的过程中，理论分析的结果是否正确要通过实验验证才能确定，而实验中的结果是否正确也要用理论分析来解释。并且实验中的工程振动测试技术是建立在振动理论之上的，测点的确定、仪器的选择要在振动理论概念的指导下进行，所以实验数据的采集和分析处理是振动测试技术的关键，而工程振动测试技术是解决工程振动问题的重要手段之一。

本书就是介绍如何通过以上所述的振动理论、动态测试技术、数字信号分析和系统参数识别等各种技术手段和理论得到系统的动态响应数据，如何分析处理这些实验数据而识别出系统的动态参数，为解决各种复杂结构与机械系统的振动问题提供理论依据。

目 录

前言

引言

第1章 振动的基本理论 1

1.1 振动系统的组成 2

1.2 单自由度系统的振动 3

1.3 两自由度系统的振动 14

1.4 多自由度系统的振动 20

习题 30

第2章 工程振动测试系统概述 32

2.1 工程振动测试原理概述 32

2.2 工程振动测试方法 33

2.3 测试系统的组成及配置 33

2.4 工程测试系统的技术性能 37

2.5 工程振动测量中参量和仪器的选择 40

2.6 工程振动测试技术的任务 41

习题 43

第3章 传感器的工作原理 44

3.1 传感器的机械接收原理 44

3.2 相对式传感器的机电变换原理 52

3.3 惯性式传感器的机电变换原理 59

习题 69

第4章 振动测试仪器及设备 71

4.1 微积分放大器 71

4.2 模拟滤波器 76

4.3 压电式加速度传感器的测试系统 80

4.4 电涡流式传感器的测试系统 85

4.5 激振设备 87

4.6 振动测试仪器的校准 93

习题 98

第5章 数字信号分析 (I) ——

傅里叶分析 99

5.1 数据处理的基本知识 99

5.2 傅里叶变换 104

5.3 有限离散傅里叶变换 106

5.4 快速傅里叶变换 108

5.5 频率混淆与采样定理 111

5.6 泄漏与窗函数 116

5.7 数字滤波器 122

5.8 噪声与平均技术 126

5.9 数字信号分析仪的工作原理及简介 128

习题 131

第6章 虚拟仪器技术 133

6.1 虚拟仪器概述 133

6.2 虚拟仪器的组成 134

6.3 虚拟仪器的编制 136

6.4 虚拟仪器的应用 147

习题 148

第7章 实验模态分析简介 150

7.1 实验模态分析概述 150

7.2 实验模态分析的几个基本概念 151

7.3 多自由度系统的传递函数矩阵和 频响函数矩阵 156

7.4 传递函数的物理意义 157

7.5 多自由度系统的模态参数识别 159

7.6 模态分析中的几种激振方法 163

7.7 模态分析的实验过程 165

7.8 环境激励法的实验模态分析简介 166

7.9 实验模态分析在工程中的应用 169

7.10 模态参数识别的判据 172

习题 173

第8章 数字信号分析 (II) ——

小波分析 174

8.1 傅里叶变换的特点 174

8.2 短时傅里叶变换 176

8.3 小波变换 178

8.4 离散小波变换 185

8.5 正交小波变换的快速 (Mallat) 算法 186

8.6 小波包变换 190

8.7 小波分析的工程应用 196

习题 200

第9章 基本振动参数常用的

测量方法 201

9.1 简谐振动频率的测量	201	10.2 傅里叶变换莫尔法	226
9.2 机械系统固有频率的测量	203	10.3 工程应用实例	230
9.3 简谐振动幅值的测量	206	习题	234
9.4 同频简谐振动相位差的测量	208	第 11 章 激光测振原理及应用	235
9.5 衰减系数及阻尼系数的测量	211	11.1 激光干涉基础	235
9.6 振型曲线的测量	215	11.2 时间平均全息方法	236
9.7 质量或刚度的测量	216	11.3 激光多普勒效应	237
9.8 周期振动的参数测量方法	217	11.4 激光多普勒光学信息处理	239
习题	223	11.5 激光多普勒测振仪的工程应用	241
第 10 章 表面振动波的非接触		习题	245
测试方法	224	参考文献	246
10.1 云纹法	224		

第1章

振动的基本理论

机械振动是指物体在其稳定的平衡位置附近所做的往复运动。这是物体的一种特殊形式的运动。运动物体的位移、速度和加速度等物理量都是随时间往复变化的。

机械振动是一种常见的物理现象，如桥梁、机床的振动等。一方面，振动的存在会影响机器的正常运转，使机床的加工精度、精密仪器的灵敏度下降，严重的还会引发机器或建筑结构的毁坏；另一方面，人们利用机械振动现象的特征，设计制造了众多的机械设备和仪器仪表，如振动筛、振动打桩机、混凝土振捣器等。

为了便于研究振动现象的基本特征，需要将研究对象进行适当地简化和抽象，形成一种分析研究振动现象的理想化模型，即振动系统。振动系统可以分为两大类：连续系统与离散系统。具有连续分布的质量与弹性的系统，称为连续弹性体系统，在实际工程结构中，例如板壳、梁、轴等的物理参数一般是连续分布的，因此，这样的模型系统称为连续系统或分布参数系统。其运动方程是偏微分方程。

对连续系统通过有限元进行简化，形成有限个弹簧-质量的离散系统。离散系统是由有限个惯性元件、弹性元件及阻尼元件等组成的系统，这类系统称为集中参数系统。所建立的振动方程是常微分方程。离散系统又称为多自由度系统，它的最简单的情况是单自由度系统。所谓系统的自由度，是指在具有完整约束的系统中，确定其位置的独立坐标的个数。

实际振动系统是很复杂的，可分为线性系统和非线性系统。线性系统是在系统的运动微分方程式中，只包含位移、速度的一次方项。如果还包含位移、速度的二次方或高次方项则是非线性系统。工程实际中有很多振动系统（例如单摆）未必是线性系统，但是，在微幅振动的情况下，略去高次项，线性化系统就是它在微幅振动时的理想化模型。因此，振动系统按运动微分方程的形式分为，线性振动：描述其运动的方程为线性微分方程，相应的系统称为线性系统。线性振动的一个重要特性是线性叠加原理成立。非线性振动：描述其运动的方程为非线性微分方程，相应的系统称为非线性系统。非线性振动叠加原理不成立。

振动系统按激励的性质可分为，固有振动：无激励时系统所有可能的运动的集合。固有振动不是现实的振动，它仅反映系统关于振动的固有属性。自由振动：激励消失后系统所做的振动，是现实的振动。受迫振动：系统在确定性的激励下所做的振动。自激振动：系统受到由其自身运动诱发出来的激励作用而产生和维持的振动，这时系统包含有补充能量的能源。例如，演奏提琴所发出的乐声，就是琴弦做自激振动所致。再如，车床切削加工时在某种切削用量下所发生的激励的高频振动，架空电缆在风作用下所发生的与风向垂直的上下舞动以及飞机机翼的颤振等，都属于自激振动。参数振动：激励因素以系统本身的参数随时间





变化的形式出现的振动。秋千在初始小摆角下被越荡越高就是参数振动的例子。

1.1 振动系统的组成

任何力学系统，只要它具有恢复力（弹性）和惯性力（质量）及激振力，都可能发生振动，这种力学系统称为振动系统。一般来说，振动系统主要由弹簧、质量、阻尼器和激振力系统组成。

1. 弹簧

弹簧是产生恢复力的弹性部件，通常假定弹簧是没有质量的，若考虑质量一般用近似方法将其等效作用于相应的质量块上，因而作用于弹簧两端的力大小相等并且方向相反。弹簧力可认为与伸长量成正比，比例系数称为弹性系数（或刚度系数），它可以是线性的也可以是非线性的。

2. 质量

质量决定系统的惯性并使物体保持运动状态，弹簧为系统提供的恢复力作用于具有质量的物体上并总是指向平衡位置。振动系统是在惯性力和弹簧力的作用下进行往复运动的。因此，应用能量观点来说，弹簧具有的能量为弹性势能，质量具有的能量为动能，产生的振动过程就是两种能量的反复交换。

3. 阻尼

阻尼是对振动系统中产生的阻尼力的总称，阻尼是客观存在的，产生阻尼的因素比较多，如流体对运动物体的阻力、组成结构的分子之间的作用对物体所形成的阻力等都称为阻尼力。一般来说，阻尼力是速度的函数并与速度的方向相反，可能是线性的也可能是非线性的，在机械振动系统中，阻尼只能消耗能量。

4. 激振力

激振力是振动系统之外的物体对振动系统的作用，是对振动系统进行能量补充的系统，也是引起系统振动的主要原因，产生激振力的原因很复杂，形式多样，要根据具体问题具体分析，但形成的激振力数学形式有以下几种：

（1）周期函数形式的力 周期函数是定义在 $(-\infty, +\infty)$ 区间，每隔一定时间 T 按相同规律重复变化的函数。

$$f(t) = f(t + mT) \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

（2）正弦函数形式的力

$$f(t) = F \sin \omega t$$

如旋转机械由于偏心所引起的惯性力等。

（3）周期性矩形波形式的力

$$F(t) = \begin{cases} f_0 & 0 < t < \pi \\ -f_0 & \pi \leq t < 2\pi \end{cases}$$

（4）冲击函数形式的力 冲击函数也称单位脉冲函数，用 $\delta(t)$ 表示，它具有以下性质：



$$\delta(t - \tau) = \begin{cases} 0 & t \neq \tau \\ \infty & t = \tau \end{cases}$$

且

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - \tau) dt = 1$$

如由敲击、碰撞所引起的冲击力等。

1.2 单自由度系统的振动

在工程上有许多问题通过简化,用单自由度系统的振动理论就能得到满意的结果。因此,以弹簧-质量系统为力学模型,揭示单自由度振动系统的规律、特点,可为进一步研究复杂振动系统奠定基础。

1.2.1 自由振动方程

以图 1-1 所示的弹簧-质量系统为研究对象。取物块的静平衡位置为坐标原点 O , x 轴方向铅直向下为正。当物块在静平衡位置时,由平衡条件列平衡方程为

$$\sum F_x = 0, \quad mg - k\delta_{st} = 0 \quad (1-1a)$$

式中, δ_{st} 称为弹簧的静变形。

当物块偏离平衡位置为 x 距离时,物块的运动微分方程为

$$m\ddot{x} = -k(x - \delta_{st}) - mg \quad (1-1b)$$

将式 (1-1a) 代入式 (1-1b), 再两边除以 m , 并令

$$p_n = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (1-2)$$

则式 (1-1b) 可写成

$$\ddot{x} + p_n^2 x = 0 \quad (1-3)$$

式 (1-3) 称为无阻尼自由振动微分方程。设式 (1-3) 的通解为

$$x = C_1 \cos p_n t + C_2 \sin p_n t$$

其中 C_1 和 C_2 为积分常数, 由初始条件 $t=0$ 时, $x=x_0$, $\dot{x}=\dot{x}_0$ 。得

$$C_1 = x_0, \quad C_2 = \frac{\dot{x}_0}{p_n}$$

代入得

$$x = x_0 \cos p_n t + \frac{\dot{x}_0}{p_n} \sin p_n t \quad (1-4)$$

式 (1-4) 也可写成以下形式:

$$x = A \sin(p_n t + \alpha) \quad (1-5)$$

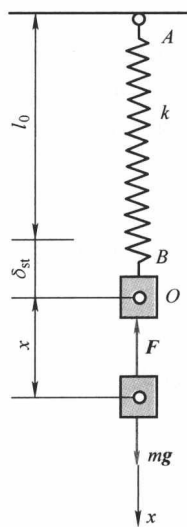


图 1-1 弹簧-质量系统



其中

$$\begin{cases} A = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{\dot{x}_0}{p_n}\right)^2} \\ \alpha = \arctan\left(\frac{p_n x_0}{\dot{x}_0}\right) \end{cases} \quad (1-6)$$

式 (1-4)、式 (1-5) 是振动方程解的两种形式, 称为自由振动。

振动的周期

$$T = \frac{2\pi}{p_n} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} \quad (1-7)$$

振动的固有频率

$$f_n = \frac{1}{T} = \frac{p_n}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (1-8)$$

振动的固有圆频率

$$p_n = 2\pi f \quad (1-9)$$

例 1-1 设有一均质等截面悬臂梁如图 1-2a 所示, 梁端有一集中质量 M , 梁单位长度质量为 m 。若考虑梁的质量, 试求梁的等效质量和系统的固有频率。

解: 假设梁在自由振动中的动挠度曲线和悬臂梁自由端有集中载荷 Mg 作用下静挠度曲线相同, 由材料力学可知, 悬臂梁自由端的挠度为

$$y_0 = \frac{Mgl^3}{3EJ}$$

任一截面 x 处的挠度可表示为 y_0 的函数

$$y = \frac{3lx^2 - x^3}{2l^3} y_0$$

在振动时, y 、 y_0 均是变量, 则有

$$\dot{y} = \frac{3lx^2 - x^3}{2l^3} \dot{y}_0$$

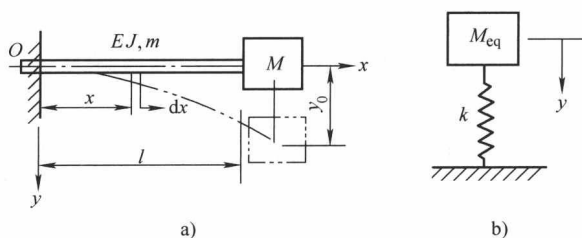


图 1-2 等截面悬臂梁

梁的动能为

$$T_s = \frac{1}{2} \int_0^l m dx \dot{y}^2 = \frac{1}{2} m \left(\frac{\dot{y}_0}{2l^3} \right)^2 \int_0^l (3lx^2 - x^3)^2 dx = \frac{1}{2} \frac{33}{140} ml \dot{y}_0^2$$



式中, ml 为梁的质量, 因此梁的等效质量为

$$m_{\text{eq}} = \frac{33}{140}ml$$

则图 1-2a 所示的系统可以简化为图 1-2b 所示的单自由度系统。其质量为

$$M_{\text{eq}} = M + m_{\text{eq}} = M + \frac{33}{140}ml$$

弹性系数为

$$k = \frac{Mg}{y_0} = \frac{3EJ}{l^3}$$

则系统的固有频率为

$$f_n = \frac{1}{2\pi}p_n = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{3EJ/l^3}{M + \frac{33}{140}ml}}$$

1.2.2 有阻尼系统的衰减振动

在自由振动中, 振动的振幅是不变的, 但是, 实际系统中由于阻尼力的作用, 振幅将逐渐衰减, 最后趋于零而停止振动。例如, 黏性阻尼力在低速 (小于 0.2m/s) 运动中与速度的一次方成正比, 这种阻尼称为线性阻尼, 数学表达式为

$$F_R = -cv \quad (1-10)$$

式中, 负号表示阻尼力 F_R 的方向总是与物体的速度方向相反; c 称为黏性阻尼系数, 单位是 $\text{N} \cdot \text{s/m}$ 。

图 1-3 所示为一有阻尼的弹簧-质量系统的简化模型。物块的下部表示阻尼器。仍以静平衡位置 O 为坐标原点, x 轴铅直向下为正, 则利用式 (1-1) 的结果, 经整理物块的运动微分方程为

$$m\ddot{x} = -c\dot{x} - kx$$

将上式两边同除以 m , 并令

$$p_n^2 = \frac{k}{m}, \quad 2n = \frac{c}{m}$$

其中 n 称为衰减系数, 它的单位是 $1/\text{s}$ 。上式可写成

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + p_n^2x = 0 \quad (1-11)$$

这就是有阻尼的自由振动微分方程。它的解在 $n < p_n$, $n > p_n$, $n = p_n$ 三种情况下分别进行讨论。

(1) $n < p_n$, 即小阻尼的情形

根据微分方程理论, 方程 (1-11) 的通解为

$$x = e^{-nt} (C_1 \cos p_d t + C_2 \sin p_d t) \quad (1-12)$$

式中, C_1 、 C_2 是两个积分常数, 当 $t=0$ 时, $x = x_0$, $\dot{x} = \dot{x}_0$, 得到

$$C_1 = x_0, \quad C_2 = \frac{nx_0 + \dot{x}_0}{p_d}$$

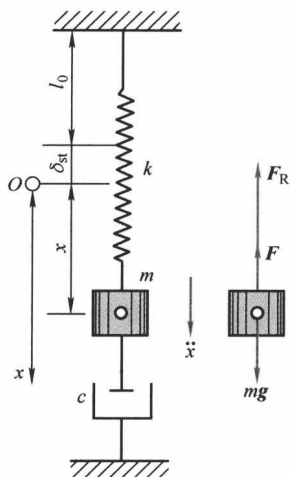


图 1-3 有阻尼系统



式 (1-12) 可写成以下形式:

$$x = Ae^{-nt} \sin(p_d t + \alpha) \quad (1-13)$$

式中,

$$\begin{cases} A = \sqrt{x_0^2 + \frac{(\dot{x}_0 + nx_0)^2}{p_d^2}} \\ \tan \alpha = \frac{x_0 p_d}{\dot{x}_0 + nx_0} \end{cases} \quad (1-14)$$

与式 (1-13) 对应的时间历程曲线如图 1-4 所示, 可以看到, 物块在平衡位置附近做往复运动, 具有振动的性质。但它的振幅不是常数, 随时间的推延而衰减, 通常称为衰减振动。

衰减振动的圆频率为

$$p_d = p_n \sqrt{1 - \left(\frac{n}{p_n}\right)^2} = p_n \sqrt{1 - \zeta^2} \quad (1-15)$$

式中,

$$\zeta = \frac{n}{p_n} \quad (1-16)$$

它等于衰减系数 n 与系统的无阻尼自由振动固有圆频率 p_n 之比, 称为阻尼比。阻尼比是振动系统中反映阻尼特性的重要参数, 在小阻尼情况下 $\zeta < 1$ 。

由式 (1-13) 可以看出, 衰减振动的振幅随时间按指数规律衰减。设经过一个周期 T_d , 在同方向的相邻两个振幅分别为 A_i 和 A_{i+1} , 即得

$$\eta = \frac{A_i}{A_{i+1}} = e^{nT_d} \quad (1-17)$$

式中, η 称为振幅减缩率或减幅系数。

(2) $n > p_n$ 大阻尼的情形

根据微分方程理论, 方程 (1-11) 的通解为

$$x = e^{-nt} (C_1 e^{\sqrt{n^2 - p_n^2}t} + C_2 e^{-\sqrt{n^2 - p_n^2}t}) \quad (1-18)$$

式中, C_1 、 C_2 是积分常数, 由运动的初始条件确定。在式 (1-18) 中, 已不含时间简谐函数的因子。因此, 物体由初始条件激励产生的运动, 随着时间的增大, 将逐渐地趋于平衡位置。这种运动已不再具有振动的性质了。

(3) $n = p_n$ 临界阻尼的情形

根据微分方程理论, 方程 (1-11) 的通解为

$$x = e^{-nt} (C_1 + C_2 t) \quad (1-19)$$

式中, C_1 、 C_2 为积分常数, 由运动的初始条件确定。这种情形与过阻尼的情形相似, 运动已无振动的性质。所以, 后面所讨论的振动问题若不进行特殊说明都是小阻尼情形。

值得注意的是, 临界情形是从衰减振动过渡到非周期运动的临界状态。因此, 这时系统的阻尼系数是表征运动规律在性质上发生变化的重要临界值。设 c_c 为临界阻尼系数, 由于

$$\zeta = \frac{n}{p_n} = 1, \text{ 即}$$

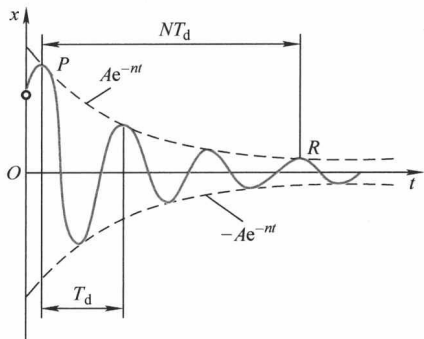


图 1-4 有阻尼振动



$$c_c = 2nm = 2p_n m = 2\sqrt{km} \quad (1-20)$$

可见, c_c 只取决于系统本身的质量与弹性系数。有

$$\frac{c}{c_c} = \frac{2nm}{2p_n m} = \frac{n}{p_n} = \zeta$$

ζ 即阻尼系数与临界阻尼系数的比值, 这就是 ζ 称为阻尼比的原因。

1.2.3 简谐激励作用下的受迫振动

当在系统上施加激振力或激励位移等外部激励时。系统产生持续振动, 这类在外部激励作用下所产生的振动称为受迫振动。如图 1-5 所示, 设在具有黏性阻尼的振动系统上, 作用有一简谐激振力

$$F_S = H \sin \omega t$$

其中, H 为激振力的幅值, ω 为激振力的圆频率。以平衡位置 O 为坐标原点, x 轴铅垂向下为正, 则利用式 (1-1) 的结果, 经整理物块的运动微分方程为

$$m \ddot{x} = -c \dot{x} - kx + H \sin \omega t$$

将上式两边同除以 m , 并令

$$p_n^2 = \frac{k}{m}, \quad 2n = \frac{c}{m}, \quad h = \frac{H}{m}$$

其中 h 表示单位质量受到的激振力的幅值。于是, 上式可写为

$$\ddot{x} + 2n \dot{x} + p_n^2 x = h \sin \omega t \quad (1-21)$$

这是单自由度受迫振动微分方程, 它的解由两部分组成:

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t)$$

其中 $x_1(t)$ 是齐次微分方程的通解, $x_2(t)$ 是非齐次方程的特解。设特解为

$$x_2(t) = B \sin(\omega t - \varphi)$$

则方程 (1-21) 的解可表示为

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t) = A e^{-nt} \sin(p_d t + \alpha) + B \sin(\omega t - \varphi) \quad (1-22)$$

由此看出, 受迫振动是由两部分组成的, 前一部分是圆频率为 p_d 的衰减振动, 后一部分是圆频率为 ω 的受迫振动。由于阻尼的存在, 衰减振动部分经过一定的时间之后就消失了。在此之后, 是稳定的受迫振动, 称为稳态响应。此时

$$x = x_2 = B \sin(\omega t - \varphi) \quad (1-23)$$

它是一简谐振动, 其圆频率与激振力的圆频率相同, 与激振力相比落后一相位角 φ , 称为相位差。式中, B 为受迫振动的振幅, 且

$$B = \frac{h}{\sqrt{(p_n^2 - \omega^2)^2 + (2n\omega)^2}} \quad (1-24)$$

φ 为相位角, 且

$$\tan \varphi = \frac{2n\omega}{p_n^2 - \omega^2} \quad (1-25)$$

以上两式表明, 稳态受迫振动的振幅 B 和相位差 φ 只取决于系统的固有圆频率、阻尼、激

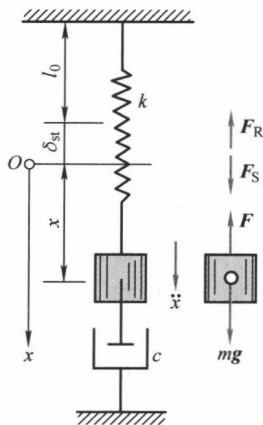


图 1-5 受迫振动系统



振力的幅值及频率，与运动的初始条件无关。

强迫振动的振幅在工程实际中是很重要的参数，它关系着振动系统的变形、强度和工作状态。为了探讨振幅 B 与 p_n 、 n 、 ω 等参数的定量关系，将式 (1-24) 写成无量纲的形式

$$\beta = \frac{B}{B_0} = \frac{1}{\sqrt{(1-\lambda^2)^2 + (2\zeta\lambda)^2}} \quad (1-26)$$

式中， $\beta = \frac{B}{B_0}$ 表示振幅 B 与静力偏移 B_0 的比值，称为放大因数或动力系数； $B_0 = \frac{h}{p_n^2} = \frac{H}{k}$ ，相

当于在激振力的力幅 H 作用下弹簧的静伸长，称为静力偏移； $\lambda = \frac{\omega}{p_n}$ 是激振力圆频率与系统固有圆频率之比，称为频率比。

以 λ 为横坐标， β 为纵坐标，并对应不同的阻尼比 ζ ，画出放大因数 β 随频率比 λ 变化的曲线，即幅频特性曲线，如图 1-6 所示。

对于某一振动系统来说， p_n 是不变的，激振力的频率 ω 从零开始增加， λ 值也从零开始增加。下面将 λ 的变化域分成三个区段来讨论幅频特性曲线的特征。

(1) 低频区 当 $\omega \ll p_n$ ， $\lambda \rightarrow 0$ 时。由式 (1-26) 可以看出，此时放大因数 $\beta \approx 1$ ，表示受迫振动的振幅 B 接近于静力偏移 B_0 ，即激振力的作用接近于静力作用。从图 1-6 看出，在低频区，阻尼比 ζ 对放大因数 β 的影响很小，可略去不计。随着 λ 值的增大，放大因数 β 值逐渐增大，阻尼比 ζ 的影响也逐渐明显起来。

(2) 共振区 当 $\frac{d\beta}{d\lambda} = 0$ ，得 $\lambda = \lambda_m = \sqrt{1-2\zeta^2}$ 时， β 将达到极大值 $\beta_{\max}$ ：

$$\beta_{\max} = \frac{1}{2\zeta \sqrt{1-\zeta^2}} \quad (1-27)$$

也就是说，当 $\omega = p_n \sqrt{1-2\zeta^2}$ 时，放大因数 β 出现极大值。这说明当激振力的频率接近于系统的固有频率，即 $\omega \approx p_n$ 时，受迫振动的振幅出现最大值，这种现象称为共振。所谓共振区是指 $\lambda \approx 1$ 邻近的振幅较大的区间。在这区间内，振幅变化十分明显，阻尼的影响也十分显著。阻尼比越小，振幅的峰值越大。在理想情形下，如果 $\zeta = 0$ ， $\lambda = 1$ 时， $\beta \rightarrow \infty$ ，从理论上讲，受迫振动的振幅要无限地增大下去。因此，在共振区内增加阻尼能够有效地抑制振幅的增大。

(3) 高频区 当 $\omega \gg p_n$ ， $\lambda \gg 1$ 时。由式 (1-26) 看出， β 值逐渐减小而趋于零。由图 1-6 的曲线可以看到，当 $\lambda > 2$ 以后， β 已很小，这时阻尼的影响又变得很小，可略去不计。这说明，对于固有频率很低的振动系统来说，在高频激振力的作用下，所产生的振动位移是非常小的，应该指出，如果阻尼相当大， $\zeta > 0.77$ 时，放大因数 β 从 1 开始单调下降而趋于零。

将式 (1-25) 写成无量纲形式

$$\tan\varphi = \frac{2 \frac{n}{p_n} \frac{\omega}{p_n}}{1 - \left(\frac{\omega}{p_n}\right)^2} = \frac{2\zeta\lambda}{1-\lambda^2} \quad (1-28)$$

绘出对应不同的阻尼比 ζ ，相位差 φ 随 λ 变化的曲线如图 1-6 中的右上角所示，即相频特性曲线。

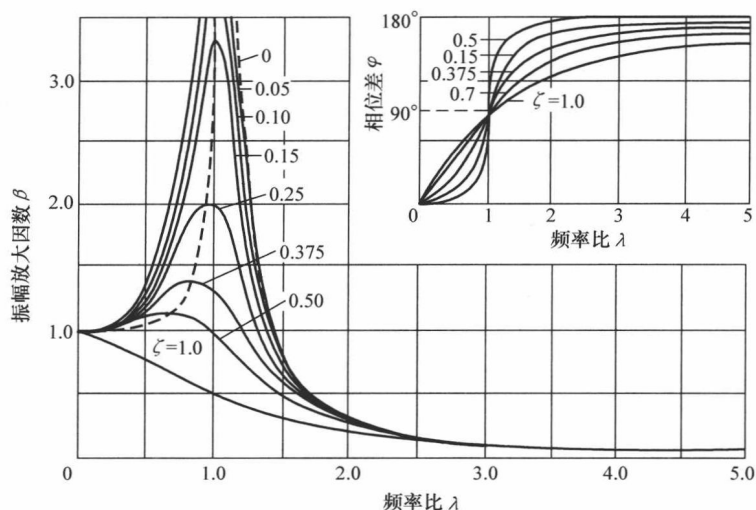


图 1-6 响应曲线

(1) 低频区 当 $\lambda \ll 1$ 时, $\varphi \approx 0$, 表明当激振力频率很低或 $\omega \ll p_n$ 时, 相位差 φ 接近于零, 即受迫振动的位移与激振力几乎同相位。

(2) 共振区 当 $\lambda = 1$ 时, $\varphi = 90^\circ$, 表明当激振力频率等于振动系统的固有频率时, 相位差为 90° 。值得注意, 系统共振时, 阻尼对相位差无影响, 即无论阻尼多大, 当 $\omega = p_n$ 时, 相位差 φ 总是等于 90° 。在振动实验中, 常以此作为判断振动系统是否处于共振状态的一种标志。

(3) 高频区 当 $\lambda \gg 1$ 时, $\varphi \approx 180^\circ$, 表明当激振力频率远远高于固有频率时, 受迫振动的相位差接近于 180° 。这说明受迫振动的位移与激振力是反相位的。

应当指出, 以上对于幅频特性曲线和相频特性曲线的分析, 只适用于图 1-5 所示的系统, 对于工程上的具体问题要根据工程实际进行相应的幅频特性曲线及相频特性曲线分析。

例 1-2 质量为 M 的电动机安装在弹性基础上。转子由于不平衡产生偏心, 偏心距为 e , 偏心质量为 m 。转子以匀角速度 ω 转动, 如图 1-7a 所示, 试求电动机的运动。弹性基础的作用相当于刚度系数为 k 的弹簧。设电动机运动时受到黏性阻尼的作用, 阻尼系数为 c 。

解: 取电动机的平衡位置为坐标原点 O , x 轴铅垂向下为正。作用在电动机上的力有重力 Mg 、弹性力 F 、阻尼力 F_R 、虚加的惯性力 F_{le} 与 F_{lr} , 受力图如图 1-7b 所示。

根据达朗贝尔原理, 有

$$\sum F_y = 0, -c\dot{x} + Mg - k(x + \delta_{st}) - M\ddot{x} - me\omega^2 \sin\omega t = 0$$

整理得

$$M\ddot{x} + c\dot{x} + kx = -me\omega^2 \sin\omega t$$

令 $p_n^2 = \frac{k}{M}$, $2n = \frac{c}{M}$, 则上式可写成式 (1-21) 的形式

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + p_n^2 x = \frac{m}{M}e\omega^2 \sin(\omega t + \pi) \quad (a)$$